数理解析研究所講究録
16巻 1966年 39-52

Contingent equation

神戸大学理学部　菊 池 紀 夫

微分方程式の解は， Vector field に対応したものですが，方程式の右辺が正確には知られていないときには，（近似的にわかつている．）微分不等式あるいはさらにもつと一般にした方程式を考えなければなりません．この様に拡張した方程式に関して１９３０年前後に，南雲，福原先生によつて研究され，さらに数年後に， A.Marchaud, S.K.Zaremba によつて contingent (paratingent) equation が考えられている様です．またこの contingent equation と control 問題との関係は，T.Wazewski が指摘しておりくわしくは，福原先生の講演録 [1] を参照して下さい．

ここで ontingent equation について述べます．

$I = [a,b]$ R^1の区間， $I \ni 0$

$W = I \times R^n$

N は W から R^n の ompact な部分集合全体への mapping.

すなわち $N(t,x)$, $(t,x) \in W$ は R^n の Compact set です．このような mapping があたえられているとき， W に orientor field があたえられているといいます．（特に compact set が一点になつたときが， Vector field です．）この orientor field の連続の概念は，compact set 間の topology を Hausdorff metric で定義し，この topology で考えることにします．すなわち， R^n の compact set A, B の距離 $\rho(A,B)$ は次の様に定義します．

$$\rho(A,B) = \inf\{\delta>0,\ A\subset U_\delta(B),\ B\subset U_\delta(A)\}$$

ただし E を R^n の compact set とするとき

$$U_\delta(E) = \{x \in R^n;\ \mathrm{dist}(x,E)<\delta\}$$

この ρ によつて，R^n の compact sets 全体の空間に距離がはいり距離空間になります．

contingent equation では，解に微分可能性は，仮定しないで，もつと広い函数空間に解を求めるのですが連続性は仮定します．したがつて，ことわらない限り，考える函数は連続なものとします．

contingent derivative

$$I \ni t_0, \qquad x(t) \in R^n$$

$$p(t) = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \quad t(\neq t_0) \in I$$

次の様な集合 $M \subset R^n$ を $x(t)$ の t_0 における contingent derivative といい $D^*x(t_0)$ で表わします．

$$\limsup_{t \to t_0} |p(t)| < +\infty \text{ であり}$$

$$M = \{c \in R^n, \ {}^\exists t_j \in I, \ t_j \neq t_0, \ \lim_{t_j \to t_0} p(t_j) = c\}$$

すなわち $\limsup_{t \to t_0} |p(t)| < \infty$ のとき $D^*x(t_0)$ が存在するとし，$D^*x(t_0) = M$ と定義するのです．

次の適当な仮定をつけて，Contingent equation およびその解の定義を述べます．

定義 1. (Marchaud) ${}^\forall(t,x) \in W$ にたいして $N(t,x)$ は compact convex set で (t,x) の函数としては，有界で，上半連続であるとします． $x = x(t)$, $t \in I$ が N にたいする contingent equation の解であるとは

$$D^*x(t) \subset N(t,x(t)) \quad \text{contingent equation}$$

がすべての $t \in I$ にたいして成り立つことである.

この解の定義は T.Wazewski [2] によつて，次の定義と同値であることが示されました.

定義 2. (Wazewski) N の仮定は定義 1.と同じとする. $x(t)$ が $N(t,x)$ にたいする解であるとは，

$x(t)$ は I で絶対連続であつて

$x'(t) \in N(t,x(t))$, a.e. $t \in I$

が成り立つことである.

定義 1.の意味で contingent equation の解の存在は Cauchy の折れ線の論法で示されるのですが，ここでは定義 2.の意味での解の存在を不動点定理をもちいて証明しようとおもいます. さらに，ここでもちいた不動点定理で， controlability を考えてみることにします.

これからもちいる不動点定理を述べておきます.

Brouwer の不動点定理の拡張として角谷先生のやられた不動点定理[3]

$R^n \supset S$ 有界凸な閉集合

$2^S \supset K(S)$ は S の部分集合で，凸な閉集合の全体

$K(S)$ は Hausdorff-metric で metric space と考える.

いま $F: S \to K(S)$ なる mapping があつて，この F が上半連続であれば次の様な意味で不動点がある.

$$^\exists x_0 \in S, \quad x_0 \in F(x_0)$$

contingent equation の解の存在を示すために，この定理を Banach-space に拡張することにします.

補題 E; Banach-space

S は E の compact convex set

K(S) は S の closed convex subsetの全体の

とする．

$F: \quad S \to K(S)$

この mapping が，上半連続であれば不動点が存在する．すなわち

$$\exists f_0 \in S, \quad f_0 \in F(f_0)$$

(∵) S; ompact set なので $\forall \varepsilon>0$ にたいして有限個の

$\{f_1 \cdots f_n\} \subset S$ をとりだしてそれらの ε -近傍で，S を被うことができる．

$$\mu_j(f) = \max\{0, \varepsilon - \|f-f_j\|\}$$

とし，

$$T(f) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu_j(f)\, f_j}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j(f)}$$

とおけば，すべての $f \in S$ にたいして $\|Tf-f\| < \varepsilon/2$ であることが，たしかめられ T の値域 $T(S) = S'$ は有限次元空間の有界凸な閉集合になり，この写像 T は連続写像になります．

$$S \xrightarrow{F} K(S) \xrightarrow{T} S'$$

$T\cdot F(f)$, $(f \in S)$ は，S' の有界閉集合になります．

$S' \supset T\cdot F(f)$ で S' は凸な閉集合なので

$$\overline{Co}(T\cdot F(f)) \subset S'$$

であつて，$\overline{Co}(T\cdot F(f))$ は凸有界閉集合になります．

また写像 $\overline{Co}$; $T\cdot F(f) \to \overline{Co}(T\, F(f))$ は連続なので

$$\overline{Co}\ T\cdot F; \quad f \to \overline{Co}(T\, F(f)) \subset S'$$

は S から $2^{S'}$ への上半連続になります.

$$\overline{Co}\cdot T\cdot F|_{S'}$$

とすれば，有限次元空間における不動点定理が適用できて

$$\exists f \in S' \subset S, \quad \overline{Co}\cdot T\cdot F(f) \ni f$$

写像 T の性質から

$$U_\varepsilon(F(f)) \supset U_{\varepsilon/2}(T(F(f)))$$

なので

$$U_\varepsilon(F(f)) \supset \overline{Co}\cdot T\cdot F(f) \ni f$$

すなわち

$U_\varepsilon(F(f)) \ni f$ なる $f \in S'$ があります.

$\varepsilon_n \downarrow 0$ にたいして，上の f のひとつを f_n とすれば

$$\{f_n\} \subset S, \quad (\text{compact set})$$

したがつて適当な部分列をとれば収束させることが出来ます.

簡単のために $f_n \to f \in S$ とすれば $\forall\, \varepsilon>0$ にたいして

$$\exists N, \quad U_\varepsilon(f) \ni f_n, \quad \forall n \geqq N$$

とすることができます.

また，F の上半連続性からさらに，十分大きな N をとることによつて次の関係も成り立つ様に出来ます.

$$U_\varepsilon(F(f)) \supset F(f_n), \quad \forall n \geqq N$$

したがつて，$\forall\, \varepsilon > 0$ にたいして

$$U_{\varepsilon+\varepsilon_n}(F(f)) \supset U_{\varepsilon_n}(F(f_n)) \ni f_n$$

故に

$$\overline{U}_\varepsilon(F(f)) \ni f$$

ε は任意なので

$$f \in F(f), \quad f \in S$$

これで，不動点の存在は示されました．

定理 $N;\ I \times R^n \to 2^{R^n}$

$N(t,x)$, $(t,x) \in I \times R^n$ は compact convex set

$N(t,x)$ は (t,x) の函数として上半連続で有界である．

$\exists K$ compact convex

$N(t,x) \quad K, \quad \forall (t,x)$

このとき，絶対連続な $x(t)$ があつて

$$x'(t) \in N(t,x(t)) \quad \text{a.e.} \quad t \in I$$

$$x(0) = x^0 \qquad (x^0 \in R^n)$$

が成り立つ．

$(\because)$ $E = \{x;\ x = x(t)$ は I で定義された連続函数$\}$

E はノルム

$$\|x\| = \sup_{t \in I} |x(t)|$$

で， Banach-space になる．

$x \in E$ を固定して，次の様な E の部分集合を考える．

$C(x) = \{y;\ y(t)$ は I で絶対連続，

$y'(t) \in N(t,x(t))$ a.e. $t \quad I$, $y(0) = x^0\}$

$C(x)$ がすべての $x \in E$ にたいして，空集合でないこと．

$N(t,x)$ は (t,x) に関して上半連続であり $x = x(t)$ は I で連続なので $N(t,x(t))$ は t の函数として，I で上半連続である．

したがつて， $N(t,x(t))$ の辞書式最小値を $u(t)$ とすれば

$u(t)$ は I で measurable であり $u(t) \in N(t,x(t))$ [4]

したがつて

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

とおけば $y(t)$ は絶対連続であつて,

$$y'(t) \in N(t,x(t)), \quad \text{a.e.} \quad t \in I$$

すなわち $C(x)$ は空集合ではありません.

$C(x)$ が compact-set であること.

$$C(x) \ni y_1, y_2, \quad 0 \leqq {}^{\forall}\alpha \leqq 1$$

$\alpha y_1(t) + (1-\alpha)y_2(t)$ は I で絶対連続であつて,

$$\alpha y_1'(t) + (1-\alpha)y_2'(t) \in N(t,x(t)), \quad \text{a.e.} \quad t \in I$$

また

$$\alpha y_1(0) + (1-\alpha)y_2(0) = x^0$$

したがつて

$$\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in C(x)$$

$C(x)$ が compact-set であること。

$$C(x) \ni y_n \quad (n=1,2,3\ldots)$$

であれば, $N(t,x)$ は有界ですので

$$^{\exists}M > 0, \quad |y_n'(t)| \leqq M, \quad {}^{\forall}t \in I,$$
$$n = 1,2,\ldots$$

$$y_n(0) = x^0$$

すなわち $\{y_n(t)\}$ は,同程度連続で有界になります.

したがつて，適当な部分列をとれば一様収束さすことが出来ます．

したがつて， $C(x)$ が閉じていることが示されると $C(x)$ は compact になります．

$$\{y_n\} \subset C(x)$$

$$E \text{ で } \{y_n\} \to y$$

とすれば I で $\{y_n(t)\} \to y(t)$ (一様収束) であることと，$\{y_n(t)\}$ が uniform Lipschitzian であることに注意すれば， $y(t)$ は I で絶対連続になります．

また $y_n'(t)$ は殆んどいたる所存在して，有界ですので $L^2(I)$ で有界です．

したがつて，適当な部分列をとりだせば，ある $L^2(I)$ の元に弱収束させることが出来るので，簡単のために

$$\{y_n'(t)\} \to g(t) \quad \text{weakly in} \quad L^2(I)$$

とします．一方，

$$y_n(t) = y_n(0) + \int_0^t y_n'(\tau)\, d\tau$$

なので

$$y(t) = y(0) + \int_0^t g(\tau)\, d\tau$$

すなわち $y'(t) = g(t)$ であり， $\{y_n'(t)\} \to y'(t)$ weakly in $L^2(I)$ です．

したがつて $\{y_n'(t)\}$ の適当な部分列 $\{y_{n_k}'(t)\}$ をとりだせば $\left\{ \dfrac{y_{n_1}'(t)+\dots+y_{n_k}'(t)}{k} \right\}$ は $y'(t)$ に $L^2(I)$ で収束します．

故に，さらに適当な部分列をとれば殆んど，いたる所 $y'(t)$ に収束します．

簡単のために

$$\left\{ \frac{y_{n_1}'(t) + \ldots + y_{n_k}'(t)}{k} \right\} \to y'(t), \quad \text{a.e.} \quad t \in I$$

仮定によつて

$$y_{n_k}'(t) \in N(t,x(t)), \quad \text{a.e.} \quad t \in I$$

で $N(t,x(t))$ は convex なので

$$\frac{y_{n_1}'(t) + \ldots + y_{n_k}'(t)}{k} \in N(t,x(t))$$

また $N(t,x(t))$ は compact なので

$$y'(t) \in N(t,x(t)), \quad \text{a.e.} \quad t \in I$$

したがつて, $C(x)$ の closed であることが示されました.

$x \to C(x)$ なる対応が上半連続になること.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

$$\| x - x_1 \| < \delta$$

ならば

$$U_\varepsilon(N(t,x(t))) \supset N(t,x_1(t))$$

なので

$$\forall y_1'(t) \in N(t,x_1(t)) \text{ にたいして}$$

適当な $y'(t) \in N(t,x(t))$ をとつて

$$|y'(t) - y_1'(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in I$$

とすることが出来ます.

$$y(t) - y_1(t) = \int_0^t [y'(t) - y_1'(t)]\, dt$$

$$\therefore \quad |y(t) - y_1(t)| < \varepsilon |I|$$

すなわち

$$C(x_1) \subset U_{\varepsilon|I|}(C(x))$$

が $\|x - x_1\| < \delta$ で成り立ちます.

これで, $C(x)$ の上半連続性が示されました.

したがつて,次のような compact で convex な集合にたいして,前の補題をもちいて, contingent equation の解の存在を示します.

$$S = \{x;\ x = x(t) \text{ は } I \text{ で絶対連続}$$
$$x'(t) \in K, \quad \text{a.e.} \quad t \in I$$
$$x(0) = x^0 \}$$

$S \ni x \to C(x)$ なる mapping を考えると, $C(x) \subset S$ なので

$$\exists x \in S, \quad x \in C(x)$$

すなわち I で絶対連続な $x(t)$ があつて

$$x'(t) \in N(t,x(t)), \quad \text{a.e.} \quad t \in I$$
$$x(0) = x^0$$

これで解の存在は示されました.

最後に, controlability に不動点定理を適用してみます.

考える方程式は,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$x(0) = x^0$$
$$A(t) = (a_{ij}(t)), \quad I \text{ で連続な } n{\times}n\text{-matrix}$$
$$B(t) = (b_{ij}(t)), \quad I \text{ で連続な } n{\times}r\text{-matrix}$$
$$U \quad \text{ompact convex} \subset R^r$$
$$u(\tau) \text{ は } I \text{ で measurable}$$
$$u(\tau) \in U$$

線型方程式ですので

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$
$$X(0) = E \quad \text{（単位行列）}$$

を用いて解は

$$x(t) = X(t)[x^0 + \int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau]$$

と表わせます.

$$A(t) = X(t)[x^0 + \int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)U(\tau)\,d\tau];$$
$$u(\tau) \text{ measurable } \quad u(\tau) \in U$$

この $A(t)$ は t - 時間後の attainable set ですが，これは compact で convex な集合になります.

$A(t)$ が convex であること.

$$A(t) \ni x^1,\ x^2$$

$\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\alpha + \beta = 1$ にたいして

$$\alpha x^1 + \beta x^2 = \alpha X(t)[x^0 + \int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)u^1(\tau)\,d\tau]$$
$$+ \beta X(t)[x^0 + \int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)u^2(\tau)\,d\tau]$$
$$= X(t)[x^0 + \int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)[\alpha u^1(\tau) + \beta u^2(\tau)]d\tau]$$

$$\alpha u^1(\tau) + \beta u^2(\tau) \in U, \quad \forall \tau \in I$$

で measurable なので

$$\alpha x^1 + \beta x^2 \in A(t)$$

である。

A(t) が compact であること。

$$A(t) \ni x^i \quad (i = 1,2,3,\dots)$$

x^i にたいおうする control u を u^i とすれば $u^i(t) \in U, \ \forall t \in I$

$\{u^i\}$ は $L^2(I)$ で有界なので，適当な部分列は弱収束します。

簡単のため

$$\{u^i\} \to u^* \ \text{weakly in} \ L^2(I)$$

とすれば，U が compact で convex なので

$$u^*(\tau) \in U$$

したがつて

$$\lim_{i\to\infty} x^i(t) = x^*(t)$$

とすれば

$$x^*(t) = X(t)[x^0 + \int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)u^*(\tau)\,d\tau]$$

すなわち $x^*(t) \in A(t)$ で $A(t)$ の閉じていることが示されました．また有界であることもわかりますので $A(t)$ は compact 集合です．

今，初期位置 x^0 から t - 時間後の attainable set を $A_{x_0}(t)$ とおき $x_0 \to A_{x_0}(t)$ なる mapping を考えます。

この対応の連続性は示されます．

そこで，適当な compact convex set S があつて $x_0 \in S$ のとき $A_{x_0}(t) \subset S$ であることがわかりますと不動点定理を用いて，

$$^\exists x_0 \in S, \quad x_0 \in A_{x_0}(t)$$

なる x_0 の存在が示されます．

すなわち， x_0 から出発した解が t 時間後に x_0 にもどる様に control u がえらびだせることになります．

参 考 文 献

[1] M. Hukuhara
Équation au contingent et systeme de commande,
数理解析研究所講究録 11(1966),1-21.

[2] T. Ważewski
Sur une condition équivalente à l'équation au contingent,
Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys.
9(1961),865-867.

[3] S. Kakutani
A generalization of Brouwer's fixed point theorem,
Duke. Math. J. 8(1941),457-459.

[4] T. Ważewski
Sur une condition d'existence des fonction implicites
mesurables, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math.
Astr. Phys. 9(1961),861-863.