数理解析研究所講究録
11巻 1966年 46-56

制御可能性について

(東北大 理) 吉 澤 太 郎

よく知られているように、自動制御の問題は、複雑な物理系(例えば airplane, chemical plants, space vehicles)を stability と optimality のある criteria にしたがつて、行動するようにする問題である。物理現象は非常に広い範囲にわたるから今日では、control の理論は、かなり一般な model の抽象的性質について、例えば微分方程式の系について考えられる。

理論において、抽象的傾向は増大していくが、それにもかかわらず、十分な注意が、基礎的な概念の確立に向けられていない点がある。

制御理論において、まず第一におこる問題は次のことである。すなわち、

あたえられた dynamical system の任意の位置が、ある control action により、有限時間内に任意の望む位置にうつされうるか

もし、この答が肯定ならば、system は completely controllable であるという。

controllability の考えは Kalman により1959年に導入された。この概念の初期のヒントは1957年の Kalman と Bertram の論文に現われたが、その時は controllability がすべての type の control の問題の研究、例えば安定性の研究、に基本的な役割をするということはまだ認識されていなかつた。

model が linear であるとき、上述の問題に対する直観的な答は少くとも15年という間は "Yes" であるとして知られてきた。実際、いつでも yes とは限らない。例えば簡単な2つの scalar equation の system

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 + u(t) \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = \alpha x_2 + u(t) \end{cases}$$

を考えてみよう。こゝで、αは real constant で $u(t)$ は任意の real function とする。この system においては、$y(t)=x_1(t)-x_2(t)$ という量はどのような方法によつても、control による影響をうけない。それは $y(t)$ は $u(t)$ に関係しない微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y$$

を満足するからである。

われわれはまた state space X の dual vector space X' における controllability を考えることができる。これは直観的には observability という概念に対応するものである。ここではこれにはふれないことにする。

linear dynamical systems の optimal control の理論において、controllability は存在定理を証明するのに必要である。stability を証明するためには controllability と observability の両方を用いる。勿論これだけでは十分ではない。

Roxin, Roxin and Spinadel, Markus and Lee 等は nonlinear system への controllability を研究した。ここでは Kalman にしたがつて、linear dynamical system の controllability に関する mathematical fact の rigorous な説明をあたえる。そして最後に stability に関する Lur'e の問題について若干述べる。

ここでは linear dynamical system

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = F(t)x + G(t)u(t)$$

を考える。tは時間、x は n-vector, $u(t)$ は input または control といわれるもので、m-vector とする。$F(t)$, $G(t)$ はそれぞれ $n\times n$, $n\times m$ 行列とする。そして (1) におけるすべての量は real とする。したがつて、すべての x の集合は real の n 次元 Euclidean space で、これを state space といい、X であらわす。もし、$F(t)$, $G(t)$ が constant のとき、簡単のため (1) は constant であるといい、$u(t)\equiv 0$ のときsystem (1) は free であるという。

函数 $F(t)$, $G(t)$, $u(t)$ に対して、次の仮定をおく。$F(t)$, $G(t)$, $u(t)$ は $-\infty<t<\infty$ のすべての t に対して定義されていて、t の各有界な区間においては有界であるとする。さらに、これらの函数は t の measurable な函数とする。

よく知られているように、(1) の $\phi(t_0)=x_0$ となる解 $\phi(t)$ は

(2) $$\phi(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)G(\tau)u(\tau)d\tau$$

の形で書かれる。ここで、t, t_0 は任意で、Φ は non-singular matrix で、次の性質をもっている。すなわち、

(3) $\Phi(t,t)=E=$unit matrix for all t,

(4) $\Phi(t,\sigma)=\Phi(t,\tau)\Phi(\tau,\sigma)$

(5) $\Phi(t,\tau)^{-1}=\Phi(\tau,t)$

任意のあたえられた $u(t)$ および initial state x_0, initial time t_0 に対して、$(-\infty,\infty)$ のすべての t に対して定義され $\phi_u(t_0;x_0,t_0)=x_0$ となる motion

(6) $\phi(t)=\phi_u(t;x_0,t_0)$

が対応する。もし $u(t)\equiv 0$ ならば、motion は free であるといい、ϕ_0 であらわす。

$\phi_u(t_1;x_0,t_0)=x_1$ と書くかわりに control u は phase (x_0,t_0) を phase (x_1,t_1) に transfer するということがある。

(x_0,t_0) を $(0,t_1)$ に transfer するようなある finite な $t_1>t_0$ とある control $u(t)$ が存在するならば system (1) の phase (x_0,t_0) は controllable であるという。一般に $u(t)$, t_1 は x_0 と t_0 に depend してよい。

(2) からただちにわかることは、ある control $u(t)$ に対して relation

$$(7) \qquad x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)G(t)u(t)dt, \quad t_1 > t_0$$

が成りたつとき、そしてその時のみ phase (x_0,t_0) は controllable である。

もし、時間のある定まつた値 t_0 に対して、どの state もcontrollable であるとき、system は時間 t_0 においてcompletely controllable であるといい、どの phase も controllable のとき単に system は completely controllableであるという。

controllability の定義と (1) の linearity の直接の結果として、次のことがわかる。

Theorem 1. t_0 においてcontrollable なstate の集合 $C(t_0)$ は X の linear subspace である。

system (1) の linearity と Theorem 1 によつて、$C(t_0)$ の basis の element e_i について controllability を check すればよいことがわかる。$C(t_0)$ の定義から、(e_i,t_0) が $(0,t_1)$ に transfer されうるような時間 $t_1(e_i,t_0)$ が存在する。 X したがつて $C(t_0)$ は有限次元であるから、$t_1(t_0) = \max_i t_1(e_i,t_0)$ が存在して、 t_0 のとき $C(t_0)$ の中にあるすべての x_0 は $t_1(t_0)$ において、あるいはそれ以前に原点に transfer される。 しかし motion が原点に到着すれば、 control $u(t) \equiv 0$ の下で、原点にとどまらせることができる。 したがつて

Theorem 2. $(c(t_0),t_0)$ のどの phase (x_0,t_0) ~~もある control~~ により $(0,t_1(t_0))$ に transfer されうる。

(7) から直接にわかる一つの重要な結果は

Theorem 3. $(c(t_0),t_0)$ のどの phase (x_0,t_0) から、$t_1=t_1(t_0)$ あるいはそれ以前に、$(c(t_0),t_0)$ の phase (x_1,t_0) を通るどの motion にも到着することができる。

Proof. $c(t_0)$は linear space であるから、$x_0 - x_1$を含んでいる。$u_0(t)$ を$(x_0-x_1,\ t_0)$ を $(0, t_1)$ に transfer する control とする。すると (7) から

$$(8) \qquad \Phi(t_1,t_0)(x_1-x_0)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,t)G(t)u_0(t)dt$$

がえられる。一方$u_1(t)$ を$[t_0,t_1]$ 上で定義された任意のcontrol とする。すると (2) により

$$(9) \qquad \phi_{u_1}(t_1;x_1,t_0)=\Phi(t_1,t_0)x_1+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,t)G(t)u_1(t)dt.$$

(8) を (9) に代入して、(2) を用いることにより

$$\phi_{u_1}(t_1;x_1,t_0)=\phi_{u_0+u_1}(t_1;x_0,t_0).$$

$c(t)$ の定義からただちにわかることは

$$(10) \qquad c(t_0)\supset\phi_0(t_0;c(t_1),t_1), \qquad t_1\geqq t_0.$$

このことと Theorem 3 から次のことがいえる。

Theorem 4 $(c(t_0),t_0)$ のどの phase も$\{(c(t_2),t_2);t_2\geqq t_1(t_0)\}$の任意の phase に transfer されうる。$(c(t_0),t_0)$ の外のphase(x_0,t_0)から出発する motion は集合$\{(c(t),t);t\geqq t_0\}$ に決して入ることはできない。

Proof. $(x_0,t_0)\varepsilon(c(t_0),t_0)$, $(x_2,t_2)\varepsilon(c(t_2),t_2)$ とする。すると (10) により$\phi_0(t_0;x_2,t_2)\varepsilon c(t_0)$ したがつて、Theorem 3 により、(x_0,t_0) から (x_2,t_2) を通る motion すなわち$(\phi_0(t_0;x_2,t_2),t_0)$ を通る motion に$t_1(t_0)$ において、あるいはそれ以前に到達することができる。その後は control なしで(x_2,t_2) に到達できる。

さて, symmetric, non-negative な linear transformation $W(t_0,t_1)$ を

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)G(t)G'(t)\Phi'(t_0,t)dt \tag{11}$$

で定義する。ここで"'"はmatrix の transpose をあらわす。R[W] を W の range すなわちimage の set とし、N[W] をlinear transformation W の kernel とする。

<u>Theorem 5</u>　$\Phi(t_0,t_1)x_1-x_0$ が $R[W(t_0,t_1)]$ にぞくする時、そしてその時のみ、(x_0,t_0) を (x_1,t_1) に transfer することができる。

<u>Proof.</u>　十分であることは $W(t_0,t_1)y_0=\Phi(t_0,t_1)x_1-x_0$ とすれば、

$$u_0(t)=G'(t)\Phi'(t_0,t)y_0 \tag{12}$$

を (2) に代入することによりただちにわかるように、(12)は (x_0,t_0) を (x_1,t_1) に transfer するから容易にわかる。

必要であることは次のようにして証明される。$W(t_0,t_1)$ はsymmetric であるから state space X の orthogonal direct sum decomposition

$$X=R[W(t_0,t_1)]+N[W(t_0,t_1)]$$

をもつ。よつて $\Phi(t_0,t_1)x_1-x_0=r+x_2$, $r\varepsilon R[W]$, $x_2\varepsilon N[W]$ とする。(x_0,t_0) は (x_1,t_1) に transfer されるから (2) により、ある control u(t) に対して

$$\Phi(t_0,t_1)x_1-x_0=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)G(t)u(t)dt.$$

これは (7) により $(x_0-\Phi(t_0,t_1)x_1,t_0)$ が $(0,t_1)$ に transfer されうることをあらわしている。一方 $W(t_0,t_1)y_0=r$, $u_0(t)=G'(t)\Phi'(t_0,t)y_0$ とすれば、この $u_0(t)$ は $(-r,t_0)$ を $(0,t_1)$ に transfer することがわかる。

よつて、$N[W(t_0,t_1)]$ の zero でないどのstate もcontrollable

でないことを示せばよい。 もし、 $x_2 \neq 0 \varepsilon N[W(t_0,t_1)]$ とすれば

$$0=[x_2,\ W(t_0,t_1)x_2]=\int_{t_0}^{t_1}\|G'(t)\Phi'(t_0,t)x_2\|^2 dt$$

ここで $[x,y]$ は vector x,y の scalar product をあらわす。integrand は non-negative であるから

$$(13)\qquad G'(t)\Phi'(t_0,t)x_2=0 \quad \text{almost everywhere in } [t_0,t_1].$$

いま、(x_2, t_0) は $(0,t_1)$ に transfer されうると仮定する。 すると (7) により、ある control $u_2(t)$ に対して

$$x_2=-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)G(t)u_2(t)dt$$

これより

$$0<[x_2,x_2]=\int_{t_0}^{t_1}[x_2,\ -\Phi(t_0,t)G(t)u_2(t)]dt$$

(13) によりこの右辺は 0 となり矛盾がおこる。 よつて $x_2\neq 0$ は controllable でない。 したがつて $x_2=0$ でなくてはならないから

$$\Phi(t_0,t_1)x_1-x_0 \varepsilon R[W(t_0,t_1)]$$

であることがわかる。

Theorem 5 は実際問題においては controllability に対する完全な解答をあたえないようにみえる。 それは、 W は fundamental matrix Φ が analytically にわかつているときのみ計算できるからである。system(1)が constant か、 t に関して periodic のとき以外は稀である。

system (1) が constant の場合は、 Φ の計算を必要としない complete controllability に対するある criteria がある。 もつとも簡単でもつともよく知られているのは次の定理である。

Theorem 6. constant system(1) が completely controllable であるのは、$n\times mn$ matrix

(14) $[G, FG, \ldots, F^{n-1}G]$

の rank が n のとき、そしてそのときのみである。

Proof. constant system においては、$t_0=0$ として考えてよい。t_1 を任意の正の数とする。まず、(14) の rank は n であるとする。そしてどの state も $t=t_1$ までに 0 に transfer されうるとは限らないとする。すると theorem 5 によつて、$N[W(0,t_1)]$ にぞくするvector $x_1 \neq 0$ が存在する。(13) によつて

(15) $G'\Phi'(0,t)x_1=G'e^{-F't}x_1=0$ for all $0\leqq t\leqq t_1$.

(15) を t について $n-1$ 回微分して、$t=0$ とおくと

(16) $G'(F')^k x_1=0,\quad k=0,\ldots,n-1.$

これは $x_1\neq 0$ が matrix (14) の各列に orthogonal であることを意味する。このことは (14) の rank が n であることに矛盾する。よつてどの state も controllable である。

逆に system は completely controllable であるが、matrix (14) の rank は n より小であると仮定する。すると (16) をみたす nonzero vector x_1が存在する。いま

$$f(\lambda)=\det[\lambda E+F]=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$$

とすると、Cayley-Hamilton の定理により

(17) $F^n+(-1)a_1F^{n-1}+\ldots+(-1)^n a_0 E=0$.

(17) をもちいて、$v(t)=x_1'e^{-Ft}G$ は n-th order の constant coefficients をもつ linear differential equation

(18) $$v^{(n)}(t)+a_1 v^{(n-1)}(t)+\ldots+a_n v(t)=0$$

をみたすことがわかる。 しかるに(16) により

$$v(0)=x_1'G=0,\quad \dot{v}(0)=-x_1'FG=0,\ldots,\quad v^{(n-1)}(0)=(-1)^{n-1}x_1'F^{n-1}G=0$$

したがつて $v(t)\equiv 0$ すなわち $G'e^{-F't}x_1=0$ for all t よつて x_1 はすべての t に対して $G'e^{-F't}$ に orthogonal である。 これより $x_1\varepsilon N[W(0,t_1)]$ for all $t_1>0$ なることがわかる。 これは completely controllable であるということに矛盾する。 したがつて matrix (14) の rank は n である。

条件 (14) は minimal-time control system の研究における technical requirement として1956年頃の Pontryagin の論文にあらわれている。また LaSalle によつても、この条件が Pontryagin と同じような意味で用いられた。 LaSalle が用いた proper という性質は completely controllable と equivalent である。

次に Lur'e の問題について簡単な説明をつけ加えておく。 1950年頃

(19) $$\frac{dx}{dt}=Fx-g\phi(\sigma),\quad \frac{d\xi}{dt}=-\phi(\sigma),\quad \sigma=h'x+\rho\xi$$

によりあたえられる control system の class の研究が Lur'e によつてはじめられた。σ,ξ,ρ は real scalar, x,g,h は real n-vector, F は real $n\times n$ matrix で、 F は stable すなわち、その characteristic root はすべて negative real part をもつとする。 $\phi(\sigma)$ は real-valued continuous function で class $A_K:\phi(0)=0,\ 0<\sigma\phi(\sigma)<\sigma^2K$ にぞくするとする。 問題とするのは、

(19) の equilibrium state は任意の $\phi\varepsilon A_K$ に対して globally asymptotically stable (asymptotically stable in the large) であるか。

この問題はよく知られている Aizerman の conjecture と関係がある。
Aizerman の conjecture は

もし (19) が任意の linear な $\phi \varepsilon A_\kappa$ に対して g.a.s. ならば、
任意の $\phi \varepsilon A_\kappa$ に対してまた g.a.s. である。

しかし Aizerman の conjecture は正しくないことがわかつた。そして Lur'e がより特殊な状態と考えるようになつた。すなわち

Lur'e の問題　任意の $\phi \varepsilon A_\infty$ に対して (19) の g.a.s. をあたえる special type の Liapunov function V(すなわち V=quadratic form in (x,σ)+integral of $\phi(\sigma)$)の存在するために必要かつ十分な ρ, g, h, F に対する条件を見いだすこと。

(19) の global asymptotic stability に関しては次の重要な Popov の定理がある。

<u>Popov's Theorem</u>　F は stable で $\rho>0$ とする。もし条件

$$(20)\qquad \mathrm{Re}(2\alpha\rho+i\omega\beta)[h'(i\omega E-F)^{-1}g+\frac{\rho}{i\omega}] \geqq 0 \quad \text{for all real } \omega$$

が $2\alpha\rho=1$ とある $\beta\geqq 0$ に対して成り立つならば、(19) は globally asymptotically stable である。

Popov はまた (20) が成立つとき、g.a.s. をあたえる Liapunov function の存在の問題を考えたが、解決しなかつた。しかし同じ paper で、Popov は次のことを示している。

(x,σ) についての quadratic form と $\phi(\sigma)$ の integral の和であるもつとも一般な $V(x,\sigma)$

$$(21)\qquad V(x,\sigma)=x'p\,x+\alpha(\sigma-h'x)^2+\beta\int_0^\sigma \phi(\sigma)d\sigma+\sigma w'x, \qquad (\alpha,\beta \text{ real})$$

を考えたとき、任意の $\phi \varepsilon A_\varepsilon (\varepsilon>0)$ に対して $V\geqq 0$ で $\dot{V}\leqq 0$ ならば $w=0$.
ここで $\dot{V}$ は V の (19) の解に沿つての derivative である。

$w=0$ として (19) と (21) から

$$(22)\qquad \dot{V}(x,\sigma)=x'(PF+F'P)x-2\phi(\sigma)x'(Pg-\alpha\rho h-\frac{1}{2}\beta F'h)$$
$$-\beta(\rho+h'g)\phi^{2}(\sigma)-2\alpha\rho\sigma\phi(\sigma)$$

がえられる。Kalman は complete controllability と complete observability を仮定して（この仮定は問題の性質上当然のようである）Lur'e の問題に対する解答をあたえた。すなわち

<u>Theorem 7.</u> (19) において、$\rho>0$, F は stable とする。さらに $\det[g,Fg,\ldots,F^{n-1}g]=0$, $\det[h,F'h,\ldots,(F')^{n-1}h]\neq 0$ とする。(21) により定義された class から適当な Liapunov function V を見出す。

(a) $w=0$ で、$\alpha\geqq 0$, $\beta\geqq 0$, $\alpha+\beta>0$ で (20) が成立つような real constant α,β が存在するとき、そしてその時のみ任意の $\phi\in A_{\infty}$ に対して V は positive definite で $\dot{V}\leqq 0$, したがつてこの V は任意の $\phi\in A_{\infty}$ に対して (19)の $x=0$ の Liapunov stability をあたえる Liapunov function である。

(b) V は前の条件をみたすとする。(i) $\alpha\neq 0$ あるいは (ii) $\alpha=0$ で (20) における等号が $\mathrm{Re}\{h'(i\omega E-F)^{-1}g\}\geqq 0$ なる ω の値に対してのみおこる。このとき、そしてこのときのみ V は (19) の g.a.s. をあたえる Liapunov function である。