数理解析研究所講究録
13巻 1966年 1-20

Cartan-Behnke-Stein の定理の拡張

九州大学
理学部　梶原壤二

はしがき

Oka 〔14〕は C^n の正則領域がCousin−I型領域であることを示した。逆にCartan〔5〕は C^2 の Cousin−I 型領域は正則領域であると述べ，Behnke−Stein〔2〕が証明を与えた。Cartan〔6〕によれば $C^3-\{(0,0,0)\}$ は正則領域でないCousin−I型領域であり，Thullen〔16〕によれば $C^2-\{(0,0)\}$ は正則領域でないCousin−II型領域である。この二つの事柄は上述の Cartan−Behnke−Stein の定理は，$n\geqq 3$ のとき C^n のCousin−I 型領域，$n\geqq 2$ のときの C^n のCousin−II型領域に対して，直接の形では一般化できないことを示す。本講演の目的は次の様な形で Cartan−Behnke−Stein の定理を拡張することにある：

Lを可換な複素Lie 群，$\mathfrak{O}_L$ をLに値を持つ正則写像芽全体の可換群の層とする。まず $H^1(D,\mathfrak{O}_L)=0$ をみたす C^2 の上の領域 (D,φ) は正則領域である。

次に $\{(D_p,\varphi_p)\}$ をStein 多様体上の領域の増加列，(D,φ) をその極限とする。Dが単連結，即ちDの基本群$=0$のときは（標準的写像 $H^2(D,\mathfrak{O}_L)\longrightarrow \lim H^2(D_p,\mathfrak{O}_L)$ は単射である。これらを用いると次の結果を得る：

Dが滑らかな境界をもつ C^n 内の領域で，すべての単連結相対コンパクト多重円筒Pに対して $H^1(D\cap P,\mathfrak{O}_L)=0$ をみたすとき，Dは正則領域である。

なお最初および最後の命題は $L=GL(p,C)$ に対しても成立する。

§1. ${}^{\#}H^1(D,\mathfrak{O}_L)=0$ をみたす領域と正則領域の関係

補題 1. $\mathfrak{F}$ を位相空間Xの上の群の層，$\mathfrak{U}=\{U_i\,;\,i\in I\}$ をXの開被覆とする。標準的写像 $H^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\longrightarrow H^1(X,\mathfrak{F})$ は単射である。

証明　cocycles $\{f_{ij}\},\{g_{ij}\}\in Z^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ に対して，Xの開被覆 $=\{V_k\,;\,k\quad K\}$, cochain $\{f_k\}\in C^0(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$，写像 $\rho:K\longrightarrow I$ で条件

(1) $V_k\subset U_{\rho(k)}$, ${}^{\forall}k\in K$. (2) $f_k^{-1}\ f_{\rho(k\ell)}\ f_\ell=g_{\rho(k\ell)}$

(ただし $\rho(k\ell)=\rho(k)\rho(\ell)$)。 (3) ρ は全射。

を満たすものがあるとしよう。任意の $i\in L$ に対して，$\rho(k)=i$ をみたす $k\in K$ を考え，固定する。U_i の任意の点 x に対して，$x\in V_\ell\in\mathfrak{V}$ なる $\ell\in k$ がある。$\rho(\ell)=j$ とおき， $U_i\cap V_\ell(\subset U_i\cap U_j)$ 上にて

$$F_i(x)=f_{ij}(x)f_\ell(x)(g_{ij}(x))^{-1}$$

とおくと，$\{F_i\}\in C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ はうまく定義できて，任意の $U_i\cap U_j\neq\phi$ の上で

$$F_i^{-1}f_{ij}F_j=g_{ij}$$

をみたす。

補題 2. Lを可換な複素Lie 群，L_eをneutral element e を含むLの連結成分，Dを連結な複素多様体とする。標準的写像 $H^1(D,\mathfrak{O}_{L_e})\to H^1(D,\mathfrak{O}_L)$ は単射である。

証明 $\mathfrak{U}=\{U_i;i\in I\}$ を各U_i が連結であるようなDの開被覆とする。 cocycle $\{f_{ij}\}\in Z^1(\mathfrak{U},\mathfrak{O}_{L_e})$ が$\{f_i\}\in C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{O}_L)$ のcobaundary であるならば，$\mathfrak{U}$ の一つのU_{i_0} の一点x_0 に対して，各U_i

$$g_i(x)=f_i(x)(f_{i_0}(x_0))^{-1}$$

とおくと，$\{f_{ij}\}$は$\{g_i\}\in C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{O}_{L_e})$ のcobaundary である。

複素多様体Dより複素多様体Mの中への局所両正則写像φがあるとき，(D,φ) をMの上の開集合といい特にDが連結のとき，Mの上の領域という。基本群が0であるような連結な複素多様体は単連結であるといわれる。(D,φ) をMの上の領域，$\mathfrak{F}$をD上の正則函数のある族とする。次の条件をみたす$(\lambda,\tilde{D},\tilde{\varphi})$ または単に$(\tilde{D},\tilde{\varphi})$，を$(D,\varphi)$ の$\mathfrak{F}$に関する正則被という：

(1) λ は$\varphi=\tilde{\varphi}\circ\lambda$ をみたす正則写像である。(このときλを(D,φ) より$(\tilde{D},\tilde{\varphi})$ の中の写像とよぶ。)

(2) 任意の $f\in\mathfrak{F}$ に対して，$f=\tilde{f}\circ\lambda$ をみたす$\tilde{f}$がある。(このとき$\tilde{f}$を f の$\tilde{D}$への解析接続とよぶ。)

(3) (1),(2) をみたす任意の(λ',D',φ') (これを(D,φ) の$\mathfrak{F}$に関する解析的拡大という。)に対して，(D',φ') より$(\tilde{D},\tilde{\varphi})$ の中への写像ψで，$\lambda=\psi\circ\lambda'$ をみたし$(\psi,\tilde{D},\tilde{\varphi})$ が$\mathfrak{F}$ の元の$\tilde{D}$への接続全体の作る族に関する(D,φ) の解析的拡大となるようなもの

がある。

正則被の一意的存在はCartan〔7〕が示している。特にD上の一つの正則函数fに対して，$\{f\}$に関する正則被をMの上のfの正則領域，または単にMの上の正則領域という。更に$\mathcal{F}$がD上の正則函数全体の族のとき，(D, φ)の$\mathcal{F}$に関する正則被を単に(D, φ)の正則被という。

(D, φ)のMの上の領域する。次の条件をみたす(D′, φ', λ)を(D, φ)の被覆領域という：

λはMの上の領域(D′, φ')よりMの上の領域(D, φ)の上への写像で，Dの各点に対し近傍Uでλがλ^{-1}(U)の各連結成分をUの上に両正則に写すようなものがある。

次の条件を満す(D, φ)の被覆領域($D^{\#}$, $\varphi^{\#}$, λ)を(D, φ)の普遍被覆領域という：

(D, φ)の任意の被覆領域を(D′, φ', λ')とすると($D^{\#}$, $\varphi^{\#}$, μ)が(D′, φ')の被覆領域であるような　$\lambda=\lambda'\circ\mu$　をみたすμがある。(D, φ)の被覆領域(D′, φ', λ')が(D, φ)の普遍被覆領域であるための必要十分条件はD′が単連結なことである。

さて(D, φ)をMの上の領域，($D^{\#}$, $\varphi^{\#}$, λ)をその普遍被覆領域とする。λは標準的写像$\lambda^{*}: H^{1}(D, \mathfrak{O}_{L}) \to H^{1}(D^{\#}, \mathfrak{O}_{L})$を導びく。

$$^{\#}H^{1}(D, \mathfrak{O}_{L}) = \lambda^{*}(H^{1}(D, \mathfrak{O}_{L}))$$

は$H^{1}(D^{\#}, \mathfrak{O}_{L})$の部分群である。また　α　$H^{1}(D, \mathfrak{O}_{L})$に対しても，$\alpha^{\#}=\lambda^{*}(\alpha)\in H^{1}(D^{\#}, \mathfrak{O}_{L})$とおく。

補題3　Lを可換なp次元の複素Lie群，(D, φ)を$^{\#}H(D, \mathfrak{O}_{L})=0$をみたす$C^{n}$の上の領域，($D^{\#}$, $\varphi^{\#}$, λ)を(D, φ)の普遍被覆領域とする。C^{n}の中の任意の(n−1)次元の解析的平面Hとφ^{-1}(H)上の任意の正則函数uに対して，$D^{\#}$上の正則函数Fで$\varphi^{\#-1}(H)=\lambda^{-1}(\varphi^{-1}(H))$上では$F=u\circ\lambda$をみたすようなものがある。

証明　補題2よりLは連結であると仮定してよい。よく知られた様に(C^{P}, x)がLの普遍被覆群であるような，つまり(C^{P}, x)がLの普遍被覆領域でxが準同型対応である様な，xがある。このときxの核NはLの基本群と同型なC^{P}のdiscrete subgroupである。

φ^{-1}(H)の近傍VとV上の正則函数u′でφ^{-1}(H)上でu′=uをみたすものがある。$W=D-\varphi^{-1}(H)$とおけば，$\{V, W\}$はDの開被覆である。

$$\chi\,(u'/z_1\circ\varphi,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0)\in H^0(V\cap W,\ \mathcal{O}_L)$$

を考える。${}^{\#}H^1(D,\ \mathcal{O}_L)=0$ であるから，補題2より $A\in H^0(\lambda^{-1}(V),\ \mathcal{O}_L)$，$B\in H^0(\lambda^{-1}(W),\ \mathcal{O}_L)$ で $\lambda^{-1}(V\cap W)$ 上で

$$\chi\,(u'\circ\lambda/z_1\circ\varphi^{\#},\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0)=AB^{-1}$$

をみたすものがある。$(C^p,\ \chi)$ はLの被覆領域であるから，$\lambda^{-1}(V\cap W)$ の単連結な部分領域の上でvector 値正則函数 $a=(a_1\cdots,\ a_p)$，$b=b_1,\ \cdots b_p)$ で $A=\chi(a)$，$B=\chi(b)$ をそこでみたすものがある。χ は準同型対応であることを考えると，もつとうまく a，b，をえらべば，そこで

$$(z_1\circ\varphi^{\#})\,a=(u'\circ\lambda,\ 0,\ \cdots,\ 0)+(z_1\circ\varphi^{\#})\,b$$

が成立する。更に a，b は $\lambda^{-1}(V)$，$\lambda^{-1}(W)$ 内の任意の曲線にそつて解析接続できる。それら接続を同じ a，b で表わすと，一致の定理より $\lambda^{-1}(V\cap W)$ の任意の部分領域に対して，定まった $C\in N$ があつて，そこで

$$(z_1\circ\varphi^{\#})\,a=(u'\circ\lambda,\ 0,\ \cdots,\ 0)+(z_1\circ\varphi^{\#})\,b+(z_1\circ\varphi^{\#})\,C$$

が成立する。上式より $(z_1\circ\varphi^{\#})\,a_1$ は $D^{\#}$ 内の任意の曲線にそつて解析接続できる。$D^{\#}$ は単連結であるから，一価の原理よりこれは $D^{\#}$ 上の一価正則函数Fを与える。再び上式より

$$F=u\circ\lambda$$

が $\varphi^{\#-1}(H)$ にて成立する。

命題 1. $(D,\ \varphi)$ を C^2 の上の領域とする。可換な複素Lie 群Lに対して $H^1(D,\mathcal{O}_L)=0$ が成立すれば，$(D,\ \varphi)$ は正則領域である。

証明　あるHにつき $\varphi^{-1}(H)$ の境界である様な点よりなる ∂D の部分集合は ∂D にて稠密である。ところで $\varphi^{-1}(H)$ は開Riemann 面であるからBehnke-Stein〔2〕により正則凸である。したがつて $\varphi^{-1}(H)$ の各境界点にて非有界であるような正則函数uがある。このuに対する補足定理3のFは $D^{\#}$ 上で正則で $\varphi^{-1}(H)$ の境界点であるような ∂D の点の上の点にて非有界である。上のような点は $\partial D^{\#}$ にても稠密であるから，$\partial D^{\#}$ の各点はBochner-Martin〔4〕の意味でfrontier property を持つ。したがつて，$D^{\#}$ 上の一つの正則函数Gで $\partial D^{\#}$ の各点にて非有界なものがある。$(D^{\#},\ \varphi^{\#})$ はGの正則領域 $(D',\ \varphi')$ の被覆領域であるから，

(D', φ') は (D, φ) の被覆領域である。例えばOka〔15〕を用いて，ある領域とその被覆領域とは同時に正則領域になるので，(D, φ) も正則領域である。（Stein〔16〕参照）。

補題3の証明の内容と同様な論法を用いて，帰納法により，高次元の場合は次の命題を得る。

命題2. $H=\left\{ z \,;\, z_{q_1}=a_1 \;, \cdots, \; z_{q_{n-m}}=a_{n-m} \right\}$ $(2 \leq m \leq n)$ なる形をした任意の解析的平面Hに対して $^{\#}H^1(\varphi^{-1}(H), \mathcal{O}_L)=0$ をみたすC^n の領域 (D, φ) は正則領域である。

§2. 正則函数の広義一様近似

次の条件をみたす $\mathfrak{S}=\left\{ (D_n, \varphi_n) \,;\, \tau^n_m \right\}$ を複素多様体Mの上の領域の増加列という：

(1) 各 (D_n, φ_n) はMの上の領域である。

(2) 各τ^n_m $(n \leq m)$ は (D_n, φ_n) より (D_m, φ_m) の中への写像で$n \leq m \leq \ell$のとき

$\tau^n_\ell = \tau^m_\ell \circ \tau^n_m$ をみたす。

次の条件をみたす (τ_n, D, φ)，また単に (D, φ)，を $\mathfrak{S}$ の極限という。

(1) (D, φ) はMの上の領域である。

(2) 各τ_nは (D_n, φ_n) より (D, φ) の中への写像で$n \leq m$に対して$\tau_n=\tau_m \circ \tau^n_m$ をみたす。

(3) (τ'_n, D', φ') が(1)(2)をみたせば，(D, φ) より (D', φ') の中への写像ψで

$\tau'_n=\psi \circ \tau_n$ をみたすものがある。

〔10〕で述べたように $\mathfrak{S}$ の極限は一意的に存在し，次の性質をもつ。

補題4. $\left\{ (D_n, \varphi_n) \,;\, \tau^n_m \right\}$ をMの上の領域の増加列，(τ_n, D, φ) をその極限とする。Dの中の任意のコンパクト集合Kに対して，自然数mとD_m の中のコンパクト集合K' で，$\tau_m | K'$ がK' をKの上に両正則に写すようなものがある。

τをStein 多様体Sの上の領域 (D_1, φ_1) よりSの上の領域 (D_2, φ_2) の中への写像，$(\lambda_1, \widetilde{D}_1, \widetilde{\varphi}_1)$ $(u_2, \widetilde{D}_2, \widetilde{\varphi}_2)$ を，それぞれ (D_1, φ_1)，(D_2, φ_2) の正則被とする。可換図をもつ$\widetilde{D}_1$ より$\widetilde{D}_2$ の中への正則写像 $\widetilde{\tau}$の存在が示され，この$\widetilde{\tau}$をτの $(\widetilde{D}_1, \widetilde{\varphi}_1)$への解析接続

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{\tau} & D_2 \\ \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \lambda_2 \\ \widetilde{D}_1 & \xrightarrow{\widetilde{\tau}} & \widetilde{D} \end{array}$$

という。

さてSの上の領域の増加列$\{(D_n, \varphi_n) ; \tau_m^n\}$とその極限$(\tau_n, D, \varphi)$を考える。$(\lambda_n, \tilde{\tilde{\tilde{D}}}_n, \tilde{\varphi}_n)$，$(\lambda, \tilde{D}, \tilde{\varphi})$を，それぞれ，$(D_n, \varphi_n)$，$(D, \varphi)$の正則被，$\tilde{\tau}_m^n$，$\tilde{\tau}_n$を，それぞれ，$\tau_m^n$，$\tau_n$の$(\tilde{D}_n, \tilde{\varphi}_n)$への解析接続とすると

補題 5. $\{(D_n, \varphi_n) ; \tau_m^n\}$をStein 多様体Sの上の領域の増加列，$(\tau_n, D, \varphi)$をその極限とする。$\{(\tilde{D}_n, \tilde{\varphi}_n) ; \tilde{\tau}_m^n\}$はSの上の領域の増加列で，$(\tilde{\tau}_n, \tilde{D}, \tilde{\varphi})$はその極限である。

τを複素多様体Mの上の領域(D_1, φ_2)よりMの上の領域(D_2, φ_2)の中への写像，$(D_1^{\#}, \varphi_1^{\#}, \lambda_1)$，$(D_2^{\#}, \varphi_2^{\#}, \lambda_2)$を，それぞれ，$(D_1, \varphi_1)$，$(D_2, \varphi_2)$の普遍被覆領域とする。可換図

$$\begin{array}{ccc} D_1^{\#} & \xrightarrow{\tau^{\#}} & D_2^{\#} \\ \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \lambda_2 \\ D_1 & \xrightarrow{\tau} & D_2 \end{array}$$

をもつ$D_1^{\#}$より$D_2^{\#}$の中への正則写像$\tau^{\#}$の存在が示され，$\tau^{\#}$をτより導かれる$D_1^{\#}$より$D_2^{\#}$の中への写像という。

さてMの上の領域の増加列$\{(D_n, \varphi_n) ; \tau_m^n\}$とその極限$(\tau_n, D, \varphi)$を考える。$(\lambda_n, D_n^{\#}, \varphi_n^{\#})$ $(\lambda, D^{\#}, \varphi^{\#})$を，それぞれ，$(D_n, \varphi_n)$，$(D, \varphi)$の普遍被覆領域とする。$C_m^{\#}$，$\tau_m^{\#}$を，それぞれ，$\tau_m^n$，$\tau_n$より導かれる$D_n^{\#}$より$D_m^{\#}$の中への，写像とすると

補題 6. $\{(D_n, \varphi_n) ; \tau_m^n\}$はMの上の領域の増加列，$(\tau_n, D, \varphi)$をその極限とする。$\{(D_n^{\#}, \varphi_n^{\#}) ; \tau_m^{n\#}\}$はMの上の領域の増加列で，$(\tau_n^{\#}, D^{\#}, \varphi^{\#})$はその極限である。

補題 7. $\{(D_n, \varphi_n) ; \tau_m^n\}$をStein 多様体Sの上の領域の増加列，$(\tau_m, D, \varphi)$をその極限，$\{K_n\}$を$K_n \subset K_{n+1}$，$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$をみたすDの中のコンパクト集合の列とする。次の性質を持つ$\{1, 2, \cdots\}$の部分列$\{\nu_n\}$がある：

(1) $\tau_{\nu_n} | K_n'$がK_n'をK_nの上に両正則に写すようなD_{ν_n}の中のコンパクト集合K_{ν_n}がある。

(2) D_{ν_n}上の任意の正則函数f_nと任意の$\varepsilon_n > 0$に対して

$$|F_n \circ \tau_{\nu_n} - f_n| < \varepsilon_n$$

をK'_n上でみたす様なD上の正則函数F_nがある。

証明　$(\lambda_n, \tilde{D}_n, \tilde{\varphi}_n)$，$(\lambda, \tilde{D}, \tilde{\varphi})$を，それぞれ，$(D_n, \varphi_n)$，$(D, \varphi)$の正則数とすると，補題5より　$(\tau_n, \tilde{D}, \tilde{\varphi})$は$\{(\tilde{D}_n, \tilde{\varphi}_n)\ ;\ \tilde{\tau}^n_m\}$の極限である。Docquier–Grauert〔8〕により$\tilde{D}$は正則凸であるから

$$\lambda(K_n) \subset P_n \Subset P_{n+1}$$

をみたすような$\tilde{D}$の中の解析的多重円筒の列$\{P_n\}$がある。補題4より$\{1, 2, \cdots\}$の部分列$\{\nu_n\}$で，それぞれ，τ_{ν_n}，$\tilde{\tau}_{\nu_n}$がD_{ν_n}の中のコンパクト集合K'_n，$\tilde{D}_{\nu_n}$の中の相対コンパクト開集合P'_nを，K'_n，P_nの上に両正則にうつし，

$$\tau^{\nu_n}_{\nu_{n+1}}(P'_n) \subset P'_{n+1}, \quad \lambda_{\nu_n}(K'_n) \subset P'_n$$

をみたすようなものがある。

さてf_nをD_{ν_n}上の任意の正則函数とする。$(\tilde{D}_{\nu_n}, \varphi_{\nu_n})$は$(D_{\nu_n}, \varphi_{\nu_n})$の正則被であるから，$f_n$の$(\tilde{D}_{\nu_n}, \tilde{\varphi}_{\nu_n})$への解析接続$\tilde{f}_n$がある。すると合成函数

$\tilde{f}_n \circ (\tilde{\tau}_{\nu_n} | P'_n)^{-1}$　はP_n上で正則である。P_nは$\tilde{D}$の解析的多重円板であるから，Behnke〔1〕より$\tilde{D}$の正則函数$\tilde{F}$でK_n上で

$$|\tilde{F}_n - \tilde{f}_n \circ (\tilde{\tau}_{\nu_n} | \tilde{P}'_n)^{-1}| < \varepsilon_n$$

をみたすようなものがある。合成函数　$F_n = \tilde{F}_n \circ \lambda$　は　K_n　上で

$$|F_n \circ \tau_{\nu_n} - f_n| < \varepsilon_n$$

をみたす。（第1図参照）

$$\begin{tikzcd}
 & D_{\nu_n} \supset \arrow[dl, "f_n"'] \arrow[dd, "\lambda_{\nu_n}"] & K'_n \arrow[r, "\tau_{\nu_n} | K'_n", "同型"'] & K_n \subset & D \arrow[dd, "\lambda"] \arrow[dr, "F_n"] & \\
C & & & & & C \\
 & \tilde{D}_{\nu_n} \supset \arrow[ul, "\tilde{f}_n"] & P'_n \arrow[r, "\tilde{\tau}_{\nu_n} | P'_n", "同型"'] & P_n \subset & \tilde{D} \arrow[ur, "\tilde{F}_n"] &
\end{tikzcd}$$

（第　1　図）

§ 3. Cohomology 群の極限

$\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$ を多様体Mの上の領域の増加列，(τ_n, D, φ) をその極限，Lを複素Lie 群とする。τ_m^nは $n \leq m \leq \ell$ に対して $\pi_n^\ell = \pi_n^m \circ \pi_m^\ell$ をみたすような標準的写像 π_n^m:

$H^1(D_m, \mathfrak{O}_L) \to H^1(D_n, \mathfrak{O}_L)$ を導びく。

$\{H^1(D_n, \mathfrak{O}_L); \pi_n^m\}$ は有向集合$\{1, 2, \cdots\}$ の上のEilenberg–Steenrod [9] の意味での inverse system を形成している。その inverse limit を $\lim H^1(D_n, \mathfrak{O}_L)$ で表わし，標準的写像 $\pi_n: \lim H^1(D_n, {}_L), \to H^1(D_n, \mathfrak{O}_L)$, $\pi: H^1(D, \mathfrak{O}_L) \to \lim H^1(D_n, \mathfrak{O}_L)$ を考える。位相空間Xの上の群の層 $\mathfrak{F}$ を係数とする1次の cohomology 集合$H^1(X, \mathfrak{F})$ の元αが，あるXの開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_i; j \in I\}$ の $\{f_i f_j^{-1}\}$ の標準的像であるとき，(あまりよくないが簡単のために) $\alpha = 0$ と記す。$H^1(X, \mathfrak{F})$ の任意の元αが$\alpha = 0$をみたすとき$H^2(X, \mathfrak{F}) = 0$ と記す。

補題 8. $\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$ をStein 多様体Sの上の単連結な領域D_n の増加列，(τ_n, D, φ) をその極限とする。また (C^p, χ) が複素Lie群Lのneutral element e を含む連結成分 L_e の上の普遍被覆領域とする。このとき標準的写像$\pi: H^1(D, \mathfrak{O}_L) \to \lim H^1(D_n, \mathfrak{O}_L)$ にて $\alpha \in H^1(D, \mathfrak{O}_L)$ が$\pi(\alpha) = 0$ をみたせば，$\alpha = 0$である。

証明 $a \in L$を含むLの連結成分をL_a とする。C^p にて

$$x_a(z) = a \cdot x(z)$$

にてx_aを定義すると，(C^p, x_a) は L_a の普遍被覆領域である。さて

$$K_n \Subset K_{n+1}, \quad D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

をみたす様なDの中のコンパクト集合の列を$\{K_n\}$とする。この$\{K_n\}$に対して補題7を適用すると(1),(2)をみたす$\{1, 2, \cdots\}$の部分列$\{\nu_n\}$ と列$\{K'_n\}$が存在する。しかもこの場合$\nu_n = n$ と仮定しても一般性を失なわない。

今からしばらくこの証明の中においてのみC^pの点を太字で表わす。また群の逆元を示す-1も太字 $-\mathbb{1}$ で表わす。$\mathbf{x}(\mathbf{e})=e$をみたすC^pの点$\mathbf{e}$がある。C^p にてユークリッドの距離dを考えよう。xが $\mathbb{W}'$ を$\mathbb{C}$の近傍W' の上に両正則に写すような$\mathbf{e}$を中心，半径rのC^pの開球$\mathbb{W}'$ がある。$a, b \in W'$ に対して

$$\mathrm{dist}(a, b)=\mathrm{dist}((x \mid \mathbb{W}')^{-1}a, (x \mid \mathbb{W}')^{-1}b),$$

$$\|a\| = \mathrm{dist}(e, a)$$

$$\mathbb{W} = \left\{\mathfrak{z}; \mathrm{dist}(\mathbf{e}, \mathfrak{z}) < \frac{r}{2}\right\}, W = x(\mathbb{W})$$

とおく。$(x, y) \rightsquigarrow xy$ は$L \times L$よりLの上への連続写像であるから，任意の$\varepsilon > 0$に対して次の条件をみたす$\delta(\varepsilon)$がある：

$0<\delta(\varepsilon)<\varepsilon$, $a, b \in W$ が$\|b\|<\delta(\varepsilon)$をみたせば$ab \in W'$で$\mathrm{dist}(a, ab) < \varepsilon$，補題1より次のことを示せば十分である：

Dの開被覆$\mathfrak{U}=\{U_i ; i \in I\}$と各$n$に対して，各$\tau_n^{-1}(U_i) \cap \tau_n^{-1}(U_j) \neq \phi$ にて

$$f_{ij} \circ \tau_n = h_i^n (h_j^n)^{-\mathbb{1}}$$

をみたすような $\{h_i^n\} \in C^0(\tau_n^{-1}(\mathfrak{U}), \mathfrak{O}_L)$ があれば，

$\{f_{ij}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{O}_L)$ は各$U_i \cap U_j \neq \phi$ にて

$$f_{ij} = f_i f_j^{-\mathbb{1}}$$

をみたすような $\{f_i\} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{O}_L)$ をもつ。

ただし $\tau_n^{-1}(\mathfrak{U}) = \{\tau_n^{-1}(U_i) ; i \in I\}$ はD_nの開被覆である。$\tau_1^{-1}(U_i)$ にて

$$f^1 = (h_i^1)^{-\mathbb{1}} (h^2 \circ \tau_2^1)$$

とおけば，$f^1 \in H^0(D_1, \mathfrak{O}_L)$ はうまく定義できる。D_1 が連結であるから，ある$a_1 \in L$に対して$f^1(D_1) \subset L_{a_1}$ が成立する。簡単のため $x_1 = x_{a_1}$とおく。D_1 が単連結で，(C^p, x_1)が L_{a_1} の普遍被覆領域であるから，一価性の原理より$f^1 = x_1 \circ \mathbb{F}^1$ をみたすようなD_1 上のvector 値正則函数 $\mathbb{F}^1$ がある。補題7の条件(2)が成立しているからD上のvector 値正則函数 $\mathbb{H}^1$ で $\mathbb{F}^1$ は K_1' 上で一様に近似できるから，写像$f^1(x_1 \circ \mathbb{H}^1 \circ \tau_1)^{-\mathbb{1}}$ によるK_1' の像がWに含まれK_1' 上で

$$\| f^1 (x_1 \circ \mathbb{H}^1 \circ \tau_1)^{-\mathbb{1}} \| < \delta(r 2^{-3})$$

が成立するような H^1 がある。次に

$\{g^1_i\} = \{h^1_i\} \in C^0(\tau_2^{-1}(\mathfrak{U}), \mathfrak{O}_L)$ とおき，各 $\tau_2^{-1}(U_i)$ 上にて

$$g^2_i = h^2_i (x_1 \circ H^1 \circ \tau_2)^{-1}$$

とおくと，$\{g^2_i\} \in C^0(\tau_2^{-1}(\mathfrak{U}), \mathfrak{O}_L)$ に対し，各 $\tau_2^{-1}(U_i) \cap \tau_2^{-1}(U_j)$ $\neq \phi$ にて

$$f_{ij} \circ \tau_2 = g^2_i (g^2_j)^{-1}$$

が成立する。各 $\tau_1^{-1}(U_i)$ 上で

$$g^{1,2} = (g^1_i)^{-1} (g^2_i \circ \tau^1_2)$$

とおくと，$g^{1,2} \in H^0(D_1, \mathfrak{O}_L)$ はうまく定義され，写像 $g^{1,2}$ による K'_1 の像は W に含まれ K'_1 にて

$$\| g^{1,2} \| < \delta (r 2^{-3})$$

が成立している。次の条件をみたす

$\{g^1_i\} \in C^0(\tau_1^{-1}(\mathfrak{U}) \mathfrak{O}_L), \cdots, \{g^m_i\} \in C^0(\tau_m^{-1}(\mathfrak{U}), \mathfrak{O}_L)$

が定義されたと仮定しよう：

(1) $1 \leqq n \leqq m$ をみたす各 n に対し，各 $\tau_n^{-1}(U_i) \cap \tau_n^{-1}(U_j)$ にて

$$f_{ij} \circ \tau_n = g^n_i (g^n_j)^{-1}$$

(2) $1 \leqq n < \ell \leqq m$ をみたす各 n，ℓ に対し，各 $\tau_n^{-1}(U_i)$ にて

$$g^{n,\ell} = (g^n_i)^{-1} (g^\ell_i \circ \tau^n_\ell)$$

とおけば，$g^{n,\ell} \in H^0(D_n, \mathfrak{O}_L)$ はうまく定義され，写像 $g^{n,n+1}$ による K'_n の像は W に含まれ K'_n で

$$\| g^{n,n+1} \| < \delta (r 2^{-n-2})$$

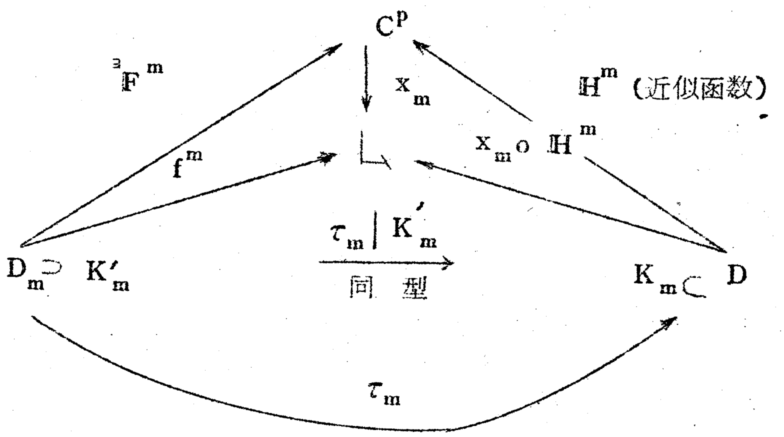
が成立している。各 $\tau_m^{-1}(U_i)$ 上で

$$f^m = (g^m_i)^{-1} (h^{m+1}_i \circ \tau^m_{m+1})$$

とおけば，$f^m \in H^0(D_m, \mathcal{O}_L)$ はうまく定義される。D_mは連結だから，ある$a_m \in L$ に対して$f^m(D_m) \subset L_{a_m}$ が成立する。$x_m = x_{a_m}$ とおき，上の議論をくり返すと（第2図参照），写像$f^m(x_m \circ \mathbb{H}^m \circ \tau_m)^{-1}$ によるK'_m の像がWに含まれK'_m 上で

$$\| f^m(x_m \circ \mathbb{H}^m \circ \tau_m)^{-1} \| < \delta(r\,2^{-m-2})$$

が成立するようなD上のvector 値函数 $\mathbb{H}^m$がある。



（第　2　図）

各$\tau_{m+1}^{-1}(U_i)$上で

$$g_i^{m+1} = h_i^{m+1}(x_m \circ \mathbb{H}^m \circ \tau_{m+1})^{-1}$$

とおけば，各 $\tau_{m+1}^{-1}(U_i) \cap \tau_{m+1}^{-1}(U_j) \neq \phi$ にて

$$f_{ij} \circ \tau_{m+1} = g_i^{m+1}(g_j^{m+1})^{-1}$$

が成立する。各 $\tau_m^{-1}(U_i)$ 上で

$$g^{m,m+1} = (g_i^m)^{-1}(g_i^{m+1} \circ \tau_{m+1}^m)$$

とおけば，$g^{m,m+1} \in H^0(D_m, \mathcal{O}_L)$ はうまく定義され，写像$g^{m,m+1}$ によるK'_mの像はWに含まれ，K'_m 上で

$$\| g^{m,m+1} \| < \delta(r\,2^{-m-2})$$

が成立する。かくして帰納法により(1),(2)をみたす $\{g_i^m\} \in C^0(\tau_m^{-1}(\mathfrak{U}), \mathfrak{O}\!\iota)$
の存在が $m=1,2,\cdots\cdots$ に対して示された。

さて写像 $g^{n,m}$ による K'_m の像はWに含まれ K'_n 上で

$$\| g^{n,m} \| < r\, 2^{-n-1},\ \mathrm{dist}(g^{n,m}, g^{n,m+1}) < r\, 2^{-m-3}$$

が成立する。したがって D_n 上の vector 値正則函数列 $\{(X \mid W)^{-1} \circ g^{n,m};\ m=n,n+1\ \cdots\}$ は $\tau_n^{n-1}(K'_{n-1})(\subset K'_n)$ にてその上の vector 値正則函数 $\mathbb{G}^n$ に一様収束する。しかも $\tau_n^{n+1}(K'_{n-1})$ 上で

$$\mathrm{dist}(\mathbb{e}, \mathbb{G}^n) < r\, 2^{-n}$$

が成立しているから，$\{g^{n,m};\ m=n, n+1, \cdots\cdots\}$ は τ_n^{n-1} にて

$$g^n = x \circ \mathbb{G}^n \in H^0(\tau_n^{n-1}(K'_{n-1}), \mathfrak{O}\!\iota_L)$$

に収束する。各 $i \in I$ に対して，$U_i \subset K_{n-1}$ をみたすn をとり，U_i にて

$$f_i = (g_i^n \circ g^n) \circ (\tau_n \mid K'_n)^{-1}$$

とおけば，$\{f_i\} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{O}\!\iota_L)$ はうまく定義され，各$U_i \cap U_j \neq \varphi$ にて

$$f_{ij} = f_i\,(f_j)^{-1}$$

が成立する。

補題8の証明においてL＝Cのときは各D_nが単連結であることを仮定する必要がないので，
$\mathcal{O} = \mathfrak{O}\!\iota_C$とおけば

系。$\{(D_n, \varphi_n)\}$をStein 多様体Sの上の領域の増加列，(D, φ)をその極限とすれば，標準的写像$H^1(D, Q) \to \lim H^1(D_n, Q)$は単射である。

$\{(D_n, \varphi_n);\ \tau_m^n\}$ を複素多様体Mの上の領域の増加列，(τ_n, D, φ)をその極限，
$(D_n^{\#}, \varphi_n^{\#}, \lambda_n)$，$(D^{\#}, \varphi^{\#}, \lambda)$を，それぞれ，$(D_n, \varphi_n)$，$(D, \varphi)$の普遍被領域，
$\tau_m^{n\#} : (D_n^{\#}, \varphi_n^{\#}) \to (D_m^{\#}, \varphi_m^{\#})$，$\tau_n^{\#} : (D_n^{\#}, \varphi_n^{\#}) \to (D^{\#}, \varphi^{\#})$ を，それぞれ，
τ_m^n，τ_n より導かれる写像とする。補題6 より$\{(D_n^{\#}, \varphi_n^{\#});\ \tau_m^{n\#}\}$ はMの上の領域の増加列で，$(\tau_n^{\#}, D^{\#}, \varphi^{\#})$はその極限である。すると $\tau_n \circ \lambda_n : D_n^{\#} \to D$ は標準的

写像 $\pi^{\#}: H^1(D, \mathfrak{A}_L) \to \lim H^1(D_n^{\#}, \mathfrak{A}_L)$ を導く。

<u>補題9.</u> $\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$ をStein 多様体Sの上の領域の増加列，(τ_n, D, φ) をその極限とする。また (C^p, x) が複素Lie 群Lの neutral element e を含む連結成分Le の上の普遍被覆領域とする。このとき標準的写像 $\pi^{\#}: H^1(D, \mathfrak{A}_L) \to \lim H^1(D_n^{\#}, \mathfrak{A}_L)$ にて $\alpha \in H^1(D, \mathfrak{A}_L)$ が ${}^{\#}\pi(\alpha) = 0$ をみたせば，${}^{\#}\alpha = 0$ である。

証明　第3図にて可換律が成立する。

$$\begin{tikzcd}
D_n^{\#} \arrow[r, "\tau_m^{n\#}"] \arrow[d, "\lambda_n"'] & D_m^{\#} \arrow[r, "\tau_m^{\#}"] \arrow[d, "\lambda_m"'] & D^{\#} \arrow[d, "\lambda"] \\
D_n \arrow[r, "\tau_m^n"] & D_m \arrow[r, "\tau_m"] & D
\end{tikzcd}$$

（第　3　図）

補題1よりDの開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_i; i \in I\}$，$\{f_{ij}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}_L)$ に対して各n について $\{f_{ij} \circ \tau_n \circ \lambda_n\} \in B^1(\lambda_n^{-1}(\tau_n^{-1}(\mathfrak{A})), \mathfrak{A}_L)$ が成立すれば，$\mathfrak{U}$

$\{f_{ij} \circ \lambda\} \in B^1(\lambda^{-1}(\mathfrak{U}), \mathfrak{A}_L)$ であることを示せばよい。各nについて $\tau_n \circ \lambda_n = \lambda \circ \tau_n^{\#}$，各nについて

$$\{f_{ij} \circ \lambda\ \tau_n^{\#}\} \in B^1(\tau_n^{-1}(\lambda^{-1}(\mathfrak{U})), \mathfrak{A}_L)$$

が成立している。しかも各 $D_n^{\#}$ が単連結であるから，補題8より次式を得る。

$$\{f_{ij} \circ \lambda\} \in B^1(\lambda^{-1}(\mathfrak{U}), \mathfrak{A}_L)$$

可換または可解であるような複素Lie 群Lに対して補題9の条件がみたされているから

<u>命題3.</u> Lを可換または可解な複素Lie 群，$\{(D_n, \varphi_n)\}$ を Stein 多様体の上の領域の

増加列，(D, φ) をその極限とする。Dが単連結ならば，標準的写像 $\pi : H^1(D, \mathcal{O}_L) \to \lim H^1(D_n, \mathcal{O}_L)$ にて $\alpha \in H^1(D, \mathcal{O}_L)$ が $\pi(\alpha) = 0$ をみたせば，$\alpha = 0$ である。

§ 4. Cousin の領域の交わりについて

この節では文字Lはつねに任意の，しかし固定された，可換な複素Lie 群を表わすことにする。n箇の単連結な平面領域の直積Pを C^n の単連結な多重円筒とよぶ。勿論 $H^1(P, \mathcal{O}_L) = 0$ が成立する。この節では $H^1(D, \mathcal{O}_L) = 0$ をみたす領域の交わりについて調べ，その結果を用いて例のCartan−Behnke−Stein の定理の高次元かつ値がLに属する場合への拡張を試みよう。

C^n の任意の相対コンパクトな単連結な多重円筒 Pに対して $H^1(G \cap P, \mathcal{O}_L) = 0$ をみたすような C^n の開集合GをL一正規であるとよぶ。また $G_p \Subset G_{p+1}$，$\bigcup_{p=1}^{\infty} G_p = G$ をみたすような C^n の開集合GをL一正規開集合列 $\{G_p\}$ で内部より近似されるという。

<u>命題 4.</u> 一つの可換な複素Lie 群Lに対して，L一正規開集合列 $\{G_p\}$ で内部より近似される C^n の領域Gは正則領域である。

証明　$1 \leqq m < n$，$1 < s_1 < \cdots < s_{n-m} \leqq n$ を任意の整数，$c_{s_1}, \cdots, c_{s_{n-m}}$ を任意の複素数とする。m次元の解析面平面 $H = \{z \,;\, z_{s_1} = c_{s_1}, \cdots, z_{s_{n-m}} = c_{s_{n-m}}\}$ を考える。${}^{\#}H^1(G, \mathcal{O}_L) = {}^{\#}H^1(G \cap H, \mathcal{O}_L) = 0$ を示そう。相対コンパクトな単連結な多重円板 $P_p = \{z \,;\, |z_1| < P, \cdots, |z_n| < P\}$ に対して，G_p がL一正規であるから $H^1(G_p \cap P_p, \mathcal{O}_L) = 0$，$\{G_p \cap P_p\}$ は C^n の領域の増加列でGがその極限であるから，補題9より ${}^{\#}H^1(G, \mathcal{O}_L) = 0$ をえる。次に ${}^{\#}H^1(G \cap H, \mathcal{O}_L) = 0$ であるが，そのためには C^n が $(z, w) = (z_1 \cdots, z_m, w_1 \cdots, w_{n-m})$ 空間で $H = \{(z, w) \,;\, W_1 = \cdots = W_{n-m} = 0\}$ であると仮定して一般性を失なわない。

仮定より次の条件をみたす正数列 $\{\varepsilon_p\}$，$\{a_p\}$ がある（第4図参照）。

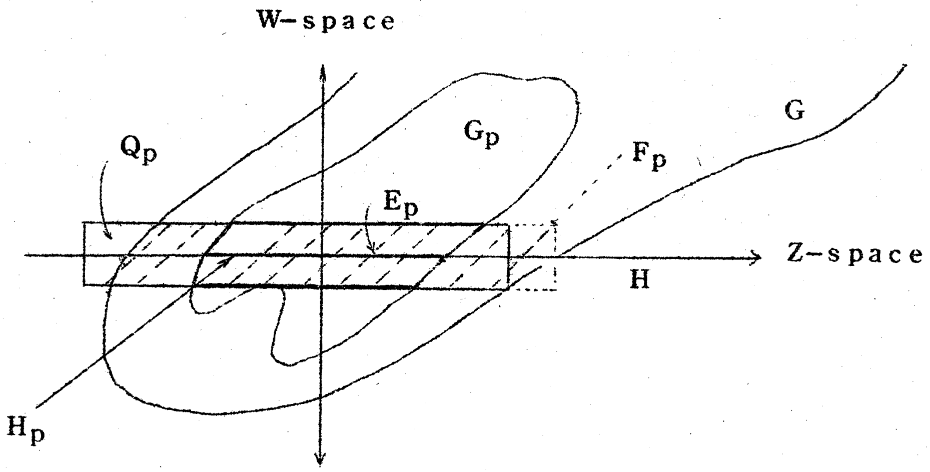
(1)　$\varepsilon_1 > \cdots > \varepsilon_p > \varepsilon_{p+1} > \cdots$，$\varepsilon_p \to 0$

$$a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} < \cdots, \ a_p \to \infty$$

(2) $E_p \subset F_p$　ここに $E_p = G_p \cap Q_p$,

$$Q_p = \{ (z, w) ; |z_\nu| < a_p, |w_\mu| < \varepsilon_p \},$$

$$F_p = \{ (z, w) ; (z, o) \in G \cap H, |w_\mu| < \varepsilon_p \}$$



(第　4　図)

$H_p = G \cap H \cap Q_p$ とおく。任意の$G \cap H$の開被覆 $\mathfrak{U} = \{ U_i ; i \in I \}$ と $\{ f_{ij} \} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{O}_L)$ を考える。

$$V_i^p = \{ (z, w) ; (z, o) \in G \cap H \} \cap E_p, \ \mathfrak{V}^p = \{ V_i^p ; i \in I \}$$

とおけば$\mathfrak{V}^p$はE_p の開被覆である。各

$V_i^p \cap V_j^p = \{ (z, w) ; (z, o) \in U_i \cap U_j \} \cap E_p$ にて

$$F_{ij}^p (z, w) = f_{ij}(z)$$

とおけば, $\{ F_{ij}^p \} \in z^1(\mathfrak{V}^p, \mathfrak{O}_L)$ である。

一方G_p はL一正規であるから, $H^1(E_p, \mathfrak{O}_L) = 0$である。補題1より$\{ F_{ij}^p \}$ はある $\{ F_i^p \} \in C^0(\mathfrak{V}^p, \mathfrak{O}_L)$ のcobounday である。

$$U_i^p = U_i \cap H_p, \ \mathfrak{U}^p = \{ U_i^p ; i \in I \}$$

とおけば $\mathfrak{U}^p$ は $\mathfrak{U}$ の制限となる H_p の開被覆である。各 U_i^p にて

$$f_i^{(p)}(z) = F_i^{(p)}(z, o)$$

とおけば，$\{f_{ij}\} \in z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_L)$ の H_p への制限 $\{f_{ij} \mid H_p\} \in Z^1(\mathfrak{U}^p, \mathcal{O}_L)$ は $\{f_i^p\} \in C^0(\mathfrak{U}^p, \mathcal{O}_L)$ は cobounday である。

$\{f_{ij}\}$ の任意性と，$\{H_p\}$ は領域の増加列でHがその極限であることより，補題9を用いると ${}^{\#}H^1(G \cap H, \mathcal{O}_L) = 0$ をえる。

結局我々は命題2の条件がGに対して成立することを示したことになるから，Gは正側領域である。R^n の開集合Gの境界点 x_0 は次の条件が成立するときGの連続な（またに擬凸な）境界点と呼ばれる：

$\partial G \cap V = \{x = (x_1, \cdots\cdots, x_n) \;;\; x_j = g,\ x \in V\}$ をみたすような x_0 の近傍Vと Vで連続な $(n-1)$ 変数 $x_2, \cdots, \hat{x}_j, \cdots, x_n$ の実数値函数gがある。

（または $G \cap V$ が正則開集合であるような x_0 の近傍Vがある。）

更にgがVで連続微分可能ならば，x_0 は普通の意味での滑らかな境界点になる。

<u>命題5.</u> 一つの可換な複素Lie 群Lに対してL一正規な C^n の開集合Gはその連続な境界点 z^0 にて擬凸である。

証明 $z_j = x_j + \sqrt{-1}\ y_j$ とおく。

$$\partial G \cap V(\varepsilon) = \{z \;;\; x_1 < g(y_1, z_2, \cdots, z_n),\ z \in V(\varepsilon)\}$$

をみたすような $\varepsilon > 0$ と $V(\varepsilon)$ で連続な変数 $y_1, z_2, \cdots, z_n$ の実数値連続函数gがあるとしてよい。ここに $V(t) = \{z \;;\; |z_j - z_j^0| < t\}$ とおく。各 $0 \leqq t < 1$ に対し

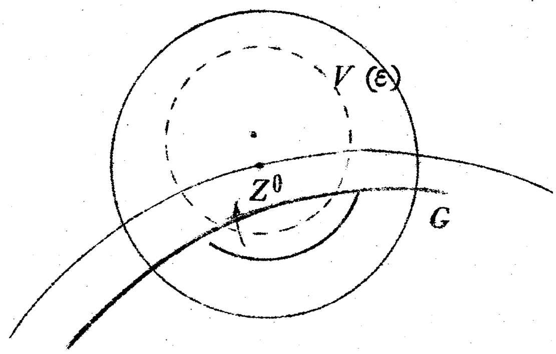
$$E_t = \left\{z \;;\; z_1 < g(y_1, z_2, \cdots, z_n) - \frac{t\varepsilon}{2},\ z \in V\left(\frac{1-t}{2}\right)\right\}$$

とおくと，平行移動 $w_1 = z_1 + \frac{t\varepsilon}{2}$, $w_j = z_j$ $(j \neq 1)$ によって E_t はw一空間の集合

$$\left\{w \;;\; u_1 < g(v_1, w_2, \cdots, w_n),\ \left(w_1 - \frac{t\varepsilon}{2}, w_2, \cdots w_n\right) \in V\left(\frac{1-t}{2}\right)\right\}$$

$$= G \cap \left\{w \;;\; \left(w_1 - \frac{t\varepsilon}{2}, w_2, \cdots, w_n\right) \in V\left(\frac{1-t}{2}\right)\right\}$$

に写される。（第5図 参照）。右辺の{ }は相対コンパクトな単連結な多重円板でGはL一正規



（第　5　図）

であるから，E_t も L－正規である。すると $E_0=G \cap V\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ はL－正規開集合列 $\{E_t\}$ で内部より近似されるから，命題 4 より E_0 は正規領域である。

定理1. 一つの可換な複素Lie 群Lに対してL－正規な連続な境界を持つ C^n の開集合Gは正則領域である。

証明　Oka〔15〕と命題5よりGは正則領域である。

補題10. 任意の自然数pに対し，準同型写像 $\alpha: GL(1, C) \to GL(p, C)$，$\beta: GL(p, C) \to GL(1, C)$ で $\beta \circ \alpha$ がGL（1，C）の恒等写像であるようなものがある。

証明　任意の $z \in GL(1, C)$，$w \in GL(p, C)$ に対し，それぞれ

$$d(z)=\begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta(w)=\det w$$

を考えればよい。

補題11. 複素Lie 群L，L′に対し準同型写像 $\alpha: L' \to L$，$\beta: L \to L'$ で $\beta \circ \alpha$ がL′の恒等であるようなものがあるとする。任意の複数数体Xにつき，α の導く写像 $\pi: H^1(X, \mathfrak{O}_{L'}) \to H^1(X, \mathfrak{O}_L)$ は単射である。

証明　Xの任意の開被覆$\mathfrak{U}=\{U_i\}$と$\{f_{ij}\}$，$\{g_{ij}\}\in Z^1(\mathfrak{U},\mathfrak{O}_{L'})$で

$\{f_i\}\in C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{O}_L)$に対し　$U_i\cap U_j\neq\phi$　にて

$$f_i^{-1}(\alpha\circ f_{ij})\,f_j=\alpha\circ g_{ij}$$

をみたすものを考える。すると$\{\beta\circ f_i\}\in C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{O}_{L'})$に対し，各　$U_i\cap U_j\neq\phi$

にて

$$(\beta\circ f_i)^{-1}\ f_{ij}\ (\beta\circ f_j)=g_{ij}$$

が成立する。

補題１０，１１より

定理２．任意の自然数Pについて$L=GL$，（P，C）に対しても，命題１，２，４，５および定理１が成立する。

注意(1)　$L=C$に対しては，L－正規の定義にて，$H^1(G\cap P,\mathcal{O})=0$　の代りに，$G\cap P$がCausin－I型という条件でおきかえてよい。

(2)　L－正規の定義におけるPとしては各成分が二つの円板の交わりである弓形の領域の直積につまり二つの多重円板の交わりに限定しても，同じ結果を得る。

(3)　Docquier－Grauert　〔8〕を用いて，定理１をStein　多様体の領域に拡張できる。

引　用　文　献

1. Behnke, H., Généralisation du théorème de Runge pour les fonctions multiformes des variables complexes. Coll. sur les fonct. des plus. var. Bruxelles (1953).
2. Behnke, H., und K. Stein, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zur vorgegebenen Null- und Pollstellenflächen. Jber. Deut. Math. Verein. 47 (1937), 177-192.
3. Behnke, H., Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen.Math. Ann. 120 (1948), 430-461.
4. Bochner, S., and W. T. Martin, Several complex variables. Princeton Univ. Press (1948).
5. Cartan, H., Les problèm de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes. C.R. Paris 199 (1934), 1284-1287.
6. Cartan, H., Sur les premières problèmes des Cousin. C. R. Paris 207 (1938), 558-560.
7. Cartan, H., et al. Theorie des fonctions de plusieurs variables: Sem. de Cartan, Ecle Norm. Sup. (1951-52).
8. Docquier, F., und H. Grauert, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfltigkeit. Math. Ann. 140 (1960), 94-123.
9. Eilenberg, S., and N. Steenfod, Foundations of algebraic topolagy. Princeton Univ. Press.
10. Kajiwara, J., On the limit of a monotonous sequence of Cousin's domains. J. Math. Soc. Japan 17 (1965), 36-46.
11. Kajiwara, J., Some Characterizations of Stein manifold through the notion of locally regular boundary points. Kōdai Math. Sem. Rep. 16 (1964), 36-46.
12. Kajiwara, J., Note on a Cousin-II domain over C^2. Ibid. 17 (1965), 44-47.

13. Kajiwara, J., Relations between domains of holomorphy and multiple Cousin's problems. Ibid., 261-272.
14. Oka, K., Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables: II Domaines d'holomorphie. J. Sci. Hiroshima Univ. 7 (1937), 115-130.
15. Oka, K., Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables: IX Domaines finis sans point critique intérieur. Jap. J. Math. 23 (1953), 97-155.
16. Stein, K., Überlagerungen holomorph- vollstandiger komplexer Raume. Arch. Math. 7 (1956), 354-361.
17. Thullen, P., Sur les deusieme probleme de Cousin. C. R. Paris 200 (1953), 720-721.