数理解析研究所講究録
12巻 1966年 28-32

形式的言語に関する一つの構造方程式の解の表現定理について

九州大学理学部 藤 野 精 一

1°. Vを任意の空でない有限集合(これをアルファベットという),$\theta(V)$ をVの上のすべての語(Vの要素を有限個ならべてできるもの)の集合とする。とくに空語をλと記すことにする。$\theta(V)$の部分集合間の演算として+,・,*を次のように定義する;(R_1, $R_2 \subset \theta(V)$として)

$$R_1 + R_2 = \{ w \ ; \ w \in R_1 \ \text{または} \ w \in R_2 \},$$

$$R_1 \cdot R_2 = \{ w_1 w_2 \ ; \ w_1 \in R_1 \ \text{かつ} \ w_2 \in R_2 \},$$

$$R_1^* = \sum_{n=0}^{\infty} R_1^n ,$$

すなわち,+をUの,$\sum_{n=0}^{\infty}$ を $\bigcup_{n=0}^{\infty}$ のかわりに使用する。ここに,$R_1^0 = \{\lambda\}$,
$R_1^n = R_1^{n-1} \cdot R_1$ $(n=1, 2, \cdots)$である。

いま,$\delta(\theta(V))$ を,$\theta(V)$のすべての部分集合の全体とし,$\delta(\theta(V))$から $\delta(\theta(V))$ への写像を考える。写像 $f: \delta(\theta(V)) \to \delta(\theta(V))$ が次の(i),(ii),(iii)の条件を満足するとき,これを加法的正規縮小写像という;

(i) (加 法 性)

$f(\phi) = \phi$ かつ任意の $R \in \delta(\theta(V))$ にたいして

$$f(R) = \sum_{w \in R} f(w) .$$

(ϕは空集合を示す)

(ii) (正 規 性)

$f(\lambda) = \phi$ かつ任意の$w \in \theta(V)$にたいし$f(w)$は1個の要素からなる集合か,または空集合である。

(iii) (縮 小 性)

$f(w) \neq \phi$ となる任意の$w \in \theta(V)$ にたいし

$$\| f(w) \|_V < \ell_V(w)$$

である。ここに $\ell_V(w)$ は語wの長さ（wの中にでてくるVの元をすべてかぞえたときの個数），$\| f(w) \|_V = \max_{w \in f(w)} \ell(w)$ である。

また，任意の $f:\ \delta(\theta(V)) \to \delta(\theta(V))$ にたいして次の集合

$$K_{er}(f) \equiv \{ w\ ;\ w \in \theta(V) \text{ かつ } f(w) = \phi \}$$

をfの核という。Rを$\theta(V)$の部分集合とするとき，$K_{er}(f) \cap R$を，fに関するRの基底とよびB（f；R）と記すことにする。

2°. fが加法的正規縮小写像であるとき，$K_{er}(f)$の中の部分集合 R_0 を与えて，次の方程式の解をもとめることを考えよう：

$$\text{(I)} \begin{cases} f(R) = R, \\ B(f\,;R) = R_0, \end{cases}$$

すなわち，fの不動点で，fに関する基底がR_0であるような集合をもとめる問題を考えることにする。このような集合がfの特殊な場合には形式的言語のあるものと一致する場合があるので，これを一般に構造方程式とよぶことにする。

次の補題はfのもつ性質から，あきらかである。

補題1　fが加法的正規縮小写像であるとき，各$w \in \theta(V)$にたいして $f^k(w) \neq \phi$ かつ $f^{k+1}(w) = \phi$ となる非負整数kが存在する。とくに，$w \in [\theta(V) - K_{er}(f)]$にとるときkは正整数である。

この補題から次の結果が得られる：

補題2　fを加法的正規縮小写像，Rをfの不動点とする。このとき，$R=\phi$ なるとき，そのときにかぎり，$B(f\,;R)=\phi$ である。

補題3　fを加法的正規縮小写像，Rを $R=f(R)$ を満足する空でない集合とするきき，各$w \in R - B(f\,;R)$ にたいし

$$f^k(w) = w_0 \text{ かつ } f^p(w) \in R\ (p = 0, 1, 2, \cdots, k)$$

なる正整数 k および $w_0 \in B(f\,;R)$ が存在する。

3°. いま次の集合を定義しよう：

$$K_0[x] = x \quad (x \in B(f\,;R)),$$

$$K_p[x] = \{w\,;\, w \in R \text{ かつ } f^p(w) = x\}$$

$$(p = 1, 2, \cdots)$$

すぐにわかることは

$$(K_p[x]) \geqq (K_{p-1}[x]) \quad (p = 1, 2, \cdots)$$

である。したがって各 $K_p[x]$ は，空集合ではない。この $K_p[x]$ に関して次の結果が得られる：

補題 4 f を加法的正規縮小写像，R を $f(R) = R$ なる空でない集合とするとき，上に定義される $K_p[x]$ はいずれも空でなく，

$$f(K_p[x]) = K_{p-1}[x] \quad (p = 1, 2, \cdots) \qquad \text{(A)}$$

を満足する

$$K_p[x] \subset R \text{ より } \sum_{p=0}^{\infty} K_p[x] \subset R \quad (x \in B(f\,;R)),$$

したがって $\displaystyle\sum_{x \in B(f;R)} \sum_{p=0}^{\infty} K_p[x] \subset R$

となる。

補題 3 を適用して

$$R \subset \sum_{x \in B(f;R)} \sum_{p=0}^{\infty} K_p[x]$$

なることも証明される。

これをまとめて

定理 1 f を加法的正規縮小写像，R_0 を $K_{er}(f)$ 内の空でない部分集合とする。このとき方

程式(I)の空でない解は存存して，

$$R = \sum_{x \in R_0} \sum_{p=0}^{\infty} K_p[x]$$

と表現される。ここに $K_p[x]$ ($p = 0, 1, 2, \cdots$) は上に定義された集合である。

4°. 上にあげた表現定理の結果は解を実際に作るのに有効である。いま，

$$H[x] = \sum_{p=0}^{\infty} K_p[x] \qquad (x \in B(f;R))$$

としたとき，$K_p[x]$ のもつ性質より

$$f(H[x]) = H[x]$$

となり，$H[x]$ も f の不動点の1つとなる。また，このとき，

$$B(f; H[x]) = x$$

である。したがって

$$\begin{cases} f(H) = H, \\ B(f; H) = x \quad (x \in R_0) \end{cases}$$

なる方程式の解 $H[x]$ をもとめて $\sum_{x \in R_0} H[x]$ を作れば，これがもとの(I)の解になっている。

5°. 上のことを利用して f が

$$f \equiv \sum_{i=1}^{m} \partial u_i$$

なる特別の場合に，

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \partial u_i R = R, \\ B(\sum_{i=1}^{m} \partial u_i ; R) = R_0 \end{cases}$$

の解をもとめることができる。ここに ∂_u: $\delta(\theta(V)) \rightarrow \delta(\theta(V))$ $(u \in \theta(V))$ は

$$\partial_u R = \{w;\ uw \in R\} \quad (R \subset \theta(V))$$

で定義される写像で，各 u_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ はいずれも λ ではなく，各 $\langle i, j \rangle$ $(i \neq j)$ にたいして u_i と u_j とは，この2つの語を左から一字ごとに比較するとき，どこかで少くとも1個所はたがいにことなっているようなものとする。R_0 は $K_{er}(\sum_{i=1}^{m} \partial_{u_i})$ の中の集合とする。

この条件のもとに，$\sum_{i=1}^{m} \partial_{u_i}$ は加法的正規縮小写像となる。

この解の詳細および定理の証明は下にあげる文献を参照されたい。

文　献

S. Huzino: On some properties of derivative-mapping, structural diagrams and structural equations.
(今年度印刷予定)