数理解析研究所講究録
10巻 1966年 46-55

太陽の自転の流体力学的研究

京大工. 桜 井 健 郎

太陽の自転は黒点などの太陽面現象と，光球の東西の縁でのドップラー効果によって観測され，赤道附近での回転角速度が極附近での回転角速度よりも２０%程速い事が明らかにされている。Newton によると，黒点の観測を基とした角速度分布は次のような経験式にまとめられる。(1)

$$\omega = 14.38^\circ - 2.7^\circ \sin^2 \tilde{\theta} \quad \text{per day} \tag{1}$$

ω ： 角速度， $\tilde{\theta}$ ： 緯 度

太陽の構造論によると，大陽の内部は中心附近のごく小さい領域と光球表面の下，太陽半径の２０%の厚さを持つ対流層とを除けば熱的に安定である。そこでの回転角速度の不均一の緩和時間は（分子粘性を基にして評価でき）10^{11}年で，大陽の年齢（10^9年）に比べて充分に長い。(2)(3)

光球表面の粒状斑の観測から，対流層内の流れは乱流状態にある事が明らかにされている。(4) そこでの角速度の不均一の緩和時間は（渦粘性を基にして評価でき）10^7年で，太陽の年齢に比べて充分に短い。

上の事情により，次のような推論を下すことができる。即ち：太陽内部の安定領域は，現在，完全流体球のように廻転して居り，その廻転角速度分布は太陽系が誕生する前後の $10^7 \sim 10^8$ 年程度のごく短かい時間内の出来事に依存する。他方，対流層内の流れは球殻内部の粘性流体の流れで，現在，既に漸近状態に達している。そして安定領域内の流れと対流層内の流れとは互に（ボールベアリングを通して接続されているように）殆んど独立である。

所で，常識的に考えると，球殻内の粘性流体の廻転運動は（無視できる程ごく僅かな遠心力の影響を除けば）剛体的廻転に漸近するものと思われる。この予想は，しかし，太陽の自転の状態からほど遠い。それ故，太陽の自転の問題を解く為には上の常識を破る"何か"を導入しなければならない。この"何か"としてBiermann は現象論的立場に基づいて渦粘性の非等方性を指摘した。(5) この指摘はその後Kippenhahn によって更に詳しく調べられ，一応定性的には太陽の自転とよく似た結果が得られている。(6) しかし，（後で明らかにされる理由により）Kippenhahn の解析は太陽に適用できないので，上の指摘の定量的吟味は宿題として残されて来た。この宿題はごく最近筆者によって一応解決された。筆者は二種類の同様の解析を行なった。一つは，解法は簡単にな

るが，高次の近似で境界条件と基礎方程式が相互に無矛盾でなくなるような仮定を含み，他は第一の解析におけるそのような矛盾を取り除いたものである。ここには物理的に問題の所在を理解し易い第一の解析について述べる。第2の解析については後日，稿を改めて述べたい。

対流層は内部半径 r_i ，外半径 $r_e(=R_\odot)$ の球殻状領域で，内部の流れは完全に乱流状態である。平均流の基礎方程式はWasiutyński の（一般化された）混合距離の理論により[7]次のようになる。

$$\frac{du_r}{dt} = \frac{u_\theta^2 + u_\varphi^2}{r} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{R_r}{\rho}, \tag{2}$$

$$\frac{du_\theta}{dt} = \frac{u_\varphi^2 \cos\theta}{r\sin\theta} - \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{R_\theta}{\rho r}, \tag{3}$$

$$\frac{du_\varphi}{dt} = -\frac{u_\theta u_\varphi \cos\theta}{r\sin\theta} - \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{R_\varphi}{\rho r\sin\theta}, \tag{4}$$

$$u_r = \frac{1}{\rho r^2 \sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \tag{5}$$

但し (r, θ, φ)，$(u_r, u_\theta, u_\varphi)$，$\rho$，$p$，$\Phi$ 及び Ψ は，夫々球座標，速度，密度，圧力，重力のポテンシャルおよび流れの函数である。上の式で，R_r，R_θ および R_φ は渦粘性力で，マトリックス表示を用いて次のようになる。

$$(R_r, R_\theta, R_\varphi) = \left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdots), -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \cdots)\right)\begin{pmatrix} \tau_r^r & \tau_\theta^r & \tau_\varphi^r \\ \tau_r^\theta & \tau_\theta^\theta & \tau_\varphi^\theta \end{pmatrix}$$

$$+ \left(\frac{\tau_\theta^\theta + \tau_\varphi^\varphi}{r}, \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau_\varphi^\varphi, 0\right), \tag{6}$$

但し τ_r^r，…はReynolds 応力の成分で，次のように表わされる。

$$\tau_r^r = -2\eta\frac{\partial u_r}{\partial r}, \tag{7}$$

$$\tau_r^\theta = \frac{\tau_\theta^r}{r^2} = -\frac{\eta}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) + s\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - 2 s u_\theta\right\}, \tag{8}$$

$$\tau_r^\varphi = \frac{\tau_\varphi^r}{r^2\sin^2\theta} = \frac{-\eta}{r^2\sin^2\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\, u_\varphi) - 2 s\sin\theta\, u_\varphi\right\}, \tag{9}$$

$$\tau_\theta^\theta = -\frac{2S\eta}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(r u_\theta) + r u_r\right\}, \tag{10}$$

$$\tau_\theta^\varphi = \frac{\tau_\varphi^\theta}{\sin^2\theta} = \frac{-S\eta}{r^2\sin^2\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\, u_\varphi) - 2r\cos\theta\, u_\varphi\right\}, \tag{11}$$

$$\tau_\varphi^\varphi = \frac{-2S\eta}{r\sin\theta}(u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta), \tag{12}$$

$$\eta = \overline{\rho u_{r*}^2\,\Theta}, \quad S = \frac{\overline{\rho u_{\theta*}^2\,\Theta}}{\eta} = \frac{\overline{\rho u_{\varphi*}^2\,\Theta}}{\eta}, \tag{13}$$

上の式で，$(u_{r*}, u_{\theta*}, u_{\varphi*})$ は乱流変動速度，Θは流体粒子が混合距離を通過するのに要する時間に相当する。(13) 式の第二の等号は，水平方向の乱流状態は（水平面内で）等方的であるという仮定に基づく。上の式では，また，$\pi_{rr} = \rho\overline{u_{r*}^2}$，$\pi_{\theta\theta} = \rho r^2\overline{u_{\theta*}^2}$，$\pi_{\varphi\varphi} = \rho r^2\sin^2\theta\,\overline{u_{\varphi*}^2}$，即ち，乱流運動による圧力に相当する項を無視している。対流層における単位質量当りの平均熱エネルギーは $10^{13}\sim 10^{14}$ erg/gm であるが，単位質量当りの乱流変動の運動エネルギーは 10^{10} erg/gm であるから，この近似は充分に良い精度で成り立つ。最後に上の式により，渦粘性の非等方性は乱流運動の非等方性に関係している事がわかるが，後者は流体に働らく力（例えば重力）の非等方性，境界の形等から考えて自然な仮定であろう。

基礎方程式としては上の他に平均温度を支配する乱流エネルギーについての保存法則があるが，"混合距離の理論を平均速度と平均温度の両方を同時に含むような問題に適用すると，どちらか一方を実験と合わすように混合距離を定めると，他は実験とあまりよく合わない"という流体力学的な経験事実にもとづいて，ここでは乱流のエネルギー保存則は用いない。そして，その代りに対流層において良い近似で成り立つ断熱法則を使用する：

$$p \propto \rho^\gamma \qquad \gamma：比熱の比 . \tag{14}$$

安定領域内での分子粘性は対流層内の渦粘性に比べて充分に小さいから，境界面での辷り応力の連続の条件から次の条件を得る。

$$\tau_r^\theta = 0, \quad \tau_r^\varphi = 0 \quad : \quad r = r_i \text{ で}. \tag{15}$$

安定領域内の子午面内流れは非常に小さいので，境界面を横切る子午面内流れはない：

$$\Psi = 0 \ : \ r = r_i \quad で． \tag{16}$$

我々の解析においては，また，彩層，コロナでの稀薄な気体の存在は無視されるから，(15)(16)と全く同じ条件およびp=0 ($\rho=0$)の条件が光球表面 $r=r_e$ で成り立たねばならない：

$$p = 0 \ , \ \rho = 0 \ , \ \tau_r^{\theta} = 0 \ , \ \tau_r^{\varphi} = 0 \ , \ \Psi = 0 \ : r = r \ で， \tag{17}$$

以上の基礎方程式，境界条件はKippenhahn のものと全く同じものである。それらは物理的に考えて妥当と思われるのでそのまゝ借用した。

次に，我々は混合距離がスケール高さに等しい事；

$$\lambda = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{dr}} \tag{18}$$

および乱流速度（乱流変動速度の二乗平均に相当する）（$v_{r*}, v_{\theta*}, v_{\varphi*}$）が対流層を通じて一定であることを仮定する：

$$(v_{r*}, v_{\theta*}, v_{\varphi*}) = \text{constant} \tag{19}$$

これらの仮定は高さと共に急激に変化する渦粘性を出来るだけ簡単に，しかも実情に合うように表わす為にしたもので，仮定(18)は天文学で良く用いられる。また，これらは密度および渦粘性を一定と仮定したKippenhahn の解析の本質的改良になっている。

我々の問題は基礎方程式(2)－(5),(14)を境界条件(15)－(17)の下で解く事である。その際渦粘性力は仮定(18),(19)を考慮し，式(6)－(13)によって求められる。

ここでは，問題を簡単にする為に更に境界面 $r=r_i$ 上での角速度が一定である事を仮定しよう：

$$u_y = \omega r_i \sin\theta \ , \quad \omega \ : \ \text{constant} \ . \tag{20}$$

前に簡単に指適したように．この仮定の導入により我々の近似解法の第二近似に於ける方程式および境界条件の無矛盾性が成り立たなくなる。しかし，この仮定によって解析が著しく簡単になり，渦粘性の非等方性がdifferential rotationをもたらすのにどれ程有効であるか

を非常にはっきりと示す事が出来るし，更にまた，観測結果と良く合う結果も得られる。

太陽の構造論から対流層の厚さは太陽半径の２０％である事が結論されている。それ故，対流層の厚さを太陽半径で割ったものを小さいパラメータと考え，それを用いて物理量を展開する逐次近似法が可能になる。それを行なう前に基礎方程式を次のように無次元化しよう。

$$r = r_i(1+\varepsilon\tilde{r}), \quad \varepsilon = h_0/r_i, \quad h_0 = r_e - r_i \quad , \tag{21}$$

$$u_r = u_{r0}\tilde{u}_r, \qquad u_\theta = \frac{u_{r0}}{\varepsilon}\tilde{u}_\theta, \quad u_\varphi = u_{\varphi 0}\tilde{u}_\varphi, \tag{22}$$

$$\rho = \rho_0\tilde{\rho}, \qquad p = p_0\tilde{p}, \quad \Phi = \Phi_0\tilde{\Phi} \quad , \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left\{(1+\varepsilon\tilde{r})^2\tilde{u}_r\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial\tilde{r}} + (1+\varepsilon\tilde{r})\tilde{u}_\theta\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial\theta}\right\} \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta(1+\varepsilon\tilde{r})\tilde{u}_r\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\tilde{r}} + \sin\theta\,\tilde{u}_\theta\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}\right\} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left\{(1+\varepsilon\tilde{r})(\tilde{u}_\theta^2 + \vartheta_1^2\tilde{u}_\varphi^2)\right\} \\
&\quad - \frac{\varepsilon^2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\vartheta_1^2}{\varepsilon}\tilde{u}_\varphi^2\cos\theta - \tilde{u}_r\tilde{u}_\theta\sin\theta\right\} \\
&= -\vartheta_2\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left\{(1+\varepsilon\tilde{r})^2\left(\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{r}} + \vartheta_3\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{r}}\right)\right\} \\
&\quad - \frac{\varepsilon^2\vartheta_2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\left(\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta} + \vartheta_3\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\theta}\right)\right\} \\
&\quad + \vartheta_4\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left\{(1+\varepsilon\tilde{r})^2\frac{\tilde{R}_r}{\tilde{\rho}}\right\} + \frac{\vartheta_4}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\tilde{R}_\theta}{\tilde{\rho}}\right), \qquad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left\{(1+\varepsilon\tilde{r})\tilde{u}_r\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\tilde{r}} + \tilde{u}_\theta\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}\right\} \\
&\quad - \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\tilde{u}_r\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial\tilde{r}} + \frac{1}{1+\varepsilon\tilde{r}}\tilde{u}_\theta\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial\theta}\right\} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left\{\vartheta_1^2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tilde{u}_\varphi^2 - \varepsilon\tilde{u}_r\tilde{u}_\theta\right\}
\end{aligned}$$

$$+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{u}_\theta^2+\vartheta_1^2\tilde{u}_\varphi^2)$$

$$=\frac{\vartheta_4}{\varepsilon_1}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\frac{\tilde{R}_\theta}{\tilde{\rho}}\right)-\varepsilon\vartheta_4\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{R}_r}{\tilde{\rho}}\right), \tag{25}$$

$$(1+\varepsilon\tilde{r})\tilde{u}_r\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\tilde{r}}+\tilde{u}_\theta\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\theta}+\tilde{u}_\theta\tilde{u}_\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$+\varepsilon\tilde{u}_r\tilde{u}_\varphi=\frac{\vartheta_4}{\varepsilon}\frac{\tilde{R}_\varphi}{\tilde{\rho}\sin\theta}. \tag{26}$$

但し

$$\vartheta_1=\frac{h_0u_{\varphi0}}{r_iu_{r0}},\quad \vartheta_2=\frac{p_0}{\rho_0u_{r0}^2}\frac{h_0}{r_i},\quad \vartheta_3=\frac{\rho_0\Phi_0}{p_0},$$

$$\vartheta_4=\frac{h_0u_{r*0}}{r_iu_{r0}}, \tag{27}$$

$$\tilde{R}_r=\frac{h_0^2R_r}{\eta_0u_{r0}},\quad R_\theta=\frac{h_0^3R_\theta}{\eta_0r_i^2u_{r0}},\quad \tilde{R}_\varphi=\frac{h_0^2R_\varphi}{\eta_0r_iu_{\varphi0}},$$

$$\eta_0=\rho_0h_0u_{r*0}. \tag{28}$$

上の式で，無次元化された量には～を，無次元化に用いられる基準量には添字0をつけた。(24) 式は運動方程式のdiv，(25) 式は運動方程式のrot のφ－成分，(26) 式は運動方程式のφ－成分である。また，(28) の最後のηについての式は，我々の仮定(18) および(19) により渦粘性ηが $\rho\lambda u_{r*0}$ で表わされる事，そしてλはほゞ h_0 の程度の大きさである事による。

上式を解く為に，まず(26) 式において右辺（即ち，渦粘性力の項）が卓越するものとしよう。この事は ϑ_4/ε が1に比べて大きい事を意味するが，とりあえず ϑ_4/ε が10の程度，（εが0.1の程度である事を考えて）ϑ_4が1の程度としよう。観測事実により u_{r*0} は 10^4 cm/sec であるから，これと合わせる為には u_{r0}は 10^3 cm/sec でなければならない。そしてその値を用いて ϑ_1^2 を評価すると（観測事実により $u_{\varphi0}$ は 10^5 cm/sec であるから）10^2 の程度になり，(25) 式では，遠心力の項が卓越する事がわかる。これが対流層の廻転流れの特徴である。先にKippenhahn の解析が太陽に適用できない事を指摘したが，それは，彼がこの事情を考慮に入

れず，(25) 式においても渦粘性項が卓越するという暗黙の仮定を基にしてことは全然異なる逐次近似法を構成したからである。同様の評価をすると ϑ_2 は 10^6 になり，(25) 式において圧力分布に対する流れの影響が殆んどない事，即ち，圧力分布（従って密度分布）には通常の太陽構造論の結果を用い得る事が明らかになる。また上で ϑ_4 が1の程度と考えたが、ϑ_4 の値として10などの値を用いても上の結論に根本的変更はない。

上の評価に基づいて次のように仮定しよう：

$$\vartheta_1^2 \sim 0(\varepsilon^{-2}) \quad , \quad \vartheta_4 \sim 0(1) \quad , \quad \vartheta_2 \sim 0(\varepsilon^{-6}) \tag{29}$$

仮定(29)を用い，ε −展開によって，我々の問題を解く事は至極易しい。時間もなくなって来たし，ここには応用数学，流体力学の大家の方達が集まっておられるので，解法に関する部分は安心して省略し，計算結果について考える。

図1は太陽表面での角速度分布について計算結果と観測結果を比較したものである。図にみられるように $S=1.5$，$r_i = 0.875\,R_\odot$ の場合，緯度40°までは両者は非常に良く一致しており，緯度 90°における最大の相異は13%である。図2は，上と同じ場合における子午面内流れの速度分布を示す。太陽表面での流れは高緯度から低緯度に吹き下ろす流れであるが，これは，低緯度領域で（黒点の観測に基づく）Waldmeier の予想に一致する。先に対流層の厚さを太陽半径の20%と述べたのに，ここでは13%程度の厚さを用いているが，この相異は我々の仮定(20)の限界を示す。(20) をとり除いた第2の解析では上述の20%の厚さを用いても観測値とよく合う結果が得られる。以上，太陽のdifferential rotation は渦粘性の非等方性によって説明できる。

今後の問題は，渦粘性の非等方性自体の原因をはっきりと説明する事，磁場等によるdecayに対抗してdifferential rotation を支える"何か"をはっきりさせる事，更に太陽内部に突入して安定領域内の廻転状態を明らかにさせる事等であろう。

引　用　文　献

(1) C.W. Allen: Astrophysical Quantities, 2nd Ed., Univ. of London, The Athlone Press, 1963, p.p.179

(2) B. Strömgren: The Sun as a Star; The Sun, Edd. G.P. Kuiper, Univ. of Chicago Press, 1953, p.p. 36

(3) T.G. Cowling: Solar Electrodynamics; ibid., p.p.550

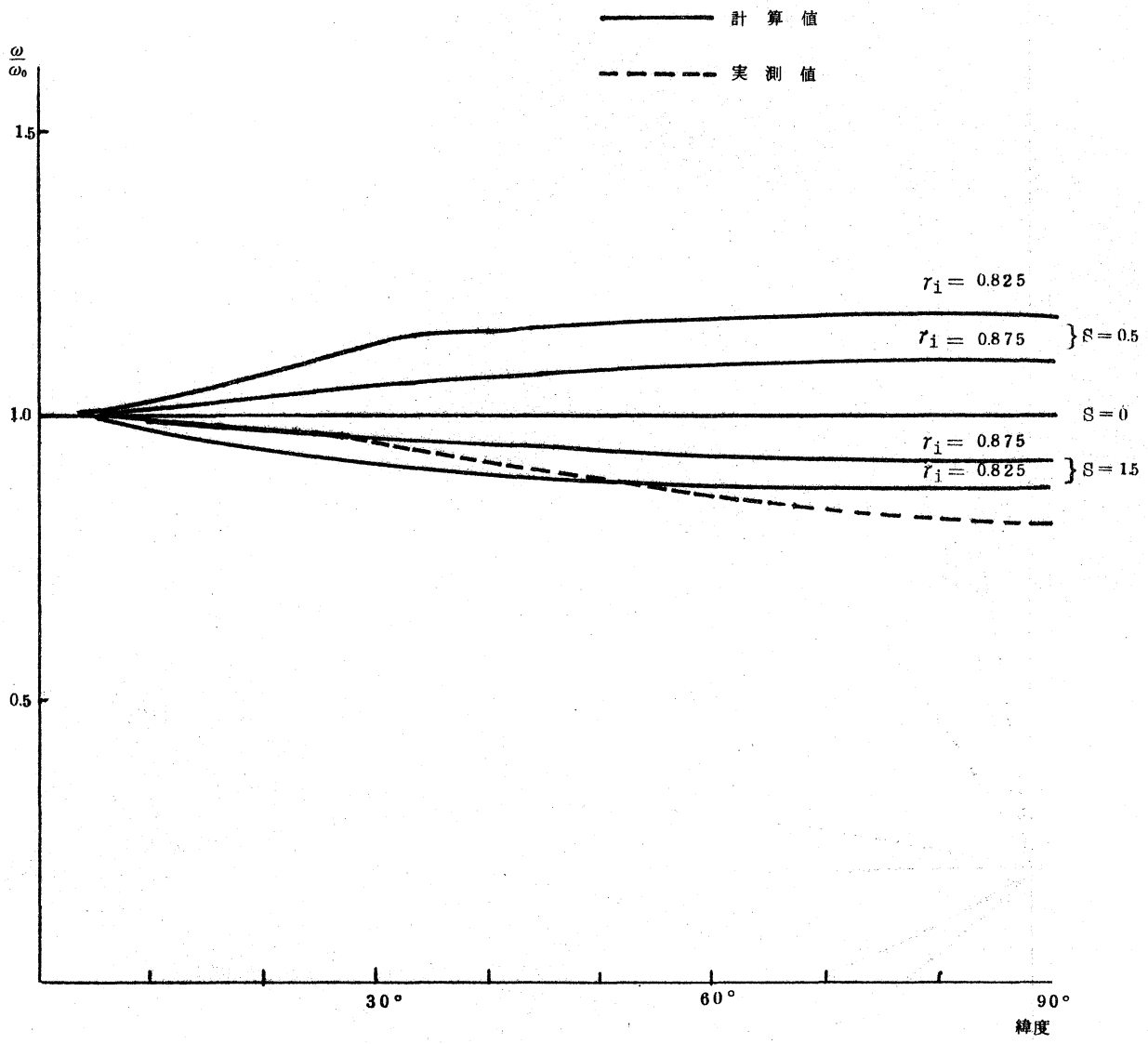

図1　計算値と実測値との比較

ω ：太陽表面での廻転角速度

ω_0 ：赤道面上のωの値

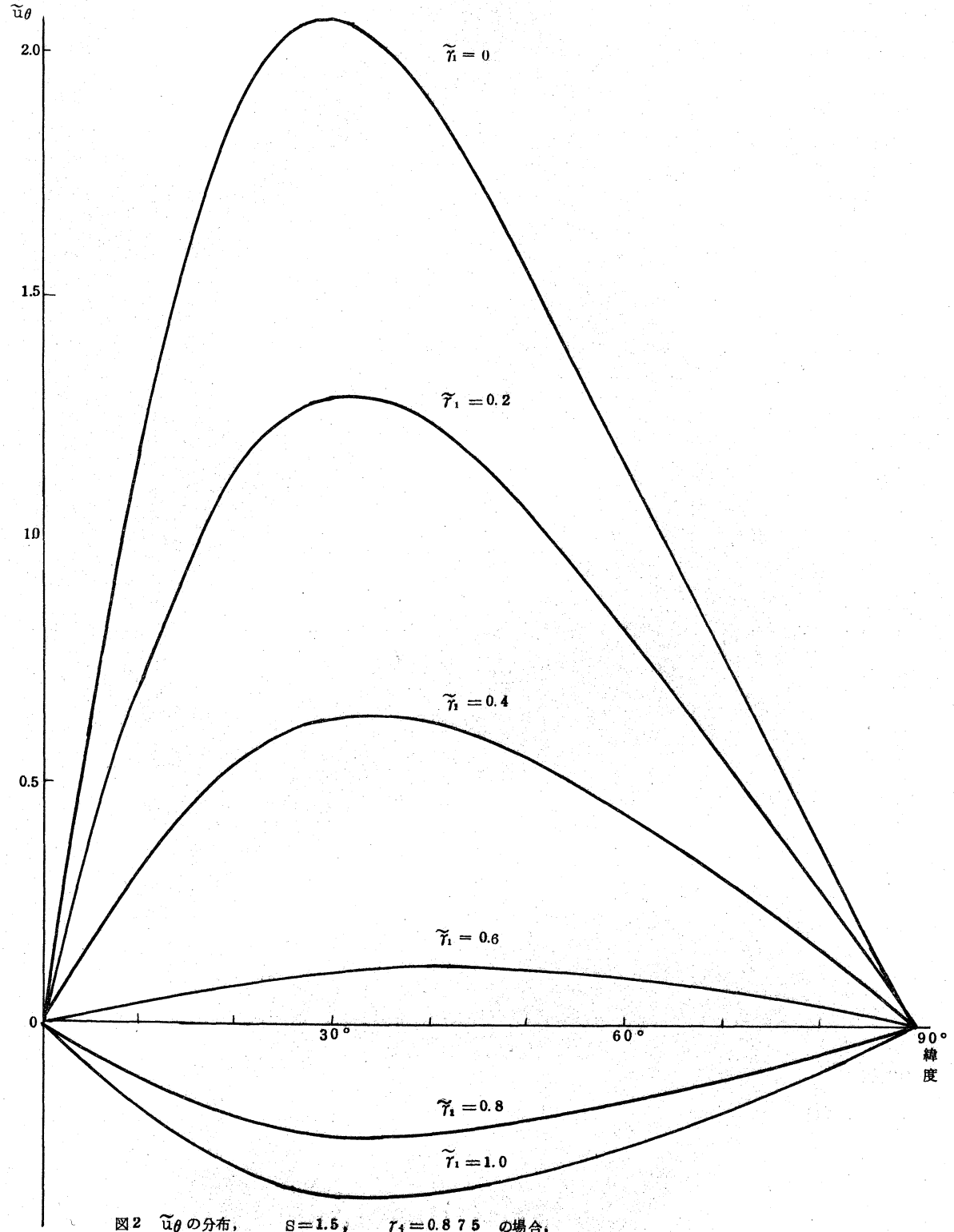

図2　$\tilde{u}_\theta$ の分布，　S＝1.5，　r_1＝0.875　の場合，

(4) C. de Jager: Structure and Dynamics of the Solar Atmo-
spere ; Encyclopedia of Physics, Edd. S. Flügge,
Vol. LII, Astrophysics III, The Solar System,
Springer V., 1959, p.p. 80

(5) L. Biermann, Zs. f. Astrophys., 28 (1951) p.p. 304

(6) R. Kippenhahn, Astrophys., J., 137 (1963) p.p.664

(7) J. Wasiutyński, Astrophysica Norvegica, Vol.4,
Oslo, 1964, p.p.26