

## 多体問題の離散固有値について

京都大学 理学部 内山 淳

### § 1. Introduction

多粒子系に対する Schrödinger 作用素の本質的自己共役性については、Katoの有名な論文以来、詳しく研究されている。しかし、その Schrödinger 作用素のスペクトル構造については、電子が 2 個以上という場合には、あまり調べられていないようである。このスペクトル構造を研究したものとしては、次のような論文がある。まず一番簡単な場合であるヘリウム原子の場合には、その原子核が質量無限大としたとき、可算無限個の離散固有値をもつことを 1961 年 Kato [2] は示した。ついで、1956 年 Putnam [3] は強くイオン化された原子 (すなわち、 $Z$  をその原子の原子番号とし、 $N$  をその原子の電子数とすると、

$$Z > \frac{5}{8} N(N-1)$$

というような原子) に対して、離散固有値が少くとも一つ存在することを示した。しかし、Putnam は essential spectrum の下端の評価及び試験函数のとり方の二つの段階において損をしているため、このような強い条件のもとでしか、結果をだせなかったようである。この二点を詳しく調べることによって、1960 年 Zislislin [4] は多体問題のスペクトル構造に関して、画期的な結果をだした。彼はまず、その essential spectrum が  $(\mu, \infty)$  ( $\mu \leq 0$ ) であることを示した。ついで、

$$H = - \sum_{k,h=1}^N \sum_{\nu=0}^2 a_{kh} \frac{\partial^2}{\partial x_{3k-\nu} \partial x_{3h-\nu}} - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{b_{kj}}{|\Gamma_k - a_j|} + \\ + \sum_{\substack{k,h=1 \\ k < h}}^N \frac{c_{kh}}{|\Gamma_k - \Gamma_h|}$$

という Schrödinger 作用素は、 $(a_{kh})$  が constant positive matrix で

$$\sum_{j=1}^M b_{kj} > \sum_{\substack{k=1 \\ h \neq k}}^N c_{kh} \quad (\text{この条件は陽イオン, 中性の原子または, 中性の分子に対して, みたされ})$$

ている。)という条件をみたしているならば、 $(-\infty, \mu)$  に  $\mu$  にのみ集積するような可算無限個の離散固有値をもつことを示した。ところで最近 Jørgens [1] は静磁場における多粒子系の essential spectrum に関して、Zislín と同じ結果をだした。我々はこの Jørgens の結果を基礎にし、Zislín の方法を用いることによつて、静磁場における多粒子系が陽イオン中性の原子または中性の分子ならば離散固有値を可算無限個もつことを示すことができる。その際離散固有値が存在するかしないかということに関しては、十分遠方における引力 potential と vector potential の減少 order のみが影響してくることがわかる。そこで得られた結果は、二体問題の Schrödinger 作用素

$$-\Delta + c(x)$$

が十分遠方において、 $c(x) \leq -\frac{1}{4-\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$  ならば可算無限個の離散固有値をもつというよく知られた事実の一種の拡張にもなっている。

## § 2. 結 果

まず  $R^m$  を  $m$  次元ユークリッド空間とし、 $R_k^{3N}$  を変数が  $\Gamma_k = (x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k})$  である 3 次元ユークリッド空間とし、 $R_{(k)}^{3N}$  を変数が  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \Gamma_{k+1}, \dots, \Gamma_N$  である  $(3N-3)$  次元ユークリッド空間とする。

さて、我々は静磁場における多体系を考えよう。この多体系の原子核は質量無限大であるとする、その Schrödinger 作用素は次のような形で与えられる。

$$(1) \quad H = \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{\nu=0}^2 \left( i \frac{\partial}{\partial x_{3k-\nu}} + b_{3k-\nu}(\Gamma_k) \right)^2 + q_k(\Gamma_k) \right\} + \sum_{\substack{k,h=1 \\ k < h}}^N P_{kh}(\Gamma_k, \Gamma_h)$$

ここにおいて、 $b_{3k-\nu}$  は vector potential であり、 $q_k$  は引力 potential、 $P_{kh}$  は相互 potential である。さて、我々は Jørgens [1] の条件をみたすように、次のような仮定をおこう。

(c-I)  $b_{3k-\nu}, q_k, P_{kh}$  は実数値関数である。

(c-II)  $b_{3k-\nu}^2, \frac{\partial b_{3k-\nu}}{\partial x_{3k-\nu}}, q_k$  は  $L^2_{loc}(R^{3N}_k)$  に属している。

(c-III) 適当な  $\beta (0 < \beta < 2), r (0 < r < \frac{3}{2}), c_k > 0, d_{kh} > 0, \epsilon > 0$  及び十分大きな  $R_0 > 0$  が存在して,

$$(2) \quad q_k(\Gamma_k) \leq -\frac{c_k}{|\Gamma_k|^\beta} \quad ; \quad |\Gamma_k| \geq R_0$$

$$(3) \quad |b_{3k-\nu}(\Gamma_k)| \leq \frac{\text{const.}}{|\Gamma_k|^{\frac{\beta}{2} + \epsilon}} \quad ; \quad |\Gamma_k| \geq R_0$$

$$(4) \quad 0 \leq P_{kh}(\Gamma_k, \Gamma_h) \begin{cases} \leq \frac{d_{kh}}{|\Gamma_k - \Gamma_h|^r} & ; \quad |\Gamma_k - \Gamma_h| \leq 1 \\ \leq \frac{d_{kh}}{|\Gamma_k - \Gamma_h|^\beta} & ; \quad |\Gamma_k - \Gamma_h| \geq 1 \end{cases}$$

$$(5) \quad q_k(\Gamma_k), \frac{\partial b_{3k-\nu}}{\partial x_{3k-\nu}}(\Gamma_k) \quad \text{は} \quad |\Gamma_k| \rightarrow \infty$$

のとき, 一様に 0 に近づく。すると, Jörgens [1] によれば,  $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}_{L^2}^2(R^{3N})$  とすると,  $H$  は下に有界な自己共役作用素であることがわかる。もちろん, この場合微分演算は distribution の意味で解釈する。さらに  $H$  の essential spectrum は  $[\mu, \infty)$  となる。この  $\mu$  としては,

$$(6) \quad \mu = \begin{cases} 0 & : \quad N = 1 \\ \min_{1 \leq i \leq N} \inf_{\varphi \in \mathcal{D}_{L^2}^2(R^{3N}_{(i)})} (H_{(i)} \varphi, \varphi)_{L^2(R^{3N}_{(i)})} & ; \quad N \geq 2 \\ \|\varphi\|_{L^2(R^{3N}_{(t)})} = 1 \end{cases}$$

で与えられる。但し、

$$(7) \quad H_{(i)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \left\{ \sum_{\nu=0}^2 \left( i \frac{\partial}{\partial x_{3k-\nu}} + b_{3k-\nu}(\Gamma_k) \right)^2 + \right. \\ \left. + q_k(\Gamma_k) \right\} + \sum_{\substack{k, h=1 \\ k < h, k, h \neq i}}^N P_{kh}(\Gamma_k, \Gamma_h)$$

である。さて、我々は次のような函数をとってこよう。

$$(8) \quad g_1(x_1, x_2, x_3) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \|g_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1.$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3) \equiv 0; \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq R_0,$$

そこで  $g_\ell(x) = \ell^{\frac{3}{2}} g_1(\ell x_1, \ell x_2, \ell x_3)$  ( $1 \geq \ell > 0$ ) とおくと

$\|g_\ell\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1$  である。すると、 $N=1$  の場合には

$$(9) \quad (H g_\ell, g_\ell) \leq \text{const.} \ell^{\beta+\epsilon'} - \text{const.} \ell^\beta \quad (\epsilon' > 0)$$

となり、 $\ell$  を十分小さくとれば、 $(H g_\ell, g_\ell) < 0$  となるから、離算固有値は少なくとも一つ存在することがわかる。これより(6)をみれば  $N \geq 2$  のとき  $\mu < 0$  であることも分る。次いで  $N \geq 2$  とする。 $(N-1)$  個の系に対しては離散固有値が少なくとも一つ存在すると仮定すると、(6)より適当な作用素  $H_{(i_0)}$  と、適当な函数  $\varphi_0$  が存在して

$$(10) \quad \varphi_0 \in \mathcal{D}_{L^2}^2(\mathbb{R}_{(i_0)}^{3N}), \quad \|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{R}_{(i_0)}^{3N})} = 1, \quad \text{且つ}$$

$$H_{(i_0)} \varphi_0 = \mu \varphi_0$$

となる。そこで試験函数として、 $\psi_\ell = \varphi_0 - g_\ell(\Gamma_{i_0})$  をとると、 $\|\psi_\ell\| = 1$  である。ところで、

$$(11) \quad \lim_{\ell \rightarrow 0} \int_{R^{3N}} \frac{|\varphi_0 g_1|^2}{|\ell \Gamma_j - \Gamma_i|^\delta} dx = \int_{R_{i_0}^{3N}} \frac{|g_1|^2}{|\Gamma_{i_0}|^\delta} d\Gamma_{i_0}$$

(  $0 < \delta < 3$  )

ということが成り立つから、

$$(c-IV) \quad c_k > \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^N d_{kh}$$

という条件をおくと、十分小さな  $\ell$  に対して、

$$(12) \quad (H\psi_\ell, \psi_\ell) \leq u + \text{const.} \cdot \ell^{\beta+\epsilon} - \text{const.} \cdot \ell^\beta < \mu$$

となり、この場合にも離散固有値が少なくとも一つ存在することがわかる。ところで今  $H$  は  $s$  個の離散固有値をもつと仮定しよう。その固有値を  $\{\lambda_p\}_{p=1, \dots, s}$ 、正規直交固有函数を  $\{u_p\}_{p=1, \dots, s}$  とする。そして、

$$(13) \quad v_\ell = \psi_\ell + \sum_{p=1}^s \beta_\ell^{(p)} u_p, \quad \beta_\ell^{(p)} = -(\psi_\ell, u_p)$$

とおく。すると、我々の条件のもとにおいては、十分小さい  $\ell$  に対して

$$(14) \quad (Hv_\ell, v_\ell) = (H\psi_\ell, \psi_\ell) - \sum_{p=1}^s \lambda_p |\beta_\ell^{(p)}|^2$$

$$\leq u + \text{const.} \cdot \ell^{\beta+\epsilon} - \text{const.} \cdot \ell^\beta < \mu$$

となる。ところで

$$(15) \quad v_\ell \in \mathcal{D}_{L^2}^2(R^{3N}), \quad \|v_\ell\| \leq 1, \quad (v_\ell, u_p) = 0$$

(  $p = 1, \dots, s$  )

であるから,  $\tilde{v} = v_{\ell} \cdot \|v_{\ell}\|^{-1}$  とおくと,  $(H_{\tilde{v}}, \tilde{v}) < \mu$  で,  $\|\tilde{v}\| = 1$  となる。よって結局我々は次の定理を得たことになる。

### 定 理

条件 (c-I) ~ (c-IV) のもとで,  $H$  の essential spectrum は  $(\mu, \infty)$  である。ここで  $N=1$  のとき  $\mu=0$  であり,  $N \geq 2$  のとき,  $\mu < 0$  である。また  $(-\infty, \mu)$  には可算無限個の離散固有値が存在し, それらは,  $\mu$  にのみ集積している。

最後に注意を二つ与えておこう。一つは, (c-III) における条件(2), (3)が  $\mathbb{R}^N$  の原点を頂点とするある円錐状の領域内でのみ成り立てばよいことである。但し,  $b_{3k-\nu}(\Gamma_k)$  はその外部においても  $|\Gamma_k| \rightarrow \infty$  のとき, 一様に 0 に収束することは仮定する。それは試験函数としてとった  $g_k(x)$  が(8)の条件をのみ, みたせばよかったから, 今の場合その円錐状の領域にのみ support をもつようなものをとってくればよいからである。二つめの注意は,  $\beta=2$  のときに (c-III) の条件がみたされている場合である。このとき我々は, (c-IV) の代りに,

$$(c-IV)' \quad c_k - \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^N d_{kh} > \frac{1}{4}$$

という仮定をおけば, 同様な結果を求めることができる。

### 文 献

- [1] Jørgens, K.; Über das wesentliche Spektrum elliptischer Differentialoperatoren vom Schrödinger-Typ. (to appear).
- [2] Kato, T.; On the existence of solutions of the Helium wave equation, Trans. Amer. Math. Soc. 70, 2, 212-218 (1951).
- [3] Putnam, C.R.; Note on the many-particle problem, Quart. Appl. Math. 14, 1, 101-102 (1956).

- [4] Žislín, G.M.: Discussion of the spectrum Schrödinger operator for a many-particle system, Trud. Mosk. Mat. Obšč. 9, 81-120 (1960). (in Russian)