数理解析研究所講究録
16巻 1966年 125-149

函数空間における最適制御問題について

東京大学教養学部　辻　岡　邦　夫

1. 序

Balakrishnan の論文，"Optimal Control Problems in Banach Spaces" (J.S.I.A.M. Control Vol.3, No.1, 1965) についての解説をする．（フィードバック解最適過程論に関する部分は割愛した。）

方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \qquad t \geqq 0 \tag{1}$$

ここに

$x(t)$ は $R^+ = \{t;\ t \geqq 0\}$ で定義され値をバナッハ空間 X_1 にとる函数，$u(t)$ は R^+ で定義され，バナッハ空間 X_2 で値をとる函数とし A は X_1 で稠密に定義され，値域を X_1 にもつ閉一次作用素，B は X_2 から X_1 への有界一次作用素とする，

を考える．

(1) に於いて $B = 0$ とおいた

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \qquad t \geqq 0 \tag{2}$$

は A に適当な条件があれば（ A が必ずしも有界作用素でなくても）任意の $x_0 \in D(A)$ （ A の定義域）に対し

$$x(0) = x_0$$

をみたす一意的な解

$$x(t) = s(t)x_0$$

をもつ.

$S(t)$ を A を生成作用素とする半群といい，次の性質をみたす.

1. $S(t)$, $(t \geqq 0) \in \mathcal{L}(X_1, X_1)$ ($= X_1$ から X_1 へのすべての連続一次作用素の集合)
2. $\displaystyle \text{s-}\lim_{t \to 0} S(t)x = x$
3. $S(t+s) = S(t)S(s) \qquad t \geqq 0, \quad s \geqq 0$
4, $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax \quad \text{for} \quad x \in D(A)$

$S(t)$ は A が有界作用素の場合

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

の拡張となつている.

Aがある半群の生成作用素となる条件については [4] [7] 参照

次に方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(t) \qquad t \geqq 0 \tag{3}$$

に関する次の定理を述べておく.

定理 1.
A が半群 $S(t)$ $t \geqq 0$ の生成作用素とし，$f(t)$ を強可測かつ R^+ の任意有限区間上で Bochner 可積分 ([7]) とし $f(t) \in D(A)$ a.e. t $\|Av(t)\|$ が R^+ の有限区間で可積分ならば

(3) の解は

$$x(t) = S(t)x(0) + \int_0^t S(t-\sigma)f(0)d\sigma$$

とかける.

2. 準備

本稿で扱う空間はすべて実ヒルベルト空間又は実バナッハ空間に限る。複

素空間への拡張は容易である。

定義 1. バナッハ空間 X の dual X^* とは X 上の連続一次汎函数のつくる空間のことである.

$f^* \in X^*$ なるとき $f^*(x) = \langle f^*, x\rangle_{X^* \times X} = \langle f^*, x\rangle$ と記す.

定義 2. バナッハ空間が反射的 (reflexive) とは $X \cong X^{**}$ となること. X が反射的ならば $L^p([0,T],X) = \{u(\cdot) \mid u(\cdot)$ は $(0,T)$ 上で定義され X 上の値をとる強可測函数で $\int_0^T \|u(t)\|^p dt < \infty\}$ $= L^p(X)$, $p > 1$ にノルム $\|u\|_{L^p} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$ を入れたものは反射的なバナッハ空間である.

このとき $(L^p[X])^* = L^q[X^*]$ となる. $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ ([5] 参照)

補題 1. 反射的なバナッハ空間 X で有界集合は弱コンパクトである. ([7])

補題 2. バナッハ空間の凸集合に関しては強閉と弱閉は一致する. ([7])

補題 3. (Balakrishnan [1]) X を反射的なバナッハ空間とする. $g(\cdot)$ を X の有界, 凸, 閉な部分集合 C 上で定義された連続な凸実数値汎函数とすると $u_0 \in C$ が存在して

$$\inf_{u \in C} g(u) = g(u_0)$$

証明 $\{u_n\} \subset C$

が存在して $g(u_n) \geqq g(u_{n+1})$, $n = 1,2,\ldots$

$$\lim_{n \to \infty} g(u_n) = \inf_{u \in C} g(u)$$

補題 1.より部分列 $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ があつて

$$u_{n_k} \longrightarrow u_0 \in C \quad (k \to \infty)$$

連続な凸汎函数は弱下半連続である.

これを背理法で証明する.

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} g(u_{n_k}) < g(u_0) - \varepsilon \qquad \varepsilon > 0$$

なる $\varepsilon > 0$ が存在したとすると $\{u_{n_k}\}$ の部分列 $\{u_{n_{k'}}\}$ が存在して

$$g(u_{n_{k'}}) < g(u_0) - \varepsilon$$

が成り立つ. $K = \{u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_{i'}, \lambda_i \geqq 0\ (i = 1,2,\ldots,k),\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$ $u_{i'} \in \{u_{n_{k'}}\},\ k = 1,2,3,\ldots\}$ とおくと, K の弱閉包と強閉包は補題 2.により一致する. これを K^a とかけば u_0 は K^a に属する. $g(\cdot)$ の連続性により $\lambda_i \geqq 0\ (i = 1,2,\ldots k)$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $u_{i'} \in \{u_{n_k}\}$ が存在して

$$\left|g(u_0) - g\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i'\right)\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

となる. これより

$$\begin{aligned} g(u_0) &\leqq g\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i'\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(u_i') && (g(\cdot)\text{の凸性}) \\ &\leqq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (g(u_0) - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} && (u_i'\ (i=1\ldots k) \in \{u_{n_{k'}}\}) \\ &= g(u_0) - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \varepsilon \leqq 0$$

これは矛盾

$$\therefore \lim_{k\to\infty} g(u_{n_k}) \geqq g(u_0)$$

$$\therefore \inf_{u\in C} g(u) = g(u_0)$$

定義 3. バナッハ空間 X が一様に凸とは任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$\|x\| \leqq 1 \ , \ \|y\| \leqq 1, \ \|x - y\| \geqq \varepsilon \qquad x, y \in X$$

ならば $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqq 1-\delta(\varepsilon)$ のこと

例 X が一様に凸なバナッハ空間ならば $L^p[(0,T)X]$ も一様に凸なバナッハ空間．ヒルベルト空間は一様に凸である．

補題 4. (Balakrishnan [1]) X が一様に凸ならば補題 2.で inf を与える元のうちノルム最小のものが一意的に存在する．

証明 x_0, y_0, $(x_0 \neq y_0)$ がノルム空間の最小化元とすると $\frac{x_0+y_0}{2} \in C$ かつ $\left\|\frac{x_0+y_0}{2}\right\| < \|x_0\|$, $g\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) < g(x_0)$ となり矛盾

補題 5. (Balakrishnan [1]) X をバナッハ空間とし，$f_i(\cdot)$ $(i = 0,1,2,\ldots,N)$ を X 上の凸な実数値汎函数とし

$$C = \{x \in X;\ f_i(x) \leqq 0,\ i=1,\ldots,n\}$$

とおく．

$$f_0(x_0) = \inf_{x\in C} f_0(x) \qquad x_0 \in C$$

を仮定すれば

$$\alpha_i \ (i=0,1,\ldots,n) \qquad \alpha_i \geqq 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i > 0$$

が存在して

$$\inf_{x\in X}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f_i(x) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i f_i(x_0)$$

証明　$T(x) = \{f_i(x) - f_i(x_0)\}_{i=1,2,\ldots,n} \in E_{n+1}$

$$E = \{Y ; Y \geqq T(x) \quad \text{for some} \quad x \in X\} < E_{n+1}$$

E は凸かつ原点は E の境界点だから原点を通る E の接平面

$\{x; \sum_{i=0}^{n}\alpha_i x_i = 0\}$ が存在し

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i y_i \geqq 0 \qquad \{y_i\}\in E$$

しかるに $y_i \geqq 0$ ならば $\{y_i\}\in E$　　$\therefore \alpha_i \geqq 0,\ \sum \alpha_i > 0$

$$\{f_i(x) - f_i(x_0)\}\in Y, \quad x\in X$$

故に

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(f_i(x) - f_i(x_0)) \geqq 0 \qquad \inf_{x\in X}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f_i(x) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i f_i(x_0)$$

補題 6.　H をヒルベルト空間とし L を H 上の連続一次作用素とすると $H = R(L^*)^a \oplus N(L)$, $R(L^*)$ は L^* の値域, $N(L)$ は L の零点からなる集合. 補題 5.の応用として定理 2.は 3 章の最終値問題に対応している.

定理 2.　(Balakrishnan [1])

H_1, H_2 をヒルベルト空間 $L\in \mathcal{L}(H_2,H_1)$, $y\in H_1$ $(y \neq 0)$

$$f_0(u) = \|Lu - y\|_{H_1}$$

$$f_1(u) = \|u\|_{H_2} - M$$

とすると, $f_1(u) \leqq 0$ なる条件の下で $f_0(u)$ を infimum にする u_0 が存在する. u_0 に対して $k_0 \geqq 0$ が存在して

$$L^*Lu_0 - L^*y + k_0u_0 = 0 \tag{4}$$

が成り立つ.

(i) $k_0 > 0$ ならば u_0 はノルム最小の最小化元.

(ii) $k_0 = 0$ ならばノルム最小の最小化元 v_0 は

$$v_0 = \lim_{n\to\infty} u_n$$

$$u_n = (L^*L + k_n)^{-1}L^*y = (L^*L + k_n)^{-1}L^*Lu_0$$

$\{k_n\}$ は $k_n > 0$, $k_n \to 0$ なる任意の数列とする.

証明 先ず最小化元 u_1, u_2 ($u_1 \neq u_2$) が存在したとすると $Lu_1 = Lu_2$ である. (もし $Lu_1 \neq Lu_2$ とすると $\left\|\frac{u_1+u_2}{2}\right\| \leqq M$, $f_0(\frac{u_1+u_2}{2}) < f_0(u_1) = f_0(u_2)$)

$$C = \{u;\ f_1(u) \leqq 0\} = \{u;\ \|u\| \leqq M\} < H_2$$

は有界, 凸, 閉, 故補題2.より $u_0 \in C$ があつて

$$\alpha_0 f_0(u) + \alpha_1 f_1(u) \geqq \alpha_0 f_0(u_0) + \alpha_1 f_1(u_0), \quad u \in H_2$$

即ち

$$\alpha_0 \|Lu-y\|_{H_1} + \alpha_1 \|u\|_{H_2} \geqq \alpha_0 \|Lu_0-y\|_{H_1} + \alpha_1 \|u_0\|_{H_2}$$

$h \in H_2$, $\varepsilon > 0$ に対して $u = u_0 + h$ とおくと

$$\alpha_0 \|Lu_0+\varepsilon Lh-y\|_{H_1} + \alpha_1 \|u_0+\varepsilon h\|_{H_2} \geqq \alpha_0 \|Lu_0-y\|_{H_1} + \alpha_1 \|u_0\|_{H_2}$$

$\|Lu_0-y\| \neq 0$ $\|u_0\| \neq 0$ の時

$$\alpha_0 \frac{2\varepsilon(Lu_0+yLh)_{H_1} + \varepsilon^2 \|Lh\|^2_{H_1}}{\|Lu_0-y+\varepsilon Lh\|_{H_1} + \|Lu_0-y\|_{H_1}} + \alpha_1 \frac{2\varepsilon(u_0,h)_{H_2} + \varepsilon^2 \|h\|^2_{H_1}}{\|u_0+\varepsilon h\|_{H_2} + \|u_0\|_{H_2}} \geqq 0$$

両辺を ε でわつて $\varepsilon < 0$ とすれば

$$\alpha_0 \frac{(Lu_0-y_1 Lh)}{\|Lu_0-y\|_{H_1}} + \alpha_1 \frac{(u_0,h)}{\|u_0\|_{H_2}} \geqq 0$$

$$\frac{\alpha_0}{\|Lu_0-y\|_{H_1}}(L^*Lu_0-L^*y_1h) + \frac{\alpha_1}{\|u_0\|_{H_2}}(u_0,h) \geqq 0$$

$\alpha_0 > 0$ ならば $k_0 = \dfrac{\alpha_1\|Lu_0-y\|_{H_1}}{\alpha_0\|u_0\|_{H_2}} > 0$ とおけば

$$L^*Lu_0 - L^*y + k_0u_0 = 0$$

$\alpha_0 = 0$ ならば $(u_0,h) = 0$ $u_0 = 0$

$$\|Lu-y\|_{H_1} \geq \|y\|_{H_1} \quad \|Lu\|^2_{H_1} - 2(Lu,y)_{H_1} \geq 0, \quad u \in C$$

u を εu でおきかえると

$$\varepsilon^2\|Lu\|^2 - 2\varepsilon(Lu,y) \geq 0$$

ε でわつて $\varepsilon \to 0$ とすれば $-2(Lu,y) \geq 0$ $(Lu,y) \leqq 0$

$u \in C$ ならば $-u \in C$ 故 $(Lu,y) = 0$

$$(u, L^*y) = 0, \quad L^*y = 0$$

$u_0 = 0$, $L^*y = 0$ だから (4) は任意の k_0 に対して成立する.
$\|Lu_0-y\| \neq 0$ 又は $\|u_0\| \neq 0$ の場合にも (4) が成立することは容易に確められる.

(i) $k_0 > 0$ のとき

$$u_0 = \frac{1}{k_0}L^*(Lu_0-y) \in R(L^*)$$

ノルム最小の最小化元は $R(L^*)^a$ に属する.

（もし最小化元 $v_0 \notin R(L^*)^a$ ならば $R(L^*)^a$ への射影 P_1v_0 は $\|P_1v_0\| < \|v_0\|$, $LP_1v_0 = Lv_0$ をみたすから v_0 はノルム最小の最小化元ではない. ）しかも $R(L^*)^a$ に属する最小化元は一意的になり、（二つあつたとするとその差は $N(L)$ に属し，補題 6.より 0 ）故に u_0 は

minimizing elementのうちノルム最小のもの．

(ii) $k_0 = 0$ のとき

$u_n = (L^*L + k_n)^{-1}L^*Lu_0 \quad (\in R(L^*))$ とおく

$A = L^*L$ は nonnegative operator， v_0 を u_0 の $R(L^*L)^a$ への射影とする．補題6.より

$$u_0 = v_0 + v_1, \quad v_1 \in N(A)$$

と一意的にかける．

$\varepsilon > 0$ に対し $w_0 \in X_1$ が存在し

$$\|v_0 - Aw_0\| < \varepsilon$$

$$\|u_n - v_0\| = \|(A+k_n)^{-1}Av_0 - v_0\|$$

$$= \|-k_n(A+k_n)^{-1}(v_0 - Aw_0) - k_n(A+k_n)^{-1}Aw_0\|$$

$$\leqq \|k_n(A+k_n)^{-1}\| \cdot \|v_0 - Aw_0\| + k_n\|(A+k_n)^{-1}A\| \cdot \|w_0\|$$

$$\leqq \|v_0 - Aw_0\| + k_n\|w_0\| \leqq \varepsilon + k_n\|w_0\|$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|u_n - v_0\| \leqq \varepsilon \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} \|u_n - v_0\| = 0$$ （証明終り）

k_0, u_0 の y に対する関係は次の系1.系2.系3.で特徴づけられる． P_1 を H_1 から $R(L)^a$ への射影作用素とし P_2 を H_1 から $N(L^*)$ への射影作用素とする．

$y_i = P_i y$ とおく．

<u>系1.</u> $u_0 \neq 0$ のとき

(i) $k_0 = 0$ ならば $y_1 \in L(C)$ 従つて $Lu_0 = y_1$

逆も成り立つ

(ii) $k_0 > 0$ ならば $y_1 \notin L(C)$ 従つて $Lu_0 \neq y_1$

逆も成り立つ

証明

(i) だけ示せばよい

$$\|Lu-y\| = \|Lu-(y_1+y_2)\| = \sqrt{\|Lu-y_1\|^2+\|y_2\|^2} \quad より$$

$$\inf_{u\in C} \|Lu-y\| = \sqrt{(\inf_{u\in C} \|Lu-y_1\|)^2+\|y_2\|^2}$$

$k_0 = 0$ ならば

$$(Lu_0-y_1, Lh) = (L^*(Lu-y), h) = 0, \quad h \in H_2$$

$y_1 = \lim_{n\to\infty} Lw_n$, $h = u_0-w_n$ とおくと

$$(Lu_0-y_1, Lu_0-Lw_n) = 0$$

$n\to\infty$ とすれば

$$(Lu_0-y_1, Lu_0-y_1) = 0 \qquad Lu_0 = y_1$$

逆に $Lu_0 = y_1$ とすると

$$(Lu_0-y_1, Lh) = 0 \qquad h \in H_2$$

$h = u_0$ とおくと

$$k_0\|u_0\|^2 = 0 \qquad \|u_0\| \neq 0 \text{ より } k_0 = 0$$

系 2.

(i) $\|u_0\| < M$ ならば $k_0 = 0$

(ii) $\|u_0\| = M$, $y_1 \notin L\{(u; \|u\| = M)\}$ ならば $k_0 > 0$

(ii) は系 1.より明らか.

証明

i) $\|u_0\| < M$ とする

$v \in H$ を固定する. 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $\|u_0+\varepsilon v\| < M$,

$$\|L(u_0+\varepsilon v)-y\|^2 = \|L(u_0+\varepsilon v)-y_1-y_2\|^2 = \|L(u_0+\varepsilon v)-y_1\|^2+\|y_2\|^2$$

$$= \|Lu_0-y_1\|^2-2\varepsilon(Lu_0-y_1 Lv)+\varepsilon^2\|Lv\|^2+\|y_2\|^2$$

$$\geq \|Lu_0-y_1\|^2+\|y_2\|^2$$

より　$(Lu_0-y_1, Lv) = 0,\ v \in H$　　$Lu_0-y_1 \in R(L)^{a^\perp}$

一方　$Lu_0-y_1 \in R(L)^a$　　$\therefore\ Lu_0 = y_1$　　$\therefore\ k_0 = 0$　（系 1.の (1)　）

系 3.　$y_1 \in L(C)$　　$\|u_0\| = M$　　$k_0 > 0$

$\|u_0\| < M$　　$k_0 = 0$

3.　最終値問題　(Final value problem)

方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \qquad t \geqq 0 \qquad (3.1)$$

A, B, $x(\cdot)$, $u(\cdot)$　に関する仮定は前章と同じ

X_1, X_2　は反射的なバナッハ空間とし次の問題を考える.

問題 3.1　$T > 0,\ y \in X_1,\ x_0 \in X_2$　を固定する

$u(\cdot) \in L^p([0,T], X_2)$　として　$x(t)$　　$0 \leqq t \leqq T$,

を　$x(0) = x_0$ をみたす（3.1）の解とする.

C を $L^p([0,T], X_2)$ の有界で凸な閉部分集合とするとき $L^p([0,T], X_2)$

上で定義された汎函数

$$f_0(u) = \|x(T)-y\|$$

を

$$u \in C$$

なる条件の下で最小にせよ.

（3.1）の解 $x(\cdot)$　は

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma$$

であるから

$$f_0(u) = \| S(T)x_0 + \int_0^T S(T-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma - y\| = \|L(T)u - \bar{y}\|$$

ここに

$$\bar{y} = y - S(T)x_0$$

$$L(T)u = \int_0^T S(T-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma \in \mathcal{L}(L^p([0,T],X_2),X_1)$$

と表わせる.

<u>定理 3.</u> (Balakrishnan [1]) C を $L^p[X_2]$ の有界で凸な閉部分集合とすると

$$\inf_{u \in C} f_0(u) = f_0(u_0)$$

をみたす $u_0 \in C$ が存在する.

$L(T)^*$ が L 対 L, $y \notin L(T)C$ ならば

$$f^* \in L_q[X_2^*] \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad f^* \notin 0$$

が存在して

$$\langle f^*,u\rangle \leqq \langle f^*,u_0\rangle \qquad {}^\forall u \in C$$

即ち

$$\int_0^T \langle f^*(\sigma),\ u(\sigma)\rangle_{X_2^* \times X_2} d\sigma \leqq \int_0^T \langle f^*(\sigma),\ u_0(\sigma)\rangle_{X_2^* \times X_2} d\sigma \quad \ldots \quad (3.2)$$

証明

$f_0(\cdot)$ は $L_p[X_2]$ 上の連続凸，実数値汎函数だから補題 2.によつて u_0 の存在がわかる.

C が有界，凸だから L(T)C も有界，凸である.

補題 1.より C は弱コンパクト，故 L(T)C も弱コンパクト，弱閉

補題 2.によつて強閉.

従つて $y_0 \in L(T)C$ を適当にとれば

$$\inf_{y \in L(T)C} \|y-\bar{y}\| = \|y_0-\bar{y}\| = P > 0$$

ここで　∴ $y_0 = L(T)u_0$

$$S_p = \{ y \in L^p ; \|y-y_0\| \leqq P \}$$　とおくと

S_p の内点は凸集合 $L(T)C$ に含まれないから Hahn Banach の定理を用いれば $L(T)C$ と S_p を分離する超平面 $\{y; \langle x^*,y\rangle = \langle x^*,y_0\rangle\}$, $x^* \in X_1^*$ が存在して

$$\langle x^*,y\rangle \leqq \langle x^*,y_0\rangle \quad \text{for} \quad y \in L(T)C$$

となる.

$y = L(T)u, \quad u \in C, \quad f^* = L^*(T)x^* \in L^q[X_2^*]$　とおくと

$L^*(T)$ が1対1だから $f^* \neq 0$

$$\langle f^*,u\rangle = \langle L^*(T)x^*,u\rangle = \langle x^*,y\rangle$$

$$\langle f^*,u\rangle \leqq \langle f^*,u_0\rangle \quad \text{for} \quad {}^\forall u \in C$$ （証明終り）

注 1.　$L^*(T)$ が1対1でなくても, Hahn Banach の定理で存在を保証された $x^*(\neq 0)$ に対して $L^*(T)x^* \neq 0$ ならばよい.

注 2.　たとえば $L(T)C$ が内点を持てば, $L^*(T)$ は1対1になる.

注 3.　X_1, X_2 が共にヒルベルト空間の場合には $y = \bar{y}_1+\bar{y}_2$, $\bar{y}_1$ は $\bar{y}$ の $R(L(T))^a$ の射影とし, $\bar{y}_2$ を $\bar{y}$ の $N(L^*(T))$ への射影とすると

$$f_0(u) = \sqrt{\|L(T)u-\bar{y}_1\|_{X_1}^2 + \|y_2\|_{X_1}^2}$$　となるから

$$\tilde{f}_0(u) = \|L(T)u-\bar{y}_1\|_{X_1}, \quad \bar{y}_1 \in R(L)^a \quad \ldots (3.3)$$
$$u \in C$$

を最小化する問題に帰着出来る.

$L(T)$ を X_2 から $R(L(T))^a = Y_1$ (位相は X_1 のノルムで入れる) への作用素と考えると $L^*(T)$ は1対1であるから定理3.と同様にして $y_1 \in L(T)C$ ならば(3.3)の最小化元を $\tilde{u}_0$ とすると $\widetilde{f^*} \in L^q(X_2)$, $\widetilde{f^*} \neq 0$ が存在して

$$\int_0^T (\widetilde{f^*}(\sigma), u(\sigma))_{X_2} d\sigma \leqq \int_0^T (\widetilde{f^*}(\sigma), \tilde{u}_0(\sigma))_{X_2} d\sigma, u(\cdot) \in C$$

となる.

容易に確められるよう $L(T)u_0 = L(T)\tilde{u}_0$ 故 $(\widetilde{f^*}(\sigma), \tilde{u}_0(\sigma))_{X_2}$

$$\int_0^T (\widetilde{f^*}(\sigma), u(\sigma))_{X_2} d\sigma \leqq \int_0^T (\widetilde{f^*}(\sigma), u_0(\sigma)) d\sigma, \quad u(\cdot) \in C$$

定理4. (Balakrishnan) X_2 がヒルベルト空間で

$$C = \{u(\ ) \in L^p[X_2] \mid \|u(\cdot)\|_\infty \leqq M < \infty\}$$

なるとき $E = \{\sigma;\ f^*(\sigma) \neq 0\}$ とおけば

$$v_0(\sigma) \frac{Mf^*(\sigma)}{\|f^*(\sigma)\|} \text{ a.e. on } E \quad f^*(\cdot) \in L^q[X_2] \quad q > 1$$

証明 C は $L^p[X_2]$, $p > 1$ の有界で凸な閉部分集合である.

(3.2)より

$$u_0(\sigma) = \alpha f^*(\sigma), \quad \|u_0(\sigma)\| = M$$

がわかる. これから $u_0(\sigma) = \dfrac{Mf^*(\sigma)}{\|f^*(\sigma)\|}$ a.e. on E

定理5. (Balakrishnan [1]) X_2 はヒルベルト空間とし

$$C = \{u(\cdot) \in L^p \mid \|u(\cdot)\|_{L^{p'}} \leqq M < \infty\} \quad P' \geqq p$$

ならば $E = \{\sigma;\ f^*(\sigma) \neq 0\}$ とおくと

$$u_0(\sigma) = k\frac{f^*(\sigma)}{\|f^*(\sigma)\|^{2-q'}} \qquad \frac{1}{p'}+\frac{1}{q'} \quad \text{a.e. on } E$$

$$f^*(\cdot) \in L^q[X_2] \qquad k = M\left(\int_0^T \|f^*(\sigma)\|^{q'}d\sigma\right)^{-\frac{1}{p'}}$$

証明　C は $L^{p'}(X_2)$ の有界で凸な閉部分集合である.

$$\int_0^T (f^*(\sigma),u(\sigma))_{X_2}d\sigma \leqq \int_0^T \|f^*(\sigma)\|_{X_2}\|u(\sigma)\|_{X_2}d\sigma$$

$$\leqq \left(\int_0^T \|f^*(\sigma)\|^{q'}d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^T \|u(\sigma)\|^{p'}d\sigma\right)^{\frac{1}{p'}} \leqq M\left(\int_0^T \|f^*(\sigma)\|^{q'}d\sigma\right)^{\frac{1}{q'}}$$

等号がすべて成立するのは

$$u(\sigma) = \alpha(\sigma)f^*(\sigma), \quad \alpha(\sigma) \geqq 0 \quad \text{a.e. on } E$$

$$\|u(\sigma)\|_{X_2} = \beta\|f^*(\sigma)\|^{q'-1}, \quad \beta = \text{const.}$$

$$\left(\int_0^T \|u(\sigma)\|^{p'}d\sigma\right)^{\frac{1}{p'}} = M$$

のときに限る. これから (3.2) により求める結果が得られる.

[ポントリヤーギンの最大原理との関係]

$$f^*(\sigma) = B^*S(T-\sigma)^*x^*$$

だから

$$\psi(\sigma) = S(T-\sigma)^*x^*$$

$$H(\psi,u) = \int_0^T <\psi(\sigma),Bu(\sigma)>_{X_2^*\times X_2}d\sigma \qquad u \in C$$

とおけば

$$\max_{u\in C} H(\psi,u) = <\psi,Bu_0> = H(\psi,u_0)$$

$x^* \in D(A^*)$ 又は A^* が解析的半群の生成作用素のときには

$$\frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} = -A^*S(T-\sigma)^*x^* = -A^*\psi(\sigma)$$

となつてポントリヤーギンの最大原理 [6] の一つの拡張になつている．最大原理のバナッハ空間への拡張については， **Егоров** 参照

4. 最適時問題 (Time optimal problem)

1 存在定理

方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad t \geqq 0 \tag{4.1}$$

A，B 及び空間 X_1，X_2 は前の通り，X_1，X_2 はヒルベルト空間とする．いま，$x_0, x_1 \in X_1$ が与えられているとし，制御可能性に関する次の仮定をおく．

仮定 4.1

$T_1 > 0$ と (4.1) をみたす $x(\cdot), u(\cdot) \in X$ 存在し，

$$x(T_1) = x_1 \quad x(0) = x_0$$
$$\|u(\cdot)\|_\infty \leqq M$$

が成り立つ．

定理 6. (Balakrishnan [1])

仮定 4.1 と $u \in L_\infty(X_2)$，$\|u\|_\infty \leqq M$ なる条件の下で，X_0 を X_1 へ最短時間で移す，制御 $u_0(\cdot)$ が存在す．

補題 8. $S(t)$ が反射的なバナッハ空間 X における半群ならば $S^*(t)$ は X^* で半群になる．

定理 6.の証明

最短時間 T が存在することは仮定 (4.1) からわかるから，T に対応し

(4.2)をみたす制御函数 $u_0(\cdot)$ の存在をいえばよい．時間の列 $\{T_n\}$,

$T_n > T_{n+1}$ $n = 1,2,\ldots$ $T_n \to T\ (n \to \infty)$ と制御函数 $u_n(t)$ が存在し

$$x_1 = S(T_n)x_0+\int_0^{T_n} S(T_n-\sigma)Bu_n(\sigma)d\sigma$$

$C = \{u;\ \|u(\cdot)\|_\infty \leq M\}$ とおくと C は $L_2([0,T]X_2)$ の有界で凸な閉集合だから補題 1.2 により $\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{n'}\}$ と $u_0 \in C$ が存在し

$$u_{n'} \xrightarrow{\text{弱}} u_0$$

$\{u_{n'}\}$ をあらためて $\{u_n\}$ で記す．

$$\begin{aligned}(x_1,x)_{X_1} &= (S(T_n)x_0+\int_0^{T_n} S(T_n-\sigma)Bu_n(\sigma)d\sigma,x)_{X_1}\\ &= (S(T_n)x_0,x)_{X_1}+(\int_{T_n}^{T} S(T_n-\sigma)Bu_n(\sigma)d\sigma,x)_{X_1}\\ &\quad +(\int_0^T S(T_n-\sigma)Bu_n(\sigma)d\sigma,x)_{X_1}, \quad x \in X_1\end{aligned}$$

右辺の第一項 $\to (S(T)x_0,x)$

右辺の第二項 $\to 0$

$$\begin{aligned}&(\int_0^T S(T_n-\sigma)Bu_n(\sigma)d\sigma,x)_{X_1}-(\int_0^T S(T-\sigma)Bu_0(\sigma)d\sigma,x)_{X_1}\\ &= \int_0^T (u_n(\sigma)-u_0(\sigma),B^*S^*(T-\sigma)x)d\sigma\\ &\quad + \int_0^T (u_n(\sigma),B^*S^*(T-\sigma)(S^*(T_n-T)x-x))_{X_2}d\sigma\end{aligned}$$

$B^*S^*(T-\sigma)x \in L^2([0,T];\ X_2)$ 故に

$$\int_0^T (u_n(\sigma)-u_0(\sigma),\ B^*S^*(T-\sigma)x)_{X_2}d\sigma \to 0$$

$$|(u_n(\sigma),\ B^*S^*(T-\sigma)(S^*(T_n-T)x-x)_{X_2}|$$

$$\leqq \text{const}\ \|S^*(T_n-T)x-x\|_{X_1}$$

補題 8. より　$\|S^*(T_n-T)x-x\|_{X_1} \to 0$

$$\int_0^T (u_n(\sigma),\ B^*S^*(T-\sigma)(S^*(T_n-T)x-x))_{X_2} d\sigma \to 0$$

$$(x_1,x)_{X_1} = (S(T)x_0,x)_{X_1} + (\int_0^T s(T-\sigma)Bu_0(\sigma)d\sigma, x)_{X_1}$$

$$x_1 = S(T)x_0 + \int_0^T S(T-\sigma)Bu_0(\sigma)d\sigma$$

§ 2　最適制御　$u_0(\cdot)$ の characterization

定理 7.　(Balakrishnan [1])

$$L(t)u \underset{\text{def}}{=} \int_0^T S(T-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma \qquad u(\cdot) \in L^2((0,T),X_2)$$

$$L(t) \in \quad [L^2[(0,T),X_2],X_1]$$

(i)　$R(L(t))$ が　$t = T$ の近傍で固定された有限次元部分空間　Y　にあるとき

$$x_1 = L(t)v_0$$

v_0　は最適制御で

$$v_0(s) = \frac{MB^*y_0(S)}{\|B^*y_0(S)\|} \qquad \text{a.e. on } E$$

ここに　$y_0(s) = S(T-S)^*P_0 \qquad P_0 \in X_1 \qquad \|P_0\| = 1$

$$E = \{\sigma;\ B^*y_0(\sigma) \neq 0\}$$

(ii)　$L(T)$ が完全連続作用素　X_1　が無限次元空間のときは

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} L(T)u_n$$

$$u_n(s) = \frac{MB^*h_n(S)}{\|B^*h_n(S)\|} \quad \text{a.e. on } E_n$$

但し $h_n(s) = S(T-s)^*P_n, \quad \|P_n\|_{X_1} = 1$

$$E_n = \{\sigma;\ B^*S(T-\sigma)^*P_n \neq 0\}$$

(iii) $L(T)$ は完全連続作用素でなく，X_1 が無限次元空間のとき

$$\Delta_0 = \sup_{\substack{x_1 \in S(\Delta)\Omega(T-\Delta) \\ \Delta > 0}} \Delta$$

$$\Omega(t) = \{y \in X_1 \mid y = \int_0^t S(t-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma \ \|u(\cdot)\|_\infty \leqq M\}$$

とおくとき $\Delta_0 = 0$ ならば

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} L(T)v_n$$

$$v_n(S) = \frac{MB^*h_n(S)}{\|B^*h_n(S)\|_{X_2}} \quad \text{a.e. on } E_n$$

$$h_n(S) = S(T-S)^*P_n, \quad \|P_n\|_{X_1} = 1$$

$$E_n = \{\sigma;\ B^*h_n(\sigma) \neq 0\}$$

$\Delta_0 > 0$ ならば

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} L(T)v_n$$

$$v_n(S) = \begin{cases} 0, & S > T - \Delta_0 \\ \dfrac{MB^*S(T-\Delta_0-S)^*P_n}{\|B^*S(T-\Delta_0-S)^*P_n\|} & \text{a.e. on } E_n \cap [0, T-\Delta_0] \end{cases}$$

$$E_n = \{\sigma;\ B^*S(T-\Delta_0-\sigma)P_n \neq 0\} \qquad \|P_n\|_{X_1} = 1$$

証明

(i) $\Omega(t) = L(t)C \subset X_1$, $C = \{u \ \ L^2([0,T]X_2) \mid \|u\|_\infty \leq M\}$ とおくと $\Omega(t)$ は有界で凸な $L^2([0,T],X_2)$ の閉部分集合の像として X_1 の有界で凸な閉部分集合である.

$\{T_n\}$ を T に収束する単調増加列とする.

$$\inf_{x\in\Omega(T_n)} \|x_1-x\|_{X_1} = \|x_1-y_n\|_{X_1} \quad (>0), \quad y_n \in \Omega(T_n)$$

で定まる y_n が一意的に存在し

$$\|x_1-y_n\|_{X_1} \leq \|x_1-\int_0^{T_n} S(T_n-\sigma)Bu_0(\sigma)d\sigma\|_{X_1} \to 0 (n \to \infty)$$

より

$$y_n \to x_1$$

$x \in \Omega(T_n)$ に対し容易に確められるように

$$(x_1-y_n, y_n-x)_{X_1} \geq 0$$

$$x = \int_0^{T_n} S(T_n-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma \quad (u \in C), \quad P_n = x_1-y_n$$

$$y_n = \int_0^{T_n} S(T_n-\sigma)Bu_n(\sigma)d\sigma$$

$$\therefore \quad \int_0^{T_n}(u(\sigma), B^*S^*(T_n-\sigma)P_n)_{X_2}d\sigma$$
$$\leq \int_0^{T_n}(u_n(\sigma), B^*S^*(T_n-\sigma)P_n)_{X_2}d\sigma, \quad u \in C$$

これより $E_n = \{\sigma;\ B^*S^*(T_n-\sigma)P_n \neq 0\}$ とおくと

$$u_n(\sigma) = \frac{MB^*S^*(T_n-\sigma)P_n}{\|B^*S^*(T_n-\sigma)P_n\|_{X_2}} \quad \text{a.e. on } E_n$$

$k_n = \|P_n\|^{-1} > 0$ とおくと十分大きい n に対しては

$$k_n P_n = k_n(x_1 - y_n) \in Y$$

$\|k_n P_n\| = 1$ 故 $\{k_n p_n\}$ は収束する部分列 $\{k_{n'}\}$ が存在する.

$$k_{n'} P_{n'} \to P_0$$

$E = \{\sigma;\ B^*S^*(T-\sigma)P_0 \neq 0\}$ とおくと

$$u_{n'}(\sigma) = \frac{MB^*S^*(T_{n'}-\sigma)R_n P_n}{\|B^*S^*(T_{n'}-\sigma)k_n P_n\|_{X_2}} \longrightarrow \frac{MB^*S^*(T-\sigma)P_0}{\|B^*S^*(T-\sigma)P_0\|_{X_2}} \quad \text{a.e. on } E$$

$\{u_n\}$ の弱収束部分列 $\{u_{n'}\}$ をとり $u_{n'} \xrightarrow{\text{弱}} v_0$ とする.

$\{u_{n'}\}$ をあらためて $\{u_n\}$ で記す.

$$\begin{aligned}
&|(u_n, L^*(T_n)k_n P_n) - (v_0, L^*(T)P_0)| \\
&\leqq |(u_n, L^*(T)(k_n P_n - P_0))| + |(u_n - v_0, L^*(T)P_0)| \\
&\leqq \text{const } \|k_n P_n - P_0\|_{X_1} + |(u_n - v_0, L^*(T)P_0)|_{X_1} \to 0
\end{aligned}$$

一方

$$(u_n, L^*(T)k_n P_n') \to \int_E \left(\frac{MB^*S^*(T-\sigma)P_0}{\|B^*S^*(T-\sigma)P_0\|_{X_2}},\ L^*(T)P_0\right)d\sigma$$

$$\int_E (v_0, L^*(T)P_0)_{X_2} d\sigma = \int_E \left(\frac{MB^*S^*(T-\sigma)P_0}{\|B^*S^*(T-\sigma)P_0\|_{X_2}},\ L^*(T)P_0\right)d\sigma$$

これより定理 4.の証明と同様にして

$$v_0(\sigma) = \frac{MB^*S^*(T-\sigma)P_0}{\|B^*S^*(T-\sigma)P_0\|_{X_2}} \quad \text{a.e. on } E$$

(ii) $L(T)C$ は内点をもたないから x_1 は $L(T)C$ の境界上にある.

$Z_n \notin L(T)C \quad (n = 1, 2, \ldots)$ が存在して

$$Z_n \to x$$

$$\inf_{y \in L(T)C} \|Z_n - y\| = \|Z_n - y_n\| \qquad y_n = L(T)u_n \in L(T)C$$

で定まる y_n $(u = 1,2,\ldots)$ が存在して

$$\|Z_n - y_n\|_{X_1} \leqq \|x_1 - Z_n\|_{X_1} \to 0 \quad \therefore x_1 = \lim_{n\to\infty} y_n$$

容易に分るように

$$(L(T)_n - L(T)u_n,\ Z_n - y_n)_{X_1} \leqq 0$$

$k_n = \dfrac{1}{\|Z_n - y_n\|}$, $k_n(Z_n - y_n) = P_n$ とおくと

$$(u, L^*(T)P_n)_{X_2} \leqq (u_n, L^*(T)P_n)_{X_2} \qquad u \in C$$

$E_n = \{\sigma;\ L^*(T)P_n(\sigma) \neq 0\}$ とおくと

$$u_n(\sigma) = \frac{ML^*(T)P_n}{\|L^*(T)P_n\|_{X_2}} \quad \text{a.e. on } E_n$$

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} L(T)u_n$$

(iii) $\Delta_0 = 0$ のとき

T に収束する単調増加列 $\{T_n\}_{n=1,2,\ldots}$ をとると

$$x_1 \notin S(T-T_n)\Omega(T_n)$$

$S(T-T_n)\Omega(T_n)$ は有界で凸な閉集合だから

$$\inf_{Z\in\Omega(T_n)} \|x_1 - S(T-T_n)Z\|_{X_1} = \|x_1 - S(T-T_n)Z_n\|_{X_1}, \quad Z_n \in \Omega(T_n)$$

なる Z_n が存在して

$$S(T-T_n)Z_n = S(T-T_n)\int_0^{T_n} S(T_n - \sigma)Bu_n(\sigma)d\sigma$$

$$= \int_0^{T_n} S(T-\sigma)Bu_n(\sigma)d\sigma$$

$$u_n(\sigma) = \begin{cases} u_n(\sigma) & 0 \leq \sigma \leq T_n \\ 0 & T_n < \sigma \leq T \end{cases}$$

とおけば　$\tilde{u}_n(\sigma) \in C$

$$S(T-T)Z_n = L(T)\tilde{u}_n$$

$$(S(T-T_n)x, x_1 - L(T)\tilde{u}_n)_{X_1} \leq (L(T)\tilde{u}_n, x_1 - L(T)\tilde{u}_n)_{X_1}$$

ここで　$x = L(T_n)u \in \Omega(T_n)$

$$k_n = \|x_1 - L(T)\tilde{u}_n\|_{X_1}^{-1}, \quad P_n = k_n(x_1 - L(T)\tilde{u}_n)$$

とおくと

$$\|P_n\|_{X_1} = 1$$

$$(S(T-T_n)\int_0^{T_n} S(T_n-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma, P_n)_{X_1}$$

$$\leq (\int_0^T S(T_n-\sigma)B\tilde{u}_n d\sigma, P_n)_{X_1}$$

$$\int_0^{T_n}(u(\sigma), B^*S^*(T-\sigma)^*P_n)d\sigma \leq \int_0^{T_n}(u_n(\sigma), B^*S^*(T-\sigma)^*P_n)d\sigma$$

$$u \in C$$

$E_n = \{\sigma;\ B^*S^*(T-\sigma)^*P_n = 0\}$　とおけば

$$u_n(\sigma) = \frac{MB^*S^*(T-\sigma)P_n}{\|B^*S^*(T-\sigma)P_n\|_{X_2}} \qquad \text{a.e. on } E_n \cap [0, T_n]$$

容易にわかるように

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} L(T)\tilde{u}_n$$

$$v_n(\sigma) = \begin{cases} u_n(\sigma) & 0 \leq \sigma \leq T_n \\ \dfrac{MB^*S^*(T-\sigma)^*}{\|B^*S^*(T-\sigma)^*\|_{X_2}} & \sigma \in E_n \cap (T_n, T] \\ 0, & \sigma \in E_n^C \cap (T_n, T] \end{cases}$$

とおくと $v_n(\sigma)\in C$

$$\|L(T)\tilde{u}_n - L(T)v_n\| = \left\|\int_{T_n}^{T} S(T-\sigma)B(\tilde{u}_n - v_n)d\sigma\right\|$$

$$= \left\|\int_{T_n}^{T} S(T-\sigma)Bv_n d\sigma\right\| \leqq \int_{T_n}^{T} \|S(T-\sigma)B\| M d\sigma \to 0 \quad (n\to\infty)$$

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} L(T)v_n$$

v_n の定義より

$$v_n(\sigma) = \frac{MB^*S^*(T-\sigma)P_n}{\|B^*S^*(T-\sigma)P_n\|} \quad \text{a.e.} \quad \text{on} \quad E_n$$

$\Delta_0 > 0$ のとき

$$x_1 = S(\Delta_0)y_1 \qquad y = \int_0^{T-\Delta_0} S(T-\Delta_0-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma$$

T は最短時間だから

$$y \notin \Omega(t) \qquad t < T-\Delta_0$$

最終値 y に対応する最短時間が $T-\Delta_0$ となり先の結果に帰着されて

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} L(T)v_n$$

$$v_n(\sigma) = 0 \qquad 0 > T-\Delta_0$$

$$\frac{MB^*S^*(T-\Delta_0-\sigma)P_n}{\|B^*S^*(T-\Delta_0-\sigma)P_n\|} \quad \text{a.e.} \quad \text{on} \quad E_n\cap[0,T-\Delta_0]$$

$$E_n = \{\sigma;\ B^*S^*(T-\Delta_0-\sigma) = 0\}$$

（証明終り）

文　献

[1] Balakrishnan A.V., J.S.I.A.M. Control vol.3, No.1 p152-180

[2] Егоров, Ю.В. "О некоторых задачах теории оптимального управления в банаховыи пространстве Д.А.Н.СССР 1963 Том 150, № 2, 241 - 723

[3] Dunford N., Schwartz J.T. "Linear operators part 1"

[4] Hille E., Phillips R.S., "Functional Analysis and Semigroups" Amer. Math. Soc. Colloq. Publs. Vol.31 Providence R. I. 1957

[5] Phillips R.S., "On weakly compact subsets of a Banach space" Amer. J. Math., 65 1943, 108-136

[6] Pontryagin L.S., et. al. "The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, New York", 1962

[7] Yosida K., "Functional Analysis" Springer, 1965