数理解析研究所講究録
9巻 1966年 24-42

作用素環の束論的研究

愛媛大学文理学部　前　田　周一郎

ここでは作用素環の束論的研究の中でも，Piron の二つの論文〔28〕，〔29〕で取扱われている内容を中心にして述べる。〔28〕の本文では量子論における system of propositions が如何なる数学的構造をもつものであるかについて述べ，量子論と Hilbert 空間との結びつきを，この面から正当化することを意図している。ここで用いられる数学的理論の内容は全く束論に属するもので，これを18頁にわたる Appendix にまとめてある。次に〔29〕では system of propositions を基にして von Neumann system の概念（von Neumann algebra の射影作用素の作る束に相当する）を作り，これを考察してある。ここでは〔28〕，〔29〕に主として関係する部分をそれぞれ Part I，Part II とする。

本論にはいる前に次の準備をしておく。

§0. 束に関する諸概念

(i) 束 L が complete であるとは，L の任意個の元 a_α に対して l.u.b. $\bigcup_\alpha a_\alpha$ と g.l.b. $\bigcap_\alpha a_\alpha$ が存在することである。$a_\delta \uparrow a$ ならば $a_\delta \cap b \uparrow a \cap b$ が成立つとき upper-continuous，$a_\delta \downarrow a$ ならば $a_\delta \cup b \downarrow a \cup b$ が成立つとき lower-continuous，共に成立つとき continuous という。

(ii) 0，1をもつ束 L で，$a \cup a' = 1$，$a \cap a' = 0$ のとき a' を a の complement といい，すべての元が complement をもつとき L は complemented であるという。$a < b$ ならば sublattice $L(a,b) = \{x \in L;\ a \leq x \leq b\}$ がつねに complemented であるとき，L は relatively complemented であるという。0，1 をもつ束 L で dual-automorphism (order を逆にする) $a \to a^\perp$ が存在して，$a^{\perp\perp} = a$ で，$a^\perp$ は a の complement であるとき，L は orthocomplemented であるといい，$a^\perp$ を a の orthocomplement という。$a \leq b^\perp$ のとき a と b は orthogonal

という。

(iii) 束 L の二元 a, b が次の性質をもつとき, modular pair を作るといい $(a, b)M$ とかく。

$$c \leqq b \quad \text{ならば} \quad (c \cup a) \cap b = c \cup (a \cap b)$$

また次の性質をもつとき dual-modular pair を作るといい $(a, b)M^*$ とかく。

$$c \leqq a \quad \text{ならば} \quad (a \cup b) \cap c = a \cup (b \cap c)$$

$(a, b)M$ ならば $(b, a)M$ が成立つとき, L は M-symmetric である([19] では semi-modular)という。すべての a, b に対して $(a, b)M$ ならば, L は modular であるという。

(iv) 三元 a, b, c に対し
$(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \quad (b \cap c)$ が成立つとき $(a, b, c)D$ とかき,
$(a \cap b) \cup c = (a \cup c) \quad (b \cup c)$ が成立つとき $(a, b, c)D^*$ とかく。
すべての a, b, c に対しこの二つが成立つとき, L は distributive であるという。distributive かつ complemented のとき Boolean lattice という。

(v) 0, 1 をもつ束 L が直積 $L_1 \times L_2$ と isomorph のとき, 元 $(1_1, 0_2)$ に対応する L の元を中心元という。その全体を中心という。0, 1 は中心元とする。L の元 z が中心元であるための必十条件は z が complement をもち z を含む D, D^* がすべて成立つことである。L の中心は L の Boolean sublattice を作る。中心元が 0, 1 だけのとき, L は irreducible であるという。

定 理(MacLaren [19]) 束 L が orthocomplemented のとき, L の元 z が中心であるための必十条件は, 任意の $a \in L$ に対して $(z, z^{\perp}, a)D$ が成立つことである。

(vi) $a < b$ で $a < x < b$ となる x が存在しないとき, b は a を cover するといい, $a \lessdot b$ とかく。$0 \lessdot p$ なる元 p を atom という。すべての 0 でない元が atom を含むとき, L は atomic であるといい, $a < b$ ならばつねに $p \not\leqq a$, $p \leqq b$ なる atom p が存在するとき, L は relatively atomic

であるという。 relatively atomic のときすべての元は atom のある集合の join となる。有限個の atom の join となる元を finite という。

(vii) p が atom で $p \nleqq a$ ならばつねに $a < a \cup p$ が成立つことを covering property という。これは atom p に対し $(p, a)M$ がつねに成立つことと同値である。更に L が relatively atomic のときは次のことと同値である。

$$a \cap b < a \quad \text{ならば} \quad b < a \cup b \, .$$

relatively atomic な L が covering property をもつとき，finite な元 a の長さ n は $(0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n = a)$ unique に定まり，finite な元全体は L の ideal を作る。 p が atom のとき $(a, p)M$ はつねに成立つから，束が M-symmetric ならば covering property をもつ。

(viii) orthocomplemented な束 L について次の命題はすべて同値であることが証明される。これが成立つとき L は orthomodular または relatively orthocomplemented である。
(〔16〕，〔28〕では weakly modular，〔13〕では quasimodular）という。

(α) $a \perp b$ $(a \leqq b^{\perp})$ ならば $(a, b)M$.

(α') すべての a に対し $(a, a^{\perp})M$.

(β) $a \leqq b$ ならば $b = a \cup (b \cap a^{\perp})$.

(β') $a \leqq b$ ならば $a \perp c$，$a \cup c = b$ なる c が存在する。

(γ) $(a, a^{\perp}, b)D$ ならば $(b, b^{\perp}, a)D$. （〔27〕参照）

(δ) $a < b$ ならば $x \rightarrow (a \cup x^{\perp}) \cap b$ は $L(a, b)$ における orthocomplementation である。

Part I

§1. system of propositions

ここで Piron〔28〕の本文の内容をまず紹介する。

physical system が与えられているとき，測定の結果が yes or no で表現され

る，すなわち固有値が0と1だけの observable を proposition という。あらゆる測定は yes or no の型の測定の列でおきかえられるから，observable の研究を proposition の集まりの構造の研究に帰着させられる。その構造の研究に当つて Piron は Birkhoff と von Neumann 〔3〕以来の公理的方法によつた。二つの proposition a, b に対し，a が yes であることが確かであるような測定では必ず b が yes であることも確かであるというときに $a \leqq b$ とする。proposition 全体の集合 τ がこの order に関してみたすべき公理として，Piron があげたものを束論的に表わせば次のようになる。

Axiom O. τ は ordered set (partially) を作る。ここで $a \leqq b$, $b \leqq a$ となる二つの proposition a, b は同一と考える。

Axiom T. τ は complete lattice を作る。ここで $\bigwedge_\alpha a_\alpha$ の測定の答は a_α の答がすべて yes のとき yes であり，その他のときは no であるとする。$\bigvee_\alpha a_\alpha$ も同様。

Axiom C. τ は orthocomplemented である。ここで a と $a^\perp$ は yes と no の答が丁度逆になるものである。

古典力学では proposition が相空間の部分集合に対応することから，更に分配率 D, D^* が成立ち，τ は complete な Boolean lattice となる。

通常の量子論，すなわち observable をある Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ の作用素と考えるときは，proposition は射影作用素に対応し，したがつて $\mathfrak{H}$ の closed snbspace に対応する。ここでもし $\mathfrak{H}$ が有限次元ならば，τ では分配律より少し弱い modular 律 M, M^* が成立し，τ は complete な orthocomplemented modular lattice となる。有限次元でないときは modular 律は必ずしも成立しないから，この場合も包含するように system の公理系を作ろうとするならば，modular より更に弱いものを考えねばならない。その一つが次の公理である。

Axiom P. $a \leqq b$ ならば a と b が compatible である。すなわち，a, b から meet と orthocomplementation によつて生成される τ の sublattice が Boolean sublattice になる。a と b が compatible という条件は次の等式でも表わされる。$a \cup (a^\perp \cap b) = b \cup (b^\perp \cap a)$. このとき $a \leftrightarrow b$ とかく。ところでこの公理は τ が orthomodular であることと同値になることが示されるから，これは modular より弱い。

以上の4つの公理O. T. C. P. をみたす system τ を generalized system of propositions という。束論的にいえば，τ は complete な orthomodular lattice である。

最後に次の公理を加える。

<u>Axiom A.</u>　τ は atomic であり，さらに covering propertyをもつ。

atomic を仮定することについては多少問題があるが，Piron はこれを含めた5つの公理 O. T. C. P. A. をみたす system τ を system of propositions とよんだ。束論的にいえば complete な orthomodular, atomic lattice with covering property である。covering property は modular より弱く，Hilbert 空間の closed subspace 全体の作る束は，無限次元のときでも Axiom A をみたしているので，atomic の場合ではこの τ の構造は十分一般的である。なお，atomic と orthomodular から relatively atomic も出る。

Piron はこのような τ が適当な条件のもとで Hilbert 空間の closed subspace の作る束で表現されることを示し，量子論の Hilbert 空間との結びつきを正当化する一つの方法を示した。その内容は〔28〕の Appendixに詳述してあるが，大体次の三段階に分れる。(1) projective geometry への embedding (2) 既約分解 (3) ベクトル空間による表現。（さらに Piron は本文の終りで state を τ 上で定義された確率測度の形で定義し，τ が Hilbert 空間を用いて表現された場合の state の形を定める問題について述べている。）

以下では，上記(1), (2), (3)を主体とする問題を束論的興味から改良，補充して述べてみよう。簡単のために orthocomplemented, relatively atomice with covering property を以後 OAC－束と呼ぶことにする。system of propositions は complete, orthomodular な OAC－束であり，Hilbert space $\mathfrak{H}$ の closed subspace 全体の作る束 L($\mathfrak{H}$) は，さらに irreducible な例である。束論的にみて特筆すべきことは，以下§5まで orthomodular の条件が殆ど必要ないことである。

§2. OAC－束における modular pair

<u>補題</u>　L を OAC－束とし，p, q $\in$ L を atomとする。$p \leqq a \cup q$なら

ば $p \leqq r \cup q, r \leqq a$ なる atom r が存在する。これはさらに q が finite 元であるときも成立する。

この補題は covering property とその dual な性質とによつて証明される。次に

<u>定 理2.1</u>　L を OAC－束とする。

(i)　L の 0 でない二元 a, b が $(a, b)M^*$ であるための必十条件は，$p \leqq a \cup b$ なる atom p に対して二つの atom q, r で $p \leqq q \cup r$, $q \leqq a$, $r \leqq b$ なるものが存在することである。よつて $(a, b)M^*$ と $(b, a)M^*$ は同値である。

(ii)　L は M－symmetric である $(\because (a, b)M \Leftrightarrow (b^{\perp}, a^{\perp})M^*)$

<u>系</u>　OAC－束が orthomodular になるための必十条件は，任意の 0 でない元 a をとるときすべての atom p に対して二つの atom q, r で $p \leqq q \cup r$, $q \leqq a$, $r \leqq a^{\perp}$ なるものが存在することである。

<u>注 意</u>　定理2.1の(ii)は orthocomplemented, relatively atomic lattice では covering property と M－symmetric が同値であることを示すが，これは geometric lattice の場合，すなわち upper-continuous, relatively atomic lattice でも同じことが成立つことと関連して重要な意味をもつ。

<u>定 理2.2</u>　OAC－束 L の finite な元 a に対しては，$(a, b)M$, $(b, a)M$, $(a, b)M^*$, $(b, a)M^*$ がつねに成立つ。よつて finite な元全体は L の modular sublattice を作る。

<u>注 意</u>　この定理より次のことがいえている。

a または $a^{\perp}$ が finite $\Longrightarrow$ すべての $b \in L$ に対して $(a, b)M$。

しかるに $L = L(\mathfrak{H})$ (Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ の closed subspace の束)のときは逆も成立つ([11]，Theorem 14)。

ところで L が finite (すなわち 1 が finite 元)のときは continuous であることも容易にわかるから，

<u>定 理2.3</u>　OAC－束 L が finite ならば continuous, atomic, complemented, modular lattice である。よつて次に述べる projective geometry の一種になる。

注意　OAC－束 L の finite 元 a をとれば，sublattice $L(0, a)$ は $x \longrightarrow x^{\perp} \cap a$ によつて orthocomplemented である。

注意　定理2．1，2．2，2．3 は次のような束 L でも成立つ。L とその dual がともに relatively atomic で covering property をもつ。

参考文献〔26〕。（Piron〔28〕に出ている結果は定理2．3だけである。）

§3. OAC－束と projective geometry

定義　点の集合 Ω において，次の（1），（2）をみたす subset（二点以上を含む）として直線が定義されているとき，Ω を projective space という。

（1）　p，q を異なる二点とすれば，p, q を含む直線がただ一つ存在する。これを直線 pq という。

（2）　p，q，r を同一直線に含まれない三点とする。直線 pq 上に点 s，直線 qr 上に点 t をとるとき（$s \neq t$），直線 pr と直線 st は共通点をもつ。

さらに次の（3）をみたすとき，Ω は irreducible であるという。

（3）　直線は少くとも三点を含む。

projective space Ω の subset S が次の性質をもつとき，linear であるという。

$p, q \in S$ ならば直線 pq は S に含まれる。

空集合および一点集合は linear とする。

定理3．1　Ω が projective space であるとき，Ω の linear subset 全体 $L(\Omega)$ は包含関係を順序として，upper-continuous，atomic，complemented，modular lattice を作る。これを Ω の上の（generalized）projective geometry とよぶ。Ω が irreducible ならば $L(\Omega)$ も irreducible である。

注意　（i）この定理で $L(\Omega)$ が modular になることが重要であるが，これは Ω の性質（2）による。

（ii）Ω は irreducible な subspace に分割され，これにしたがつて $L(\Omega)$ も irreducible な projective geometry の直和に分解される。

定理3．2　（i）0 をもつ modular な束の atom 全体を Ω とし，p，$q \in \Omega$ に対し $\{r \in \Omega\ ;\ r \leqq p \cup q\}$ を直線 pq と定義すれば，Ω は

projective space である。

(ii) 束 L が upper-continuous, atomic, complemented, modular ならば，L の atom 全体から成る projective space Ω の上の projective geometry $L(\Omega)$ は L と isomorph である。

(iii) L がさらに irreducible ならば Ω も irreducible である。

この定理と定理2．2とにより，

定 理3．3 OAC－束 L の atom 全体 Ω は projective space を作り，L から projective geometry $L(\Omega)$ の中への 1：1 な canonical injection α が存在する（$\alpha(a)=\{p\in\Omega\ ;\ p\leqq a\}$）ここで α は次の性質をもつ。(1) $a\leqq b\Rightarrow\alpha(a)\leqq\alpha(b)$．
(2) $\alpha(\bigcap_\beta a_\beta)=\bigcap_\beta\alpha(a_\beta)$． (3) a または $a^\perp$ が finite．のときは $\alpha(a\cup b)=\alpha(a)\cup\alpha(b)$．

注 意 定理2．1の(i)は次のことを意味している。

$$(a,\ b)M^*\Leftrightarrow\alpha(a\cup b)=\alpha(a)\cup\alpha(b)$$

定 義 定理3．3の $L(\Omega)$ を OAC－束 L の modular extension という。$L=L(\mathfrak{h})$ のときは，その modular extension は $\mathfrak{h}$ の subspace（closed と限らない）全体の作る束と一致する。

参考文献 projective space については，例えば〔21〕，Kap. III.

§4. 既約分解

0をもつ束の二元 a，b に対し，$a\cup x=b\cup x$，$a\cap x=b\cap x=0$ なる元 x が存在するとき a と b は perspective であるといい，$a\sim b$ とかく。

定 理4．1 OAC－束 L において

(i) 二つの異なる atom p，q が perspective であるための必十条件は p　q が第三の atom を含むことである。

(ii) p，q，r が atom で $p\sim q$，$q\sim r$ ならば $p\sim r$． よつて atom 全体は perspectivity によつて類別される。

補 題 OAC－束において，p，q を異なる atom とすれば $(p\cup q)\cap q^\perp$ は atom である。よつて二つの atom が perspective でなければ orthogonal である。

この補題と§0の(V)の定理とにより，

補 題　complete な OAC－束 L において atom を上のように類別し，各類の atom の join を z_α とすれば，(i) $\bigcup_\alpha z_\alpha = 1$．(ii) $\alpha \neq \beta$ のとき $z_\alpha \perp z_\beta$．(iii) z_α は中心元である。

定 理4．2　complete な OAC－束 L は irreducible, complete な OAC－束 $L(0, z_\alpha)$ の直和に分解される。すなわち各元 $a \in L$ は $a = \bigcup_\alpha a_\alpha$, $a_\alpha \leqq z_\alpha$ として unique に表わされる。

系　complete な OAC－束 L が irreducible であるための必十条件は任意の二つの atom が perspective すなわちその join が第三の atom を含むことである。よつて L が irreducible ならば，その modular extension も irreducible である。

参考文献　〔23〕，〔19〕。

§5. vector space による表現

定 理5．1　field K (commutative と限らない)の上の vector space $\mathcal{V}$ をとれば，$\mathcal{V}$ の subspace 全体 $L(\mathcal{V})$ は包含関係を順序として irreducible な projective geometry すなわち upper-continuous, atomic complemented, modular lattice を作る。逆に irreducible な projective geometry は次元が3以上であれば，ある field K 上のある vector space $\mathcal{V}$ の subspace 全体の作る束 $L(\mathcal{V})$ と isomorph である。(〔5〕, Part 3, Chap.Ⅵ または〔1〕, Chap.Ⅷ)。

定 義　field K が involutive な anti-automorphism * をもち(以下 *-operation という)，K 上の vector space $\mathcal{V}$ が hermitian form $f(x, y)$ をもつとする ($f : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$, f は sesquilinear, $f(y, x) = f(x, y)^*$, $f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$)。$\mathcal{V}$ の subset $\mathcal{M}$ に対し，$\mathcal{M}^f = \{x \in \mathcal{V} ; f(x, y) = 0 \text{ for all } y \in \mathcal{M}\}$ とおき $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{ff}$ となる subspace $\mathcal{M}$ を f－closed subspace という。その全体を $L_f(\mathcal{V})$ とかく。

定 理5．2　(i) $L_f(\mathcal{V})$ は包含関係を順序として irreducible, complete な OAC－束を作る。ここで orthocomplementation は $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^f$

で与えられる。

（ii） $L_f(\mathcal{V})$ の modular extention は $L(\mathcal{V})$ である。特に $\mathcal{V}$ が有限次元ならば $L_f(\mathcal{V}) = L(\mathcal{V})$.

さて（i）の逆の問題（ OAC－束の表現）を考えるために，

補 題　field K 上の有限次元（3次元以上） vector space $\mathcal{V}$ において，もし $L(\mathcal{V})$ が orthocomplemented であるならば，K は *-operation をもち，$\mathcal{V}$ における hermitian form f が存在して，f によつてこの orthocomplementation が与えられる。

この * と f は次の意味で unique である。（*，f）と（$\bar{*}$，$\bar{f}$）とが同じ orthocomplementation を与えるならば，$\gamma \in K\ (\gamma \neq 0)$ が存在して $f(x, y) \equiv \bar{f}(x, y)\gamma$，またすべての $\lambda \in K$ に対し $\lambda^* = \gamma^{-1}\lambda^{\bar{*}}\gamma$。（〔3〕または〔1〕，Chap IV 参照。）

定 理5．3　irreducible, complete な OAC－束 L の次元が3以上であるとき，*-operation をもつ field K 上の vector space $\mathcal{V}$ とその上の hermitian form f が存在して L は $L_f(\mathcal{V})$ と isomorph である。

証明の要旨　L が irreducible で次元が3以上であるから，その modular extension $L(\Omega)$ も同様である。定理5．1によつて，ある field K 上の vector space $\mathcal{V}$ があつて，$L(\Omega)$ から $L(\mathcal{V})$ の上への isomorphism φ が存在する。有限の部分では $\alpha : L \rightarrow L(\Omega)$ は isomorphism であること（定理3．3）と上の補題とを利用して，K に *-operation を与え，$\mathcal{V}$ 上に hermitian from f を作ることが出来る。（まず3次元 subspace を固定して，ここで *と f を定め，その extention になるように f を定義する。）ここでさらに $\varphi(\alpha(L)) = L_f(\mathcal{V})$ となることが証明される。（〔28〕参照。）

これで OAC－束の表現論は出来上つたが，さらに orthomodular の場合について，

定理5．4　$\mathcal{V}$ が $f(x, y)$ を inner product として pre-Hilbert space であるとき，$\mathcal{V}$ が complete（すなわち Hilbert space）であるための必十条件は，$L_f(\mathcal{V})$ が orthomodularであることである。

定理5．3と5．4を用いて

定理5．5　irreducible, complete, orthomodular な OAC－

束 L の次元が3以上であるとする。定理5．3を適用したとき，もし field K が real, complex, quaternion のいずれかの fieldである（＊は通常の conjugate）ならば，L は Hilbert space の closed subspace 全体の作る束と isomorph である。

注　意　　重要なのは定理5．4の十分性であるが，Piron が〔28〕，Appendix の最後に書いている証明には誤りがあり，完全な証明は荒木氏によつて与えられた。ここでは，雨宮氏による少し簡単な証明の筋道を述べておく。

（i） $L_f(\mathcal{V})$ が orthomodular なることから，$\mathcal{M}$ が f-closed subspace ならば $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^f)M^*$ が成立ち，これより $\mathcal{V} = \mathcal{M} + \mathcal{M}^f$ である（定理2．1（i）参照）。

（ii） $\mathcal{V}$ の completion を $\mathfrak{H}$ とする。$\mathfrak{H}$ の closed subspace $\mathfrak{H}_1$ の codimension が有限ならば $\mathcal{V} \cap \mathfrak{H}_1$ は $\mathfrak{H}_1$ で稠密である。

（iii） a, b $\in \mathfrak{H}$ が $a \perp b$ であるとき，（ii）より $\mathcal{V}$ の元の列 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ で次の性質をもつものがとれる。(1) すべての n, m に対して $u_n \perp v_m$, $u_n \perp b$, $a \perp v_n$. (2) $u_n \to a$, $v_n \to b$.（u_1, v_1, u_2, v_2 の順に inductionによつて作る。）

（iv） 任意の $\mathfrak{H}$ の元 a に対し，$\mathcal{V}$ の元 w で $a \perp w - a$ となるものがとれる。$w - a = b$ とおき（iii）によつて $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ をとる。$\mathcal{M} = \{v_1, v_2, \cdots\}^f$ とおき，$\mathfrak{H}$ において $\overline{\mathcal{M}}$ への projection を P とする。$v_n \perp \overline{\mathcal{M}}$ より $b \perp \overline{\mathcal{M}}$。
また $u_n \in \mathcal{M}$ より $a \in \overline{\mathcal{M}}$。よつて $Pw = a$。一方，（i）より $w = u + v$, $u \in \mathcal{M}$, $u \in \mathcal{M}^f$ とかける。このとき $v \perp \overline{\mathcal{M}}$ より $Pw = u$。従つて $a = u \in \mathcal{V}$。
結局 $\mathfrak{H} = \mathcal{V}$ が成立ち，$\mathcal{V}$ は complete である。

Part II

ここでは generalized system of propositions（Part I，§1）すなわち atomic を仮定しない complete orthomodular lattice について調べてみる。Part I でみたように，atomic の場合は covering property が大きな役割を果して orthomodular は殆ど用いなかつた。しかし，non-atomic の場合は orthomodular の役割は重要である。また covering property は

atomic でないと意味がないことから，これに代るものとして定理2．1の後の注意により，M－symmetric の性質が考えられる。しかし，M－symmetric を活用した議論はまだあまり進んでいない。

§1. orthomodular lattice における commutativity

ここでは束 L は orthomodular とする。

定理1．1　L において，4つの元 a，b，$a^{\perp}$，$b^{\perp}$ の中から3つをとつて作つた12種の D と12種の D^* 計24種の関係式はすべて互に同値である。これはまた Part I の§1で述べた $a \leftrightarrow b$（compatible）とも同値である。

束論では $a \leftrightarrow b$ のとき a と b は commutative であるといい，family$\{a_\alpha\}$ はその中のどの二元も互に commutative であるとき，commutative family という。

定理1．2　（i）すべての α について $a_\alpha \leftrightarrow b$ ならば，$\bigcup_\alpha a_\alpha \leftrightarrow b$，$\bigcap_\alpha a_\alpha \leftrightarrow b$ で，

$$b \cap (\bigcup_\alpha a_\alpha) = \bigcup_\alpha (b \cap a_\alpha),\quad b \cup (\bigcap_\alpha a_\alpha) = \bigcap_\alpha (b \cup a_\alpha)$$

が成立つ。（$\bigcup_\alpha a_\alpha$，$\bigcap_\alpha a_\alpha$ が存在するとき。）

（ii）$a \leftrightarrow b$，$a \leftrightarrow c$ のとき，三元の a，b，c についての D および D^* はすべて成立する。

定理1．3　L の元 z が中心元であるための必十条件は z がすべての $a \in L$ と commutative であることである。

系　L が irreducible なるための必十条件は，すべての元と commutative になる元は 0，1 以外に存在しないことである。

注意　$a \perp b$ なるための必十条件は $a \cap b = 0$ かつ $a \leftrightarrow b$ である。よつて orthogonal family は commutative family である。（atom の family については逆も成立つ。）

参考文献　〔28〕，Appendix；〔23〕。

§2. von Neumann algebra と von Neumann system

complete な orthomodular lattice の例としては，一つの von Neumann algebra に属する projection 全体の作る束が代表的なものである。これを一般化して束論的に作る方法を Piron 〔29〕が示した。ここではその方法について述べる。

定 義　$\mathfrak{H}$ を Hilbert space, その上の bounded operator 全体の作る Banach *-algebra を $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ とする。$\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ の subset に対しその commutant を $\mathfrak{M}'$ とする。すなわち，

$$\mathfrak{M}' = \{ B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \ ; \ AB = BA \ \text{for every} \ A \in \mathfrak{M} \}$$

sub *-algebra $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$ であるとき von Neumann algebra という。$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^*$ のとき，$\mathfrak{M}''$ は $\mathfrak{M}$ から生成される von Neumann algebra である。

定 義　L を orthomodualr lattice とする。L の subset に対しその commutant を S^0 とする。すなわち，

$$S^0 = \{ b \in L \ ; \ a \leftrightarrow b \ \text{for every} \ a \in S \}$$

定理1．2より，S^0 は L の sublattice であり，定理1．3より L の center を含む。L が complete ならば S も complete である。$T^{00} = T$ のとき，T を L の c-closed sublattice という。S^{00} は Sから生成される c-closed sublatice である。

定 理2．1　L が orthomodular lattice, T がその c-closed sublattice のとき，

(i)　T は orthomodular である。

(ii)　T の center は $T \cap T^{\circ}$ である。

定 義　L が complete, orthomodular な OAC－束で，T がその c-closed sublattice のとき，pair (T, L) を von Neumann system という(Piron). (T は atomic と限らないが，covering property の代りに M-symmetric が成立つのではないかと思われる。)

Hilbert space $\mathfrak{H}$ の closed subspace の作る orthomodular lattice L($\mathfrak{H}$) で二元が commutative であることと，対応する二つの projection が $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ で commutative であることは同値であることを用いて，

定 理2．2　Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上の projection 全体 P($\mathfrak{H}$)

は $L(\mathfrak{h})$ と isomorph な orthomodular 束を作るが，その subset $\mathfrak{M}$ については $\mathfrak{M}^{\circ\circ} = \mathfrak{M}'' \cap P(\mathfrak{h})$。よつて $\mathfrak{A}$ が von Neumann algebra であるとき $(\mathfrak{A} \cap P(\mathfrak{h}), P(\mathfrak{h}))$ は von Neumann system である。

Piron〔29〕では von Neumann system の構造について考察を進めているが，いくつかの結果を列挙するに止まつて，定理といえる程のものは出ていない。ここではより具体的な $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}(\mathfrak{h})$ について，これまで知られている主要結果を次にのべる。

§3. von Neumann algebra の projection lattice における同次元性

ここにのべることは $\mathfrak{A}$ が AW^*-algebra の場合にも拡張出来る。von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ に属する projection 全体は，$PQ = QP = P$ のとき $P \leq Q$ と定義することにより，complete, orthomodular lattice を作る。以下これを L とする。

<u>定義</u>　P, Q　L に対し $P = W^*W$, $Q = WW^*$ なる $W \in \mathfrak{A}$ が存在するとき $P \overset{*}{\sim} Q$ とかく。$P \overset{*}{\sim} P_1 < Q$ のとき $P \overset{*}{<} Q$ とかく。

<u>補題</u>　complete, orthomodular lattice においてその center は complete sublattice である。よつて各元 a に対しそれを含む最小の central element が存在するから，これを a の central envelope といい，$e(a)$ とかく。

<u>定理3.1</u>　L において $P \overset{*}{\sim} Q$ のとき，$P\mathfrak{A}$ と $Q\mathfrak{A}$ は right $\mathfrak{A}$-module として isomorph であり，$L(O, P)$ と $L(O, Q)$ は orthocomplemented lattice として isomorph である。また $e(P) = e(Q)$ である。

以下“$\overset{*}{\sim}$”を同次元性として次元論が展開されるが，主な定理を一部あげれば，

<u>定理3.2</u>　$P \overset{*}{\precsim} Q$, $Q \overset{*}{\precsim} P$ ならば $P \overset{*}{\sim} Q$

<u>定理3.3</u>　任意の $P, Q \in L$ に対し

$$P - P \cap Q \overset{*}{\sim} P \cup Q - Q$$

<u>定理3.4</u>　任意の $P, Q \in L$ に対し $P = P_1 + P_2$, $Q = Q_1 + Q_2$ $(P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in L)$ なる分解が存在して

$$P_1 \overset{*}{\sim} Q_1, \quad e(P_2) \cap e(Q_2) = O$$

定理3.5　$\{P_\alpha\}$, $\{Q_\alpha\}$ がそれぞれ orthogonal family で，すべての α に対して $P_\alpha \overset{*}{\sim} Q_\alpha$ ならば $\cup_\alpha P_\alpha \overset{*}{\sim} \cup_\alpha Q_\alpha$

定理3.6　L が "$\overset{*}{\sim}$" に関して finite, すなわち $P \overset{*}{\sim} I$ ならば $P = I$ であるとき，L は continuous, complemented, modular lattice すなわち continuous geometry である。

注意　$\mathfrak{A}$ を一般化して Baer*-ring とした場合，一般に定理3.3以下は証明できないが，もし定理3.3が成立つものと仮定すれば，それ以下次元論に関する定理はすべて成立つことがわかつている。

参考文献　〔13〕,〔24〕,〔25〕および第三回 Functional Analysis Symposium 報告（1965), 1-19。

後記　von Neumann system (T, L) の束 T において，何らかの方法で "$\overset{*}{\sim}$" に相当するものを定義して，上に示したような次元論の定理を導くことは興味ある問題で，Piron〔29〕の後半にも若干その意図が表われている。この問題は束が modular のとき，すなわち complete, orthocomplemented, modular lattice については解決ずみで，perspective をもとにして同次元性を与え，結局次の Kaplansky の定理(〔14〕) が証明されて continuous geometry に帰着される。

定理　complete, orthocomplemented, modular lattice は continuous geometry である。

modular でない complete, orthomodular lattice における次元論の研究は，公理的方法によるものは〔16〕にはじまり，〔25〕の内容にも包含されているが，少し具体的に perspective 等をもとにして同次元性を作る方向の研究は Holland, MacLauren等によつて進められている（〔10〕,〔20〕)。

一方，表現論としては Baer*-semigroup によるものが，Foulis〔6〕によつて示されているが，modular の場合に対応して考えると，さらに Baer *-ring 位で表現することが望まれる。

文　献

(1) R. Baer, Linear algebra and projective geometry, New York, 1952.

(2) G. Birkhoff, Lattice theory, New York, 1948.

(3) G. Birkhoff and J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, Ann. of Math., 37 (1936), 823 - 843.

(4) J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Paris, 1957.

(5) M. L. Dubreil-Jacotin, L. Leisieur and R. Croisot, Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques, Paris, 1953.

(6) D. J. Foulis, Baer *-semigroups, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), 648-654.

(7) ____________, Conditions for the modularlity of an orthomodular lattices, Pacific J. Math., 11 (1961), 889-895.

(8) ____________, A note on orthomodular lattices, Portugal Math., 21 (1962), 65-72.

(9) S. S. Holland, Jr., A Radon-Nikodym theorem in dimension lattices, Trans. Amer. Math. Soc., 108 (1963), 66-87.

(10) ______________ , Distributivity and perspectivity in orthomodular lattices, ibid., 112 (1964), 330-343.

(11) M. F. Janowitz, Quantifiers and orthomodular lattices, Pacific J. Math., 13 (1963), 1241-1249.

(12) F. Kamber, Zweiwertige Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf orthokomplementären Verbanden, Math. Ann., 158 (1965), 158-196.

(13) I. Kaplansky, Projections in Banach algebras, Ann. of Math., 53 (1951), 235-249.

(14) ______________ , Any orthocomplemented complete modular lattice is a continuous geometry, Ann. of Math., 61 (1955), 524-541.

(15) ______________ , Rings of operators, Univ. of Chicago, 1955.

(16) L. H. Loomis, The lattice theoretic background of the dimension theory of oparator algebras, Memoirs of Amer. Math. Soc., No. 18, 1955.

(17) G. W. Mackey, On infinite dimensional linear spaces,

Trans. Amer. Math. Soc., 57 (1945), 155-207.

(18) __________ , Quantum mechanics and Hilbert space, Amer. Math. Monthly, 64 (1957), 45-57.

(19) M. D. MacLaren, Atomic orthocomplemented lattices, Pacific J. Math., 14 (1964), 597-612.

(20) __________ , Nearly modular orthocomplemented lattices, Trans. Amer. Math. Soc., 114(1965), 401-416.

(21) F. Maeda, Kontinuerliche Geometrien, Berlin, 1958.

(22) __________ , Decomposition of general lattices into direct summunds of types I, II and J. Sci. Hiroshima Univ., 23 (1959), 151-170.

(23) __________ , Theory of symmetric lattices (Lecture note), 1965.

(24) S. Maeda, On the lattice of projections of a Bare *-ring, J. Sci. Hiroshima Univ., 22(1958), 75-88.

(25) __________ , Dimension theory on relatively semi-orthocomplemented complete lattices, ibid., 25(1961), 369-404.

(26) __________ , On the symmetry of the modular relation in atomic lattices, ibid., 29 (1965)(to appear).

(27) M. Nakamura, The permutability in a certain

orthocomplemented lattice, Kodai Math. Sem. Reports, 9 (1957), 158-160.

(28) C. Piron, Axiomatique quantique, Helv. Phys. Acta, 37 (1964), 439-468.

(29) ________ , Les systémes de von Neumann, manuscript.

(30) U. Sasaki, Orthocomplemented lattices, satisfying the exchange axiom, J. Sci. Hiroshima Univ., 17 (1954), 293-302.