

正弦波加速電流を受ける 電磁衝撃波管内の流れ

名古屋大工 保 原 充

電磁衝撃波管内のガスを正弦波電流による磁気圧を用いて加速する問題を一次元非定常流として取扱う。 $x=0$ に壁がある。断面積一定の半無限長管に、圧力 p_1 、密度 $\rho_1 = 1$ のガスを満し、このガスの左端に $+x$ の方向に正弦波電流 $I \propto \sin t$ によって生じた磁気圧 ($\propto I^2$) $p_m = \sin^2 t$ が加えられるものとする。ガスを完全導体とすると、磁場はガス中に滲込まず、ガスの背面をピストン圧 p_m で押す純流体力学の問題に還元される。この時初期の $p_1 > p_m$ なる間はガスは静止して居り、 $p_1 < p_m$ になると押されて右方に運動を始め、 $x=0$ にあったガスの左端 (Contact surface) は壁から離れ又運動ガスの領域には Shock が形成されるであろう。即ち、Euler 座標系 (t, x) で表される領域 $t \geq 0, x \geq 0$ 内には二種の不連続面があると予想されるが、Richtmyer⁽¹⁾ も指摘する如く、領域内に Contact surface があると Euler 系による数値計算の精度が著しく落ちる可能性がある。この様な問題で Lagrange 座標系 (t, ξ)

$$t = t, \quad d\xi = \rho(dx - v dt) \quad (1)$$

(v ; 速度) を用いると、Contact surface は常に左端のガス粒子に附随した座標 $\xi = 0$ で指定され、従って $t-\xi$ 面では contact surface が消去される。又運動中の各粒子の経路が判るのみならず、質量保存の関係が自動的に正確に満足されている利点がある。以上の理由で、ここでは Lagrange 表示で基礎方程式を記述し、之を Lax⁽²⁾ の差分法で積分する。先づ方程式を Lax の Conservation Law の形 ($\frac{\partial U_1(t, \xi)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(t, \xi)}{\partial \xi} = 0$.) に書き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial p v}{\partial \xi} = 0, \quad E \equiv \frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2} v^2, \quad (4)$$

(p は圧力, r は比熱の比)となる。之等を夫々次の差分に置換える。

$$\frac{U_i(t+\Delta t, \xi) - \frac{1}{2} \{U_i(t, \xi+\Delta\xi) + U_i(t, \xi-\Delta\xi)\}}{\Delta t} + \frac{F_i(t, \xi+\Delta\xi) - F_i(t, \xi-\Delta\xi)}{2 \Delta \xi} = 0 \quad (5)$$

(5)に依って時刻 t での各 ξ 点に於ける $U_i(t, \xi)$ を知れば, $U_i(t+\Delta t, \xi)$ を求める事が出来る。(5)をTaylor展開すれば判る様に(下式),

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial \xi} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\Delta \xi^2}{2 \Delta t} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + O(\Delta t^2, \Delta \xi^2) = 0 \quad (6)$$

差分式は高次の微小量を省略して考える時, 下線を引いた拡散項をもった式を解く事と同等になり, 之等の項はShock 近傍で強くきいて滑らかな解をもたらす。しかし一方では又解に誤差を附加することになるので, $\Delta t, \Delta \xi$ の選定には注意を要する。それにしてもこの函数滑化の性質及び $\xi=0$ で境界条件を指定出来る事は電子計算機を用いる場合に都合がよい。(2)(3)(4)を(5)の法で差分式し, 更に(1)を用いて積分すると p, ρ, v, x を t と ξ の函数として求める事が出来る。初期条件は $t=0$ で $p=p_1, \rho=1, v=0$ 。境界条件は $\xi=0$ で $p=\sin^2 t$ となる。密度 ρ と速度 v の境界条件はexplicit に指定されないで, (2), (3)について(5)を変形した差分式から,

$$v(t+\Delta t, 0) = v(t, 0) - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \{p(t, \Delta \xi) - p(t, 0)\} \quad (7)$$

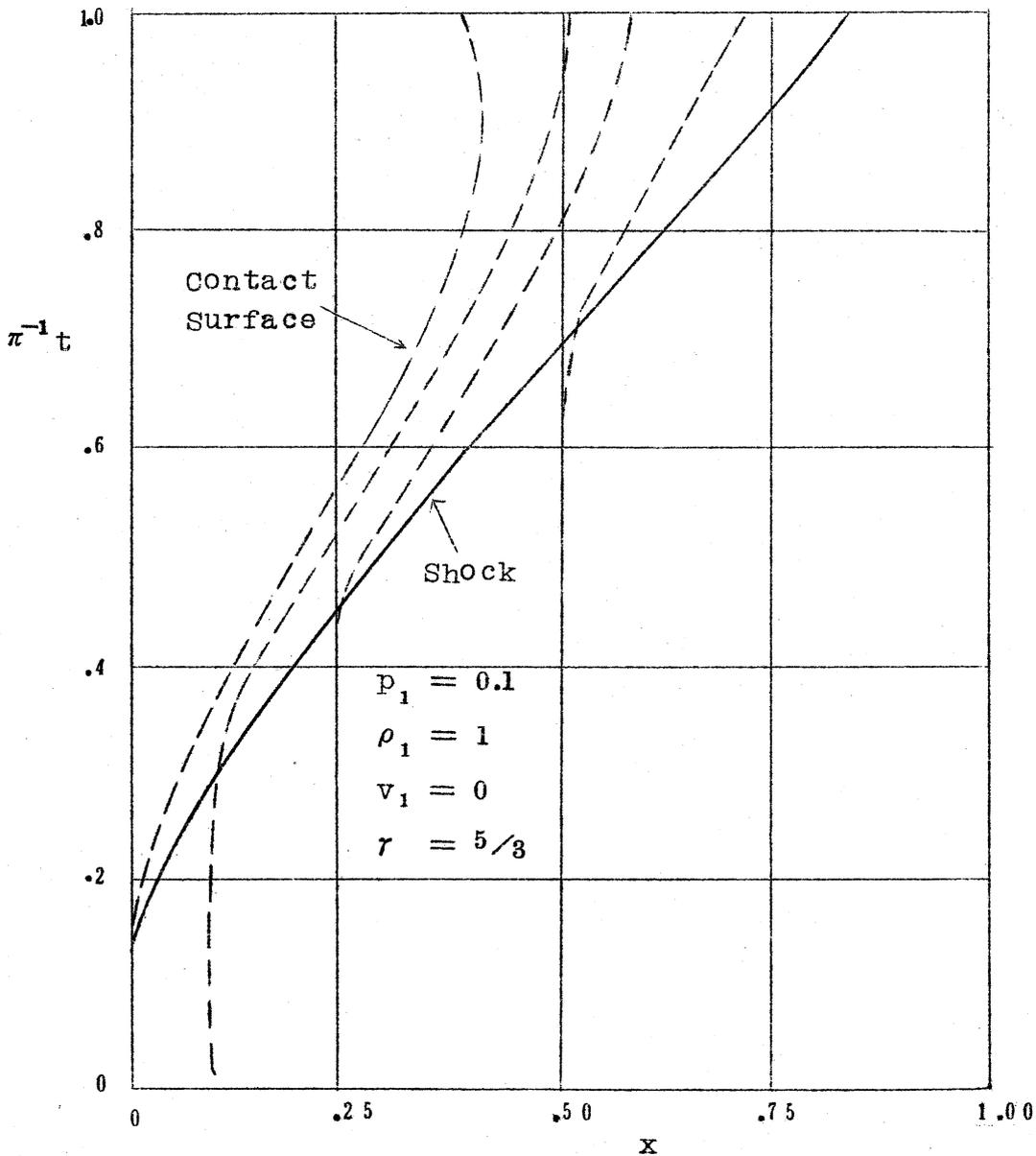
$$\frac{1}{\rho(t+\Delta t, 0)} = \frac{1}{\rho(t, 0)} + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \{v(t, \Delta \xi) - v(t, 0)\} \quad (8)$$

に依って与える。右辺は, 時刻 t での量がすべて求められているから判った量である。計算の実行に際しては, 安定条件として, 先づ Courant-Friedrichs-Lewy⁽¹⁾の条件:

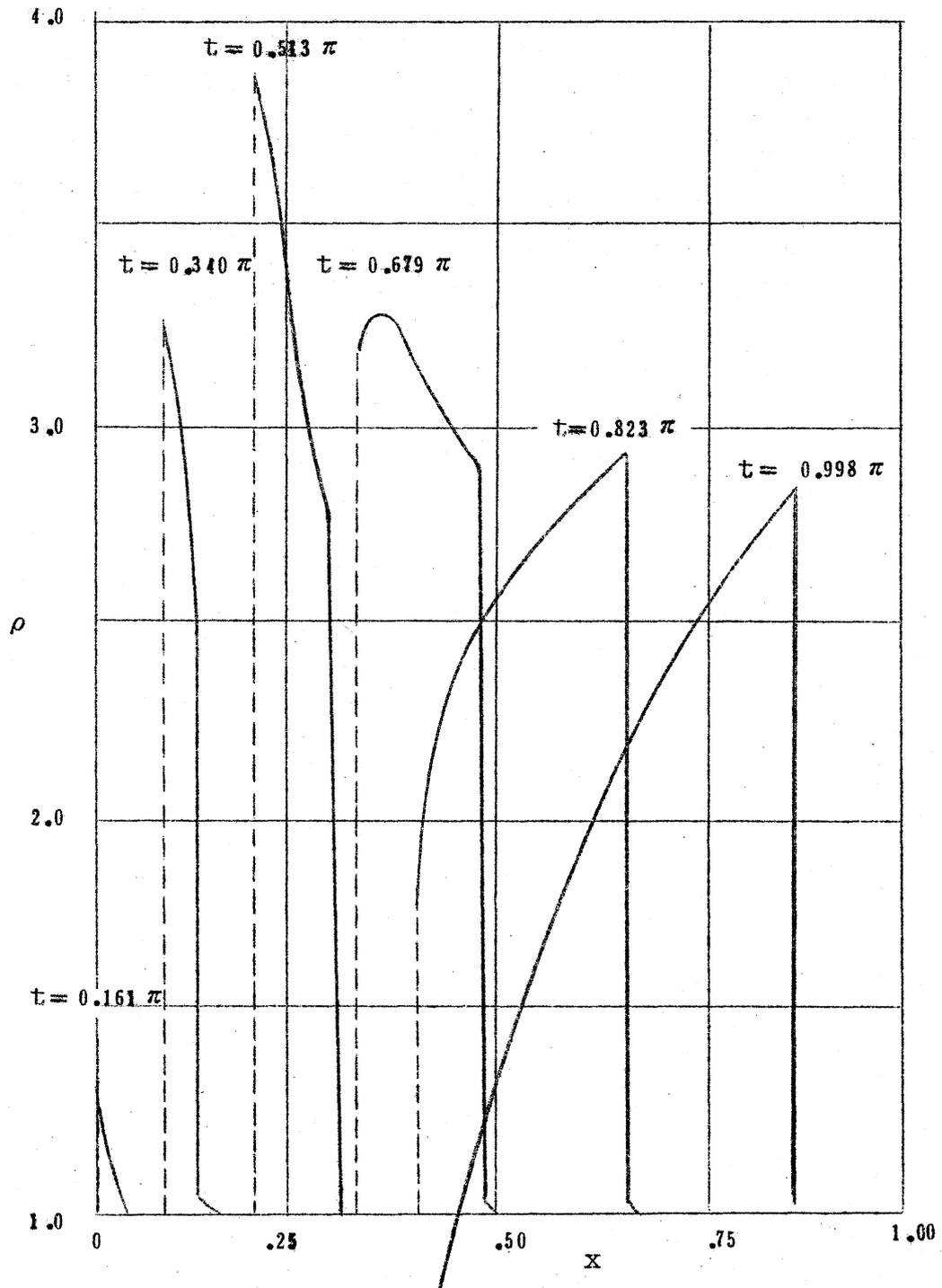
$$\frac{\Delta t}{\Delta \xi} \rho \sqrt{r p / \rho} \leq 1 \quad (9)$$

が満されるように $\Delta t / \Delta \xi$ を選定する。之は数学的には $\Delta t / \Delta \xi$ が, 到る所特性曲線の傾斜を越

えない様にする事と同等である。実際に(9)をすべての網目点で check して網目の寸法を変えるのは、計算プログラムを組む上で大変面倒になるので、次の簡略化を行った。幸い(9)には v が含まれず、又 t の小さい所では圧力 p の境界に於ける変化が 0 から連続的に増す為、shock も初期には弱い事を利用して、少くも $\xi = 0$ に沿うてはガスは等エントロピー変化すると考えれば、 $\xi = 0$ での密度 ρ_m は、 $\rho_m / \rho_1 = (p_m / p_1)^{1/\gamma}$ から求められ、(9)の check は前以って行う事が出来る。そして $\xi \neq 0$ の所でもこの条件が大略満足されるものと仮定する。先ず Δt を、 p_m の変化率が充分小さくなる様に決めて、次に(9)を満す様に各時刻での $\Delta \xi$ を選定し、之を以て時刻 t での mesh 巾とする。以上の法で電子計算機による積分を行った結果の一部を第一、第二図に示す。



第一図



第二図

第1図は $t-x$ 面での各粒子の軌跡と shock を示し、第2図は若干の時刻に於ける密度分布を示す。shock は小さな x の間で密度が強い乍ら連続的な変化をする領域として判定出来る事が判る。

以上、計算の途上安定性と誤差の判定に疑問は残すが、一応 Reasonable な答が得られたの

でここに御報告する。

尚、本研究は、Cornell 大学Sears 教授の示唆に依ってなされたものである事を附記し、感謝の意を表する次第である。

引 用 文 献

- (1) Lax, P.D. : Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation, Commu. Pure and Appl. Math., Vol.7. 159-193 (1954) .
- (2) Richtmyer, R.D.: Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience Publishers, Inc., N.Y. (1964) .