数理解析研究所講究録
19巻 1967年 1-54

作用素環の共軛空間に関する雑談

東北大学理学部　竹崎正道

まえがき．作用素環上の位相を研究することは，J. von Neumann により作用素環がとりあげられたその時から始っている．[16, 17] しかし，作用素環上の位相を Banach space の duality の見地からとりあげられたのはそう古いことではなく，1950年に J. Dixmier により [5] で Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上の compact operators 全体の作る Banach space $C(\mathfrak{H})$ の second conjugate space が bounded operators 全体の作る Banach space $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ に一致するという，von Neumann - Schatten の結果 [28] を separability の仮定をおとして証明した時に $\sigma(\mathcal{B}(\mathfrak{H}), C(\mathfrak{H})^*)$ - topology として σ- weak operator topology が導入されたのが最初であろう．その後 von Neumann algebra M 上の σ- weakly continuous positive linear functional を代数的に特徴づけることにより，M の σ- weak operator topology が purely algebraic property であることを示す試みが多くの数学者によりなされたが，最終的に J. Dixmier により1953年に [6] で normality という order property により示された。また [5] では Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上の von Neumann algebra M は $\sigma(\mathcal{B}(\mathfrak{H}), C(\mathfrak{H})^*)$-closed self-adjoint operator algebra だから M は quotient Banach space $C(\mathfrak{H})^*/M^\circ = M_*$ の Banach space として conjugate space になっていて，M 上の σ-weak operator topology は $\sigma(M, M_*)$ - topology に他ならないことが示された．当時は von Neumann algebra を space - free に特徴づける試みが I. Kaplansky 等を中心になされていたが，その方法があまりに代数的にすぎ，von Neumann algebra のもつ超越的性格を把握するに至らなかったが，1956年に境により [21] で C^*-algebra M

が Banach space F の conjugate space であれば M は忠実に von Neumann algebra として表現されることが示された。このことは，一見代数的特徴づけの様に見えるが，この特徴づけが M 上にその単位球を compact にする locally convex topology が存在することゝ同値なことを思えばその超限的性格がはっきりする。この項の結果と J. Dixmier の normality による σ-weak operator topology の特徴づけを併せれば von Neumann algebra M を conjugate space としてもつ Banach space F は M_* 以外にないことが判る。これ等のことからも von Neumann algebra M の研究にとってその predual M_* の研究の重要性がうかがえる。

また C^*-algebra については，その表現と positive linear functional が分ち難く結びついている事は Gelfand-Naimark により1943年に C^*-algebra が導入された時から指摘されている。しかし，これの conjugate space を系統的にとりあげられる様になったのは比較的最近である。1950年に S. Sherman により [29] で予告され1954年に武田により [30] で証明された。C^*-algebra A の second conjugate Banach space A^{**} は適当な演算で von Neumann algebra $\tilde{A}$ に一意になるという Schatten-von Neumann-Dixmier の定理の一般化が出てからである。このことから A^* は実は $\tilde{A}$ の predual $\tilde{A}_*$ であるということになり von Neumann algebra の predual の研究と結びつくことになる。この von Neumann algebra $\tilde{A}$ は A に対して，容易に想像される通り，特別な意味をもっていることから，A の構造の解析が $\tilde{A}$ を通じて行うと非常に容易になることが多い。このことから竹崎は [31] で $\tilde{A}$ を A の universal enveloping algebra と呼んで A を $\tilde{A}$ を通じて調べようという方法論を提唱した。この方向はその後 E.G. Effros [8] や R.T. Prosser [19] により，

A^* の left (right) invariant subspaces や A の left (right) ideal の研究の中に引きつがれている。

この講演では universal enveloping algebra を通じて C^*-algebra 或は von Neumann algebra をながめたらどんなことになっているかということについて，いさゝか古い話しですが観光バス的にめぐって見たいと思います。こゝでの話しはあくまで観光バス的なものであって共軛空間の綜合報告にはなってないことに注意しておきます。尚，最近 predual の weakly compact set の特徴づけをめぐり，Mackey 位相の話しなど興味ある研究が Akemann [/] によりなされてますがここでは時間の都合もあるので割愛します。

§0. 記号と用語。

A : C^*-algebra, element は $a, b, \cdots, x, y, \cdots$

A が特に von Neumann algebra のときは M とかく。

$\lambda, \mu, \nu, \cdots$; scalar を表し、その全体を $\mathbb{C}$ と書く。

A_s : A の self-adjoint elements 全体。

A_+ : A の positive elements 全体。

M_p ; M の projections 全体。

$M_{p.I}$: M の partial isometries 全体。

A^* ; A の conjugate space , その元は $\varphi, \psi, \cdots$

と表し、$\varphi \in A^*$ の $x \in A$ における値は $\langle x, \varphi \rangle$ と表す。

$\varphi \in A^*$ に対し $\langle x, \varphi^* \rangle = \overline{\langle x^*, \varphi \rangle}$ により φ の

adjoint φ^* を定義する。

A_s^* : 上の adjoint operation に関し A^* の self-adjoint elements の全体,

A_+^* ; A の positive linear functionals 全体。

M_* ; M の σ-weakly continuous linear functionals 全体。

M_*^+, M_*^s 等も自然に定義する。

S : A 又は M の単位球,

S^* : A^* 又は M^* の単位球,

S_* ; M_* の単位球,

$\mathfrak{S}$; A 又は M の states の全体,

$\mathfrak{S}_*$; M_* に属する states 全体,

$\mathfrak{H}$: Hilbert space , その vector は $\xi, \eta, \cdots$

内積は $(\xi | \eta)$ と表す。勿論左側 linear , 右側 anti-linear

である。

$\mathcal{B}(\mathfrak{H})$; $\mathfrak{H}$ 上の bounded operators の全体、単に $\mathcal{B}$ と

かくときもある。

$C(\mathfrak{H})$: $\mathfrak{H}$ 上の compact operators の全体，

$\mathcal{T}(\mathfrak{H})$: $\mathfrak{H}$ 上の nuclear operators (trace class operators

の全体で，単に $\mathcal{T}$ 又は $\mathcal{B}_*$ と書くこともある．

$(\pi_\varphi, \mathfrak{H}_\varphi)$: $\varphi \in A_+^*$ により誘導される A の cyclic representationで $\mathfrak{H}_\varphi$ はその表現空間.

Banach space E の subset X に対し $[X]$ により X により span される closed subspace を意味する．

集合 X 上で定義された mappingf の X の subset Y への restriction を $f|_Y$ で表す．

§1. C*-Algebra の Universal Enveloping Algebra

C*-algebra A の second conjugate space A^{**} が適当な積と adjoint operation により C*-algebra になり，適当な Hilbert space 上に von Neumann algebra として忠実に表現されるという，いわゆる Sherman - Takeda の定理は，単に $C(\mathfrak{H})$ の second conjugate space が $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ になるという，von Neumann - Schatten - Dixmier の定理の拡張にとゞまらず，C*-algebra の研究をその second conjugate space の von Neumann algebra のそれに帰着させる technique を可能にして，C*-algebra 研究の強力な方法を提供している．こゝでもう一度この定理の中味に立入って議論して見よう．

$x \in A_s$ の norm は

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, \omega\rangle| ;\ \omega \in \mathfrak{S}\}$$

と与えられるから，A_s と A_s^* の間の real Banach space としての duality に於いて，$S \cap A_s$ は $\mathfrak{S}$ の polar

である．故に $S^* \cap A_s^* = \mathfrak{S}^{\circ\circ}$．$\bigcup_{0\le\lambda\le 1} \lambda\mathfrak{S}$ は $\sigma(A_s^*, A_s)$-compact 且 convex なことに注意すれば

$$S^* \cap A_s^* = \{\lambda\varphi - \mu\psi \; ; \; \varphi, \psi \in \mathfrak{S}, \; \lambda, \mu \ge 0, \; \lambda+\mu \le 1\}$$

と表わされる，即ち

定理 1. $\forall \varphi \in A_s^*$, $\exists\, \omega_1, \omega_2 \in A_+^*$;

$$\varphi = \omega_1 - \omega_2, \qquad \|\varphi\| = \|\omega_1\| + \|\omega_2\|$$

von Neumann - Schatten - Dixmier の定理により，

$$C(\mathfrak{H})^* = \mathfrak{T}(\mathfrak{H}), \qquad \mathfrak{T}(\mathfrak{H})^* = \mathcal{B}(\mathfrak{H})$$

となり，その duality は

$x \in C(\mathfrak{H})$, $y \in \mathfrak{T}(\mathfrak{H})$, $z \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ に対し，

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{Tr}(xy), \qquad \langle z, y \rangle = \mathrm{Tr}(zy)$$

で与えられる．$\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ の $\sigma(\mathcal{B}, \mathfrak{T})$-Topology が σ-weak topology である．

$(\pi, \mathfrak{H})$ を A の表現とすれば π の transpose は

$$^t\pi : \mathcal{B}^* \longrightarrow A^*$$

$^t\pi|\mathfrak{T}$ を π' とすれば

$$\pi' : \mathfrak{T} \longrightarrow A^*$$

更にまたその transpose $^t\pi'$ を $\tilde{\pi}$ とすれば

$$\tilde{\pi} : A^{**} \longrightarrow \mathcal{B}$$

となる．$\pi(A)$ の $\mathcal{B}$ における σ-weak closure $\widetilde{\pi(A)}$ は

$\widetilde{\pi(A)} = \pi(A)^{\circ\circ}$　　但し $\pi(A)^{\circ} = \{ f \in \mathcal{T} : \langle \pi(A), f \rangle = 0 \}$

により与えられる。$\hat{S}$ は S^{**} で $\sigma(A^{**}, A^{*})$-dense で $\tilde{\pi}$ は $\sigma(A^{**}, A^{*})$-topology と $\sigma(\mathcal{B}, \mathcal{T})$-topology に関し連続だから、$\pi(S)$ は $\tilde{\pi}(S^{**})$ で σ-weakly dense である。

また、S^{**} は $\sigma(A^{**}, A^{*})$-compact だから、$\tilde{\pi}(S^{**})$ は σ-weakly compact である。ところで、Kaplansky の density theorem により $\pi(S)$ は $\widetilde{\pi(A)}$ の単位球で σ-weakly dense である。従って $\tilde{\pi}(S^{**})$ は $\widetilde{\pi(A)}$ の単位球である；故に $\tilde{\pi}(A^{**}) = \widetilde{\pi(A)}$ 。そして、$\tilde{\pi}$ は Banach space として $A^{**}/\tilde{\pi}^{-1}(0)$ と $\widetilde{\pi(A)}$ の間の isometry を与える。今 $(\pi, \mathfrak{H}) = \sum_{\varphi \in \mathfrak{S}}^{\oplus} (\pi_{\varphi}, \mathfrak{H}_{\varphi})$ とおけば、定理 1 により $\tilde{\pi}^{-1}(0) = \{0\}$ だから、$\tilde{\pi}$ は A^{**} と $\widetilde{\pi(A)}$ の間の isometry を与える。この isometry により A^{**} と $\widetilde{\pi(A)}$ を同一視すれば、次の結果を得る。

定理 2.　A^{**} は von Neumann algebra として忠実な表現をもつ C^*-algebra である。そして、A の任意の表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ は A^{**} の $\sigma(A^{**}, A^{*})$-topology と $\mathfrak{H}$ 上の σ-weak topology に関し連続な表現 $\tilde{\pi}$ に unique に拡張されて、$\tilde{\pi}(A^{**})$ は $\pi(A)$ の σ-weak closure である。

定義．A^{**} を A の universal enveloping algebra と称し、$\tilde{A}$ と表す。$\tilde{A}$ の忠実な表現 $\tilde{\pi}$ を誘導する A の表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ を A の universal representation という。

文献：[5], [12], [15], [29], [30], [31].

§ 2. von Neumann Algebra として忠実に表現される C^*-algebra (W^*-algebra) の特徴づけ.

境による. von Neumann algebra (W^*-algebra) の特徴づけの証明は易しいものではないが, 上の universal enveloping algebra を使って証明すれば比較的楽に証明が運べる.

補題. A, B を C^*-algebras とし, B は A の subalgebra とする. A, B は夫々 units I_A, I_B を有するとする. A から B への norm が 1 の Banach space としての projection ε が, 有し $\varepsilon(I_A) = I_B$ ならば, 次の性質をもつ.

1 $\quad \varepsilon(x) \geq 0 \quad x \in A_+$

2 $\quad \varepsilon(axb) = a\,\varepsilon(x)b \quad a, b \in B,\ x \in A$

3 $\quad \varepsilon(x)^* \varepsilon(x) \leq \varepsilon(x^* x) \quad x \in A$

証明. $\forall \varphi \in \mathfrak{S}_B$ (B の states 全体) に対し,

$$\| {}^t\varepsilon(\varphi) \| \leq \| \varphi \| = 1$$

$$< 1_A, {}^t\varepsilon(\varphi) > = < \varepsilon(1_A), \varphi > = < 1_B, \varphi > = 1$$

により, ${}^t\varepsilon(\varphi) \in \mathfrak{S}_A$. ${}^t\varepsilon(B_+^*) \subset A_+^*$. 従って, ε は $*$-preserving で且 order preserving である.

A, B の universal enveloping algebras $\tilde{A}, \tilde{B}$ と ε の double transpose ${}^{tt}\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ を考えることにより, A, B は von Neumann algebras として一般性を失わない. 更に, スペクトル論により, $\forall e \in B_p$ に対し,

$$\varepsilon(ex) = e\,\varepsilon(x), \quad \varepsilon(xe) = \varepsilon(x)e, \quad x \in A$$

を示せば $2°$ は示される.

$0 \leq a \leq 1$ ならば $0 \leq eae \leq e$ により

$$\varepsilon(eae) = e\,\varepsilon(eae)\,e$$

故に、$\forall x \in A$, $\varepsilon(exe) = e\,\varepsilon(exe)\,e$.

各 $x \in A$, $\|x\| \leq 1$ に対して $x' = \varepsilon(ex(1-e))$ とおくと、

$$\|ex(1_A - e) + ne\| = \|\{ex(1_A-e) + ne\}\{(1_A-e)x^*e + ne\}\|^{1/2}$$

$$= \|ex(1_A - e)x^*e + n^2 e\|^{1/2} \leq (1+n^2)^{1/2}.$$

$x' = h + ik$, $h, k \in B_s$ とおいて、$ehe \neq 0$ とすると、ehe は non-zero spectrum λ を有する。$-x$ を考えて $\lambda > 0$ と仮定出来る。

$$\|x' + ne\| = \|ex'e + ne + ex'(1_B - e) + (1_B - e)x'e + (1_B-e)x'(1_B-e)\|$$

$$\geq \|e(x' + n1_B)e\| \geq \|ehe + ne\| \geq \lambda + n$$

十分大きな n に対して、

$$\|x' + ne\| \geq \lambda + n > (1+n^2)^{1/2} \geq \|ex(1_A - e) + ne\|$$

これは $\|\varepsilon\| \leq 1$ に矛盾する。故に $h = 0$ 同様に $k = 0$

従って $e\,\varepsilon(ex(1_A-e))\,e = 0$. 同様に $(1_B-e)\varepsilon(ex(1_A-e))(1_B-e) = 0$

次に、$(1_B - e)x'e \neq 0$ とすると、n を十分大きくとって

$$\|x' + n(1_B - e)x'e\| = \|ex'(1_B - e) + (n+1)(1_B - e)x'e\|$$

$$= \max\{\|ex'(1_B - e)\|, (n+1)\|(1_B - e)x'e\|\}$$

$$= (n+1)\|(1_B - e)x'e\|.$$

一方，やはり十分大きな n に対して，

$$\|n(1_B-e)x'e+x'\| \leqq \|ex(1_A-e)+n(1_B-e)x'e\|$$
$$=n\|(1_B-e)x'e\|$$

これは矛盾だから，　$(1_B-e)x'e=0$　　結局，

$$x'=ex'(1_B-e)$$

となり，

$$\mathcal{E}(x)=\mathcal{E}(exe)+\mathcal{E}(ex(1_A-e))+\mathcal{E}((1_A-e)xe)+\mathcal{E}((1_A-e)x(1_A-e))$$

により，

$$e\mathcal{E}(x)(1_B-e)=e\mathcal{E}(ex(1_A-e))(1_B-e)=\mathcal{E}(ex(1_A-e))$$

$$e\mathcal{E}(x)e=e\mathcal{E}(exe)e=\mathcal{E}(exe)$$

従って　$\mathcal{E}(ex)=e\mathcal{E}(x)$，　$\mathcal{E}(xe)=\mathcal{E}(x)e$，$x\in A, e\in B$

次に 3° は

$$0\leqq\mathcal{E}((x-\mathcal{E}(x))^*(x-\mathcal{E}(x)))=\mathcal{E}(x^*x-\mathcal{E}(x)^*x-x^*\mathcal{E}(x)+\mathcal{E}(x)^*\mathcal{E}(x))$$
$$=\mathcal{E}(x^*x)-\mathcal{E}(x)^*\mathcal{E}(x)$$

より示される．　　　　　　　　　　　　　　　　　以上．

この補題を使えば，次の結果が示される．

定理 3　C^*-algebra M が von Neumann algebra として忠実に表現されるための必要十分条件は M が Banach space F の conjugate space となることである．そして，このとき F は M の σ-weakly continuous linear functionals の全体 M_* になる．

証明．　必要性は Dixmier により示されているので，こゝでは省略する．

十分性．単位球 S は $\sigma(M, F)$-compact, convex だから Krein－Milman's theorem により，端点が十分沢山ある．単位球が端点をもてば，M が unit I を有することは Kadison [13] の証明を修正して証明される．

$i : F \longrightarrow M^* = F^{**}$ injection とすると

$\varepsilon = {}^t i : \tilde{M} \longrightarrow F^* = M$ は projection で $\|\varepsilon\| = 1$

故に，ε は補題の 1°～3° の性質をもつ．

$\varepsilon^{-1}(0) = F^\circ$ で，$\varepsilon^{-1}(0)$ は $\sigma(\tilde{M}, M^*)$-closed 且，M は $\sigma(\tilde{M}, M^*)$-dense．$x, y \in M$, $z \in \varepsilon^{-1}(0)$ とすると $\varepsilon(xzy) = x\varepsilon(z)y = 0$ により $x\varepsilon^{-1}(0)y \subset \varepsilon^{-1}(0)$ だから，$\varepsilon^{-1}(0)$ は $\sigma(\tilde{M}, M^*)$-closed ideal で，$\tilde{M}$ の central projection z により $\varepsilon^{-1}(0) = \tilde{M}(1-z)$ と表わされる．$x - \varepsilon(x) \in \varepsilon^{-1}(0)$ により，$x, y \in \tilde{M}$ に対して，$\varepsilon(xy - \varepsilon(x)y) = 0$ 故に $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$ 従って ε は $\tilde{M}$ より M への *-homomorphism で，その kernel は $\tilde{M}(1-z)$，従って ε は $\tilde{M}z$ と M の間の isomorphism を与える．$\tilde{M}z$ は勿論，von Neumann algebra として忠実に表現されるから，M は von Neumann algebra として忠実に表現される．そして，この表現により，F が M_* となることも自明であろう．

文献：[5], [20], [21], [36].

§ 3 Invariant Subspaces と Singular Functionals.

$x, y \in A, \quad \varphi \in A^*$ に対して，

$$\langle xy, \varphi \rangle = \langle x, y\varphi \rangle = \langle y, \varphi x \rangle$$

により，$y\varphi, \varphi x \in A^*$ を定義する．

$$\|x\varphi\| \leqq \|x\| \cdot \|\varphi\|, \quad (x\varphi)^* = \varphi^* x^* \quad etc.$$

は直に示される．

定義．A^* の subspace V が $xV \subset V \quad x \in A$ $(Vx \subset V, x \in A)$ のとき left (right) invariant であるという．両側 invariant のとき単に invariant という．

$x \in M \longmapsto ax \in M$ （又は xa）が $\sigma(M, M_*)$-continuous なことに注意して，次のことがいえる．

定理4 von Neumann algebra M について M_* は M^* の invariant subspace である．また，M_* の closed left (right) invariant subspace V と M の σ-weakly closed right (left) ideal $\mathfrak{m}$ は

$$V^\circ = \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{m}^\circ = V$$

の対応により1対1に対応する．そして，V は M の projection により

$$V = M^* e \qquad (\text{又は } V = eM^*)$$

と表わされる．また M_* の closed subspace V は $\sigma(M, M_*)$-dense subset M_1 について $M_1 V \subset V$ （又は $VM_1 \subset V$）ならば，left (right) invariant である．

これを C^*-algebra A の universal enveloping algebra $\tilde{A}$ について適用すれば次の事がいえる。

系 1. A^* の closed left (right) invariant subspace V は $\tilde{A}_p \ni e$ により $V = A^* e$ （又は $V = eA^*$）と表わされる。特に，A として von Neumann algebra M をとり V として M_* をとれば M_* は $\tilde{M}$ の central projection z により $M_* = M^* z$ と表わされる。

系 1 によって A^* の closed invariant subspace V は self-adjoint であること，また positive linear functionals により span されることなどが直に出てくる。従って，A の closed ideal J の polar を V とすれば V は invariant なことに注意すれば直に次のことがいえる。

系 2. C^*-algebra A の closed ideal J は self-adjoint である。

系 1 の後半の部分から，von Neumann algebra M について $M^* = M_* \oplus M^*(1-z)$ と表わされるから，$M^*(1-z)$ の元は singular であるという。$M^*(1-z)$ も又 invariant だから，positive functionals により span される。

定理 5. $\varphi \in M^*_+$ が singular であるための必要

十分条件は，

$$\forall e \in M_p (\neq 0),\ \exists f \in M_p\ ;\quad e \geq f \neq 0,\ \ \langle f, \varphi \rangle = 0$$

証明．　十分性：　$\varphi = z\varphi + (1-z)\varphi$ と分解して $z\varphi$ の ~~$z\varphi$~~ support projection $s(z\varphi)$ を考えれば $\varphi \geq z\varphi$ により，φ は $s(z\varphi) M s(z\varphi)$ 上で faithful だから $s(z\varphi) = 0$ 即ち $z\varphi = 0$.

必要性：　$\psi \in M_*^+$, $\langle e, \psi \rangle > \langle e, \varphi \rangle$ となる様に一つとり固定する．

$$\mathfrak{F} = \{ p \in M_p\ ;\ \langle p, \psi \rangle \leqq \langle p, \varphi \rangle,\ p \leqq e \}$$

とおくと，$\mathfrak{F}$ は inductive set になる．実際，$\{p_\alpha\} \subset \mathfrak{F}$ が linearly ordered とすると $p = \sup_\alpha p_\alpha$ とおけば

$$\langle p, \varphi \rangle \geqq \sup \langle p_\alpha, \varphi \rangle \geqq \sup \langle p_\alpha, \psi \rangle = \langle p, \psi \rangle$$

により $p \in \mathfrak{F}$. Zorn の lemma により $\mathfrak{F}$ は maximal element p を有する．$e \notin \mathfrak{F}$ だから $f = e - p \neq 0$ p の maximality により f の任意の subprojection q に対して $\langle q, \varphi \rangle \leqq \langle q, \psi \rangle$, スペクトル分解定理により fMf 上で $\varphi \leqq \psi$. 即ち，$f\varphi f \leq f\psi f$.

ところで $(1-z)\psi = 0$ により，

$$0 = (1-z) f\varphi f = f(1-z)\varphi f = f\varphi f$$

即ち，　$\langle f, \varphi \rangle = 0$　　　以上．

この結果を使って，Dixmier による normality と σ-weak continuity の同値性の証明が与えられる．

定義．$\varphi \in M_+^*$ が increasing net $\{a_\alpha\} \subset M_s$ に対して，$\langle \sup a_\alpha, \varphi \rangle = \sup \langle a_\alpha, \varphi \rangle$ となるとき φ は normal という．

補題，$\varphi \in M_+^*$ が normal ならば

$$\exists e \in M_p \ ; \ e \neq 0, \ \varphi : \text{faithful on } eMe.$$

証明．$\mathfrak{F} = \{ p \in M_p : \langle p, \varphi \rangle = 0 \}$ とおけば，$\mathfrak{F}$ は φ の normality により inductive set である．maximal element を p とすれば，$\varphi \neq 0$ により，$1 - p = e \neq 0$　あきらかに，φ は eMe 上で faithful である．

系1　$\varphi \in M_+^*$ に対し次は同値．

1° φ は normal である．

2° φ は σ-weakly continuous である．

証明．2° $\Rightarrow$ 1° は $\sup a_\alpha = \sigma\text{-weak} \lim a_\alpha$ より定義自身である．

1° $\Rightarrow$ 2°：$\varphi = \varphi z + \varphi(1-z)$ とおくと，φz は 1° により normal だから，$\varphi - \varphi z = \varphi(1-z)$ も又 normal である．

一方 $\varphi(1-z)$ は singular だから，補題にある如き projection は定理5により存在しない．故に $\varphi(1-z)=0$ 以上．

M_* の元は以後 normal であるという．

系2. von Neumann algebra M に対し，Banach space F が $F^*=M$ となれば $F=M_*$

即ち，M_* は M の unique predual である．

証明． F は定理3により，M を適当な表現で von Neumann algebra とした時に，その σ-weakly continuous linear functionals 全体である．ところで M 上の positive linear functional の normality は M の order property で purely algebraic である．従って F の functional は M 上 normal である．即ち $F=M_*$ 以上．

系3. $\varphi\in M^*$ が M の凡ての maximal abelian subalgebra 上で normal ならば φ は normal である．

証明． φ の singular part を考えて，φ 自身 singular として矛盾を導く．

$\varphi=(\varphi_1-\varphi_2)+i(\varphi_3-\varphi_4)$ と positive linear functional に分解して，$\psi=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4$ とおけば ψ は singular, positive である．定理5により，

$\exists \{e_\alpha\} \subset M_p$: orthogonal $\sum e_\alpha = 1$. $\langle e_\alpha, \psi \rangle = 0$

勿論，$\langle e_\alpha, \varphi \rangle = 0$. $\{e_\alpha\}$を含む maximal abelian subalgebra 上で φ は normal でない．

以上

Abelian von Neumann algebra は適当な measure space (Ω, μ) 上の $L^\infty(\Omega, \mu)$ と同型でその predual は $L^1(\Omega, \mu)$ になるが，L^1-space は weakly sequentially complete なことに注意して，系3から次が得られる．

系4 von Neumann algebra の predual は weakly sequentially complete である．

文献：[6], [8], [19], [20], [24], [31].

§4. Invariant Subspaces の Density.

C*-algebra の norm の極小性の dual として，Kaplansky の density theorem に対応する次の結果が証明される．

定理 6. C*-algebra A の conjugate space A^* の invariant subspace V が A^* で $\sigma(A^*, A)$-dense ならば $V \cap S^*$ が S^* で $\sigma(A^*, A)$-dense である．

証明． $a \in A$ に対して，$R_a\varphi = a\varphi$, $\varphi \in V$ により，A の normed space V 上への表現 R_a を定義する

$$\|R_a\| = \sup\{\|R_a\varphi\| : \varphi \in V \cap S^*\} \leqq \|a\|.$$

また $R_a = 0$ ならば

$$\langle xa, \varphi\rangle = 0 \qquad x \in A, \varphi \in V$$

V の $\sigma(A^*, A)$-density により，$xa = 0$, $x \in A$.

故に $a = 0$. これは $A \ni a \longmapsto \|R_a\|$ は A 上の一つの norm になることを意味する。従って C*-algebra の norm の minimality により $\|R_a\| = \|a\|$. これは次のことを意味する

$$\begin{aligned}
\|a\| = \|R_a\| &= \sup\{\|R_a\varphi\| : \varphi \in V \cap S^*\} \\
&= \sup\{|\langle x, a\varphi\rangle| : x \in S, \varphi \in V \cap S^*\} \\
&= \sup\{|\langle xa, \varphi\rangle| : x \in S, \varphi \in V \cap S^*\} \\
&= \sup\{|\langle a, \varphi x\rangle| : x \in S, \varphi \in V \cap S^*\} \\
&\leqq \sup\{|\langle a, \varphi\rangle| : \varphi \in V \cap S^*\} \leqq \|a\|
\end{aligned}$$

故に　$\|a\| = \sup\{\,|\langle a, \varphi\rangle|;\ \varphi \in V \cap S^*\}$. $a \in A$

従って，$(V \cap S^*)^{\circ} = S$,　$(V \cap S^*)^{\circ\circ} = S^*$.

つまり　$V \cap S^*$　は S^* で $\sigma(A^*, A)$-dence　である．

文献：[2], [20], [23].

§5. C^*-algebra の表現と Invariant subspaces

C^*-algebra A の表現 $(\pi_1, \mathfrak{H}_1)$ と $(\pi_2, \mathfrak{H}_2)$ が unitary 同値であるのは，

$$\exists u : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2 \quad \text{isometry} \quad u\pi_1(x)u^{-1} = \pi_2(x), \quad x \in A$$

となることで，quasi-equivalent であるというのは

$$\exists \rho : \widetilde{\pi_1(A)} \xrightarrow{\text{onto}} \widetilde{\pi_2(A)} \quad ; \quad \text{isomorphism}$$

$$\pi_2(x) = \rho \circ \pi_1(x), \quad x \in A$$

となることである。unitary 同値のとき $\pi_1 \simeq \pi_2$ quasi-equivalent のとき $\pi_1 \sim \pi_2$ とかく，unitary 同値な subrepresentation を互に含まないとき π_1, π_2 は disjoint といって $\pi_1 \between \pi_2$ とかく。

上の表現の同値性の中，特に quasi-equivalence と，A^* の invariant subspace の間には次の如く深いつながりがある。

$(\pi, \mathfrak{H})$ を A の表現とする。即ち

$$\pi \ : \ A \longrightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \quad ; \ *\text{-homomorphism}$$

$${}^t\pi \ : \ A^* \longleftarrow \mathcal{B}(\mathfrak{H})^*.$$

${}^t\pi(\mathfrak{T}(\mathfrak{H})) = V_\pi$ と置くと，

定理7 V_π は A^* の closed invariant subspace で，

$(\pi_1, \mathfrak{H}_1)$, $(\pi_2, \mathfrak{H}_2)$ が $\pi_1 \sim \pi_2$ となるための必要十分条件は $V_{\pi_1} = V_{\pi_2}$ となることである。

証明．§1で見たように，A の universal enveloping algebra $\tilde{A}$ への π の拡張 $\tilde{\pi}$ は ${}^t\pi|\mathfrak{I} = \pi'$ の transpose ${}^t\pi'$ として与えられる．$\tilde{\pi}(\tilde{A}) = M$ とおくと，$\pi'^{-1}(0) = \pi(A)^0$ により，π' は自然に $M_* = \mathfrak{I}/\pi'^{-1}(0) \longrightarrow V_\pi$ を誘導する。これを再び π' で表すと，$\tilde{\pi}(\tilde{S})$ は M の単位球だから，$\varphi \in M_*$ に対し

$$\|\varphi\| = \sup\{|\langle x, \varphi\rangle| \ ; \ x \in M_*, \ \|x\| \leq 1\}$$

$$= \sup\{|\langle \tilde{\pi}(x), \varphi\rangle| \ ; \ x \in \tilde{S}\}$$

$$= \sup\{|\langle x, \pi'(\varphi)\rangle| \ ; \ x \in \tilde{S}\}$$

$$= \|\pi'(\varphi)\|$$

但し，$\tilde{S}$ は $\tilde{A}$ の単位球を意味する。従って，π' は $M_* \longrightarrow V_\pi$ の isometry である。故に，V_π は closed である。

又 $a, x \in A$, $\varphi \in V_\pi$ とすると

$\exists\, \psi \in M_* \ ; \ \pi'(\psi) = \varphi$,

$$\langle x, a\varphi\rangle = \langle xa, \varphi\rangle = \langle xa, \pi'(\psi)\rangle$$

$$= \langle \pi(xa), \psi\rangle = \langle \pi(x), \pi(a)\psi\rangle$$

$$= \langle x, \pi'(\pi(a)\psi)\rangle$$

により，　$a\varphi \in V_a$，　同様に　$\varphi a \in V_a$　従って，V_π　は closed invariant subspace　である．

今　$\pi_1 \sim \pi_2$　とし，$\pi_2 = \rho \circ \pi_1$　とする．

$\tilde{\pi}_i(\tilde{A}) = M_i \quad (i = 1, 2)$　とすれば，${}^t\rho(M_{2,*}) = M_{1,*}$ により，

$$V_{\pi_2} = \pi_2'(M_{2*}) = \pi_1' \circ {}^t\rho\,(M_{2*})$$
$$= \pi_1'(M_{1*}) = V_{\pi_1}.$$

逆に，　$V_{\pi_1} = V_{\pi_2}$　とする。　π_1'，π_2'　は夫々　$M_{1,*}$，$M_{2,*}$ から V_{π_1}，V_{π_2}　への　isometry　であることを既に見たが，

$$\rho' = \pi_1'^{-1} \circ \pi_2' \;;\quad M_{2,*} \xrightarrow{\text{isometry}} M_{1,*}.$$

$\rho = {}^t\rho'$　とおけば　ρ　は　$M_1 \to M_2$　の　isometry　で　$\varphi \in M_{2,*}$，

$x, y \in A$　に対し，

$$\langle \rho(\pi_1(x)^*\pi_1(y)),\ \varphi \rangle = \langle \pi_1(x^*)\pi_1(y),\ \rho'(\varphi) \rangle$$
$$= \langle \pi_1(x^* y),\ \pi_1'^{-1} \circ \pi_2'(\varphi) \rangle$$
$$= \langle x^* y,\ \pi_2'(\varphi) \rangle = \langle \pi_2(x)^*\pi_2(y),\ \varphi \rangle$$

従って，　$\rho \circ \pi_1 = \pi_2$　で且　ρ　は　$*$-isomorphism である。　　　　　　　　　　　　　以上．

共軛空間の面から見れば，Fell　の意味での表現の　weakly containment は次の様になる。

定理8.　A の表現の族 $\mathfrak{S}$ に表現 $(\pi_0, \mathfrak{H}_0)$ が weakly contained であるための必要十分条件は，V_{π_0} が $\bigcup_{\pi\in\mathfrak{S}} V_\pi$ により生成される，$\sigma(A^*, A)$-closed subspace に含まれることである。

von Neumann algebra の場合は，normal faithful representation が特別な意味をもっているから，その反対の表現，つまり M の表現 π が $V_\pi \cap M_* = \{0\}$ のとき π は singular であるという。

定理9.　M の表現 π は $\widetilde{\pi(M)}$ の unique central projection z により

$$\pi_1(x) = \pi(x)z \quad , \quad \pi_2(x) = \pi(x)(1-z)$$

と分解されて，π_1 は normal，π_2 は singular になる。π_1 を π の normal part，π_2 を singular part という。

証明.　$\tilde{\pi}$ を universal enveloping algebra $\tilde{M}$ への π の拡張とする。z_0 を $M^* z_0 = M_*$ となる $\tilde{M}$ の central projection とすると，$\tilde{\pi}(z_0) = z$ が求める projection である。実際，$\varphi \in \widetilde{\pi}(\tilde{M})_*$ に対し，

$$\begin{aligned}\langle x, \pi'(\varphi)\rangle &= \langle x, z_0\pi'(\varphi)\rangle + \langle x, (1-z_0)\pi'(\varphi)\rangle \\ &= \langle \tilde{\pi}(xz_0), \varphi\rangle + \langle \tilde{\pi}(x(1-z_0)), \varphi\rangle \\ &= \langle \pi(x)z, \varphi\rangle + \langle \pi(x)(1-z), \varphi\rangle\end{aligned}$$

となり，$x \in M \longrightarrow \langle \pi(x)z, \varphi \rangle$ は normal，
$x \in M \longrightarrow \langle \pi(x)(1-z), \varphi \rangle$ は singular になる．

文献：[10], [31].

§ 6. 既約表現の Transitivity.

C^*-algebra の既約表現の代数的既約性は R. Kadison によって示されたが，この定理は単に結果としてきれいな形をしているというばかりでなく，応用上も大変大事なものである。この結果は作用素環の分野でまだ完全に利用しきってるとはいゝ難い面もあるが，J. Glimm がこれを巧妙に使って type I C^*-algebra の特徴づけを行った．R. Kadison の証明は Kaplansky の dencity theorem をたくみに利用したものだが，こゝでは共軛空間を利用して，自然な形で証明して見る。

C^*-algebra A の state φ に対し $\mathfrak{m}_\varphi = \{x \in A \,;\, \langle x^*x, \varphi\rangle = 0\}$ を φ の left kernel というが，$x \in A$ の $A/\mathfrak{m}_\varphi$ における canonical image $x + \mathfrak{m}_\varphi$ を $\eta_\varphi(x)$ と表す．

$A/\mathfrak{m}_\varphi$ の内積を $(\eta_\varphi(x) \mid \eta_\varphi(y)) = \langle y^* x, \varphi\rangle$, $x, y \in A$ 定義すれば $A/\mathfrak{m}_\varphi$ は prehilbert space でその completion として，φ により induce される cyclic representation π_φ の表現空間 $\mathfrak{H}_\varphi$ が与えられる。尚 π_φ は $A/\mathfrak{m}_\varphi$ 上では

$\pi_\varphi(a)\eta_\varphi(x) = \eta_\varphi(ax) \quad a, x \in A$ として定義される．

ところで，A は勿論 Banach space であり，$\mathfrak{m}_\varphi$ はその closed subspace だから，$A/\mathfrak{m}_\varphi$ は Banach space としての商空間と見れば complete である．この quotient norm

と前の内積による norm の関係を見て，既約表現の transitivity を示そうというのが我々の方針である．

補題． von Neumann algebra M の normal pure state φ に対して $M/\mathfrak{m}_\varphi$ は商空間として Hilbert space で，その内積は φ により誘導されたものと一致する。即ち，

$$\langle x^*x, \varphi\rangle^{1/2} = \inf\{\|x+y\| \; ; \; y \in \mathfrak{m}_\varphi\}, \quad x \in M .$$

証明． φ の normality により $\mathfrak{m}_\varphi$ は M の minimal projection e により $\mathfrak{m}_\varphi = M(1-e)$ と表わされる．

こゝで e は φ の support projection $s(\varphi)$ である．

従って η_φ は Me と $M/\mathfrak{m}_\varphi$ の間の代数的同型対応を与える。 今 $M/\mathfrak{m}_\varphi$ の quotient norm を $|||\cdot|||$ と表すと，

$x \in Me$ に対して

$$\begin{aligned} |||\eta_\varphi(x)||| &= \inf\{\|x+y\| \; ; \; y \in \mathfrak{m}_\varphi\} \\ &= \inf\{\|xe + y(1-e)\| \; ; \; y \in M\} \\ &\geq \|xe\| = \|x\| \geq |||\eta_\varphi(x)||| \end{aligned}$$

により $\eta_\varphi|Me$ は isometry である． $\xi_\varphi = \eta_\varphi(1)$ とすると

$eMe = \mathbb{C}e$ だから，各 $x \in M$ に対して

により $\eta_\varphi | Me$ は isometry である。$\xi_\varphi = \eta_\varphi(1)$ とすると，$eMe = \mathbb{C}e$ だから，各 $x \in M$ に対して

$$\| xe \| = \| ex^* xe \|^{1/2} = \| \pi_\varphi(e)\pi_\varphi(x^*)\pi_\varphi(x)\pi_\varphi(e) \|^{1/2}$$

$$= (\pi_\varphi(xe)\xi_\varphi \mid \pi_\varphi(xe)\xi_\varphi)^{1/2} = \| \pi_\varphi(xe)\xi_\varphi \|$$

となる．即ち，$Me \ni x \longrightarrow \pi_\varphi(x)\xi_\varphi \in \mathfrak{H}_\varphi$ は isometry である．ところで，φ は normal 且 pure だから $\pi_\varphi(M) = \mathcal{B}(\mathfrak{H}_\varphi)$ で $\pi_\varphi(Me)\xi_\varphi = \mathfrak{H}_\varphi$ となる．

従って，

$$(M/\mathfrak{m}_\varphi, \|\!|\cdot|\!\|) \ni \eta_\varphi(x) \longrightarrow xe \in Me \longrightarrow \pi_\varphi(xe)\xi_\varphi \in \mathfrak{H}_\varphi$$

は isometry である．つまり $(M/\mathfrak{m}_\varphi, \|\!|\cdot|\!\|) = \mathfrak{H}_\varphi$ である．

定理10. C^*-algebra A の pure state φ に対し商空間 $A/\mathfrak{m}_\varphi$ は Hilbert space であり，その内積は φ によより誘導されたものと一致する．

証明． universal enveloping algebra $\widetilde{A}$ の上で φ は normal pure になるから，その left kernel を $\widetilde{\mathfrak{m}}_\varphi$ とすれば，$\widetilde{A}/\widetilde{\mathfrak{m}}_\varphi$ は補題により Hilbert space である．

$V = \widetilde{\mathfrak{m}}_\varphi^\circ \subset A^*$ とおけば V は定理4により A^* の right invariant subspace である．

$\widetilde{\mathfrak{m}}_\varphi$ は φ の normality により $\sigma(\widetilde{A}, A^*)$-closed だから

$\widetilde{\mathfrak{m}}_\varphi^{\circ\circ} = \widetilde{\mathfrak{m}}_\varphi$,　　即ち，$\widetilde{A}/\widetilde{\mathfrak{m}}_\varphi = A^{**}/\mathcal{V}^\circ = \mathcal{V}^*$,

故に，$\mathcal{V}$ の conjugate space は Hibert space である．

従って $\mathcal{V}$ 自身が Hilbert space で $\mathcal{V}$ は $\sigma(A^*, A)$-closed

である．従って $(\mathcal{V}^\circ \wedge A)^\circ = \mathcal{V}$ ，ところで $\mathcal{V}^\circ \wedge A = \widetilde{\mathfrak{m}}_\varphi \wedge A = \mathfrak{m}_\varphi$

だから $\mathcal{V} = \mathfrak{m}_\varphi^\circ$ で $\mathcal{V} = (A/\mathfrak{m}_\varphi)^*$ となる．つまり $A/\mathfrak{m}_\varphi$

自身 Hilbert space である．また，$(A/\mathfrak{m}_\varphi)^{**} = \widehat{A}/\widetilde{\mathfrak{m}}_\varphi$

により $A/\mathfrak{m}_\varphi$ の内積は $\widehat{A}/\widetilde{\mathfrak{m}}_\varphi$ の内積だから，φ によるも

のと一致する．

定義．$\widehat{A}$ の projection e が $e\widehat{A}e$ が有限次元のとき

finite rank projection と呼ぶ．

finite rank projection は minimal projection の finite orthogonal sum で表わされる．

系 1．$\widetilde{A}$ の finite rank projection e に対して，

$\widetilde{A}e = Ae$ ，$\widetilde{A}_s e = A_s e$ となる．

これが R. Kadison の既約表現の n-fold transitivity を含むことは殆ど自明であろう．

証明．$e = e_1 + \cdots + e_n$ と minimal projections $e_1, \cdots e_n$ の orthogonal sum に分解すれば，

$$\widehat{A}e = \widetilde{A}e_1 + \cdots + \widehat{A}e_n$$

と直和分解される．各 $\widetilde{A}e_i$ は既に示した通り Hilbert space だから，その有限直和 $\widetilde{A}e$ は reflexive である．
$\{\widetilde{A}(1-e)\}^\circ = V$ とおけば，V は A^* の right invariant subspace で $V = eA^*$, $V^* = \widetilde{A}/\widetilde{A}(1-e)$ となる．
ところで，補題の証明から $\widetilde{A}e \ni x \longmapsto x + \widetilde{A}(1-e) \in \widetilde{A}/\widetilde{A}(1-e)$ は isometry だから，$V^* \cong Ae$ 従って，V も又 reflexive で $\sigma(A^*, A)$-closed である．故に，$(A/A\cap V^\circ)^* \cong V$, $(A/A\cap V^\circ)^{**} \cong \widetilde{A}e$

つまり $A/(A\cap V^\circ) \ni x + (A\cap V^\circ) \mapsto xe \in \widetilde{A}e$ は1対1，onto isometry である．勿論，$A \ni x \longmapsto xe \in \widetilde{A}e$ は onto である．そして，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \widetilde{A}e,\ \exists a \in A;\ ae = x,\ \|a\| < \|x\| + \varepsilon$$

$\widetilde{A}$ 上の σ-strong operator topology は A^* の state により導入される Hilbert semi-norms の族により誘導される locally convex topology だから，各 $\widetilde{A}e_i$ 上では σ-strong operator topology と operator norm は共に Hilbert space としての norm の位相で一致する．その有限直和 $\widetilde{A}e$ 上でも operator norm と σ-strong operator topology は一致する．このことに注意して
$\widetilde{A}_s e = A_s e$ を示す．

$h \in \widetilde{A}_s$, $\|h\| \leq 1$, に対して, $h_1 \in A_s$, $\|h_1\| \leq 1$, $\|(h-h_1)e\| < \frac{1}{2}$

にとる。以下 $h_1, \cdots, h_{n-1} \in A_s$ が

$$\|h_k\| < \frac{1}{2^{k-2}}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1,$$

$$\|(h - \sum_{i=1}^{n-1} h_i)e\| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

と選べたとする. $k = h - \sum_{i=1}^{n-1} h_i$ とおけば,

$$k \in \widetilde{A}_s, \quad \|ke\| < \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$k = eke + ek(1-e) + (1-e)ke + (1-e)k(1-e)$$

により, $k' = ke + ek(1-e)$ とおけば,

$$k' \in \widetilde{A}_s, \quad \|k'\| < \frac{1}{2^{n-2}}, \quad k'e = ke$$

そこで $h_n \in A_s$ を

$$\|h_n\| < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \|(h_n - k')e\| < \frac{1}{2^n}$$

をとれば, $h_0 = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \in A_s$ 且 $h_0 e = he$.

この h_0 も又,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall h \in \widetilde{A}_s, \ \exists h_0 \in A_s ; \ \|h_0\| < \|h\| + \varepsilon$$
$$he = h_0 e$$

ととれることを注意しておく.

系 2. C^*-algebra A の disjoint irreducible representations $(\pi_1, \mathfrak{H}_1), \cdots, (\pi_n, \mathfrak{H}_n)$ をとり, $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{H}_1, \cdots \mathfrak{K}_n \subset \mathfrak{H}_n$ を夫々有限次元 subspace とし,

$T_1 \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1)$, $\cdots$ $T_n \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_n)$ とすれば

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$; $\pi_j(x)|\widehat{\mathfrak{K}}_j = T_j|\widehat{\mathfrak{K}}_j$

$$\|x\| < \max_{1 \leq i \leq n} \|T_i\| + \varepsilon .$$

各 T_j が self-adjoint ならば x も又 self-adjoint にとれる。

問題： $e \in \widehat{A}_p$ を finite rank としたとき

$\widetilde{A}_+ e = A_+ e$

はいえるか?

文献：[14], [31], [35].

§7. Linear Functionals の Polar Decomposition.

von Neumann algebra M の predual M_* の元 φ に対して，

φ により生成される closed right (left) invariant

は定理4により $V_\varphi = eM_*$ (又は M_*e)

subspace $V_\varphi = [\varphi M]$ (又は $[M\varphi]$)$_\wedge$ と $e \in M_p$ により表わされる．

この e を φ の left (right) support projection と称し，

$S_\ell(\varphi)$ （又は $S_r(\varphi)$ ）で表す．これは $e\varphi = \varphi$ (又は $\varphi e = \varphi$)

となる projection e の中で最小のものである． φ が

self-adjoint ならば $S_r(\varphi) = S_\ell(\varphi)$ となるから，単に $S(\varphi)$

と記し， support projection という．これは positive functional

の support projection の拡張になっている．

$x \in M$ の polar decomposition $x = u|x|$

$|x| = (x^*x)^{1/2}$ が可能なことは良く知られているが，これと

~~ele~~ analogous な結果が M_* についても成立つことを示す．

補題1. $\varphi \in M_*,\quad e \in M_p,\quad \|e\varphi\| = \|\varphi\|$

$$\Rightarrow e\varphi = \varphi$$

証明． $\|\varphi\| = 1$ として一般性を失わない． $f = 1 - e$

とおいて， $f\varphi = 0$ を示す．

$$f\varphi \neq 0 \Rightarrow \exists\, b \in M;\ \langle b, f\varphi \rangle = \delta > 0,\ \|b\| = 1.$$

$M = (M_*)^*$ により，

$$\exists\, a \in M:\ \|a\| = 1,\quad \langle a, e\varphi \rangle = 1.$$

$$\|ae+\delta bf\|^2=\|(ae+\delta bf)(ae+\delta bf)^*\|$$
$$=\|ae(ae)^*+\delta^2 bf(bf)^*\|\leq 1+\delta^2.$$

により，

$$\|ae+\delta bf\|\leqq\sqrt{1+\delta^2}<1+\delta^2$$

一方

$$\langle ae+\delta bf,\varphi\rangle=\langle a,e\varphi\rangle+\delta\langle b,f\varphi\rangle=1+\delta^2$$

これは $\|\varphi\|=1$ に矛盾する．故に $f\varphi=0$.

補題２. $\varphi\in M_*$ に対し

$$\exists\, a\in M_+\cap S\ ;\ \langle a,\varphi\rangle=\|\varphi\|\iff\varphi\geqq 0.$$

証明. $\Leftarrow$: $\|\varphi\|=\langle I,\varphi\rangle$ により明らか

$\Rightarrow$: $0\leq a\leq 1$ により，任意の実数 θ に対し

$$\|a+e^{i\theta}(1-a)\|\leqq 1$$

θ を $e^{i\theta}\langle 1-a,\varphi\rangle\geqq 0$ となる様にとれば

$$\|\varphi\|\leqq\langle a,\varphi\rangle+e^{i\theta}\langle 1-a,\varphi\rangle\leqq\|\varphi\|$$

により，$\langle 1-a,\varphi\rangle=0$ 故に，$\|\varphi\|=\langle 1,\varphi\rangle$

これから $\varphi\geq 0$ が導かれる．

定理１．１．(Polar Decomposition)

$$\forall\varphi\in M_*,\ \exists_1\,\psi\in M_*^+,\ \exists_1\,v\in M_{P.I}\ ;$$
$$\varphi=v\psi\qquad v^*v=s(\psi).$$

以後この ψ を $|\varphi|$ と表し，φ の absolute value と称する。

証明。 $\|\varphi\|=1$ として十分である。

$$\exists\, a \in S\,; \quad \langle a, \varphi \rangle = 1.$$

$a^* = u|a^*|$ と a^* を polar decompose すると

$$1 = \langle |a^*|u^*, \varphi \rangle = \langle |a^*|, u^*\varphi \rangle$$

$u^*\varphi = \psi$ とおけば，$\|\psi\| \leq 1$, $|a^*| \in S$ だから，補題 2 により $\psi \geq 0$, $e = uu^*$ とすれば，$u\psi = uu^*\varphi = e\varphi$ 且

$$1 = \langle a, \varphi \rangle = \langle |a^*|u^*, \varphi \rangle = \langle |a^*|u^*uu^*, \varphi \rangle$$
$$= \langle a, e\varphi \rangle$$

により，$\|e\varphi\| = 1 = \|\varphi\|$ 補題 1 により $e\varphi = \varphi$. 即ち $\varphi = u\psi$. $u^*u\psi = u^*\varphi = \psi$ により $u^*u \geqq s(\psi)$. 従って $v = us(\psi)$ とおけば $v \in M_{p.I}$ で且 $\varphi = v\psi$, $v^*v = s(\psi)$ となる。次に一意性を示す。

$$\varphi = v_1\psi_1, \quad \psi_1 \geq 0. \quad v_1^*v_1 = s(\psi_1)$$

と仮定して $v_1 = v$, $\psi_1 = \psi$ を示す。

$$p = v^*v = s(\psi), \qquad q = vv^*$$

$$p_1 = v_1^*v_1 = s(\psi_1), \qquad q_1 = v_1v_1^*$$

とおく。$x \in M$ に対して，

$$\langle x, \varphi \rangle = \langle x, v\psi \rangle = \langle x, v_1 \psi_1 \rangle.$$

$$\langle x, \psi \rangle = \langle xp, \psi \rangle = \langle x v^* v, \psi \rangle$$

$$= \langle x v^*, \varphi \rangle = \langle x v^*, v_1 \psi_1 \rangle.$$

$$= \langle x v^* v_1, \psi_1 \rangle = \langle$$

$$= \langle p_1 x v^* v_1, \psi_1 \rangle$$

$x = 1 - p_1$ とおけば， $\langle 1-p_1, \psi \rangle = 0$

$$p_1 \geq s(\psi) = p$$

同様に， $p \geq s(\psi_1) = p_1$ 即ち， $p = p_1$

$v_1^* v = p v_1^* v p$ により

$$v_1^* v = h + ik, \quad h, k \in M_s$$

と分解すれば， $h, k \in pMp$， $\|h\|, \|k\| \leq 1$

$$\langle v_1^* v, \psi \rangle = \langle v_1^*, v\psi \rangle = \langle v_1^*, v_1 \psi_1 \rangle$$

$$= \langle p, \psi \rangle = 1 = \langle h, \psi \rangle + i \langle k, \psi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle h, \psi \rangle = 1$$

ψ は pMp 上 faithful で $-p \leq h \leq p$ により

$h = p$. また $\|v_1^* v\| = 1$ により $k = 0$

従って $v_1^* v = p$. adjoint を考えて $v^* v_1 = p$.

$$v = q v = v v^* v = v p = v v^* v_1 = q v_1$$

$$v_1 = q_1 v_1 = \cdots\cdots \quad \cdots = q_1 v$$

$$e = vv^* = e v_1 v_1^* e = e e_1 e$$

$$e_1 = v_1 v_1^* = \cdots = e_1 e e_1$$

により，$e = e_1$ 且 $v = v_1$ となる．そして，

$$\psi = v^* \varphi = v_1^* \varphi = \psi_1$$

を得る．　　　　　　　　　　　　　　　以上．

上の定理で，$vv^* = e = S_e(\varphi)$ となっていることに注意しておく．

系1　C*-algebra A の conjugate space A^* の closed left (right) invariant subspace V は positive element を有し，

$$V = [A(V \cap A^*_+)] \text{（又は } [(V \cap A^*_+)A] \text{）}$$

系2　C*-algebra A の closed left ideal m は

$$m = \cap\{ m_\varphi : \varphi \text{ は } m_\varphi \supset m \text{ となる pure state} \}$$

と表わされる．

これは $m^\circ \subset A^*$ について，系1を適用し更に Krein-Milman の定理を適用すれば容易に導かれる．

文献：[8], [19], [20], [25], [35].

§8. Radon-Nikodym の定理

von Neumann algebra M に於いて

$$x, y \in M, \quad 0 \leq y \leq x \Rightarrow \exists a \in M \cap S : y = a x a^*$$

が簡単に判る。実際、 $y^{1/2} = a x^{1/2}$ と表わされる。これを dual の形にして、

$$\varphi, \psi \in M_*, \quad 0 \leq \psi \leq \varphi \Rightarrow \exists a \in M ; \psi = a^* \varphi a \ ?$$

を問題とする。これは可換な場合の Radon-Nikodym の定理の強い形に対応する。semi-finite の場合は H.A.Dye により trace の理論を使って証明されている。

補題1　$\varphi \in M_*^+$, $a \in M$, $a\varphi$: self-adjoint

$$\Rightarrow |\langle h, a\varphi \rangle| = |\langle ha, \varphi \rangle| \leq \|a\| \langle h, \varphi \rangle, \ h \in M_+.$$

証明. $\langle a^* x, \varphi \rangle = \overline{\langle x^* a, \varphi \rangle} = \overline{\langle x^*, a\varphi \rangle} = \langle x, (a\varphi)^* \rangle$

$$= \langle x, a\varphi \rangle = \langle xa, \varphi \rangle, \quad x \in M$$

故に、 $\langle x a^2, \varphi \rangle = \langle xa \cdot a, \varphi \rangle = \langle a^* x a, \varphi \rangle$.

$$a^2 \varphi = a \varphi a^* \geq 0.$$

$$a^{2^{n+1}} \varphi = a^{2^n} \varphi (a^*)^{2^n}$$

$h \in M^+$ に対して

$$|\langle ha, \varphi \rangle| = |\langle h^{1/2} \cdot h^{1/2} a, \varphi \rangle|$$

$$\leqq \langle h,\varphi\rangle^{1/2}\langle a^*ha\ \varphi\rangle^{1/2}$$

$$= \langle h,\varphi\rangle^{1/2}\langle ha^2,\varphi\rangle^{1/2} \leqq \langle h,\varphi\rangle^{1/2}\{\langle h,\varphi\rangle^{1/2}\langle (a^2)^*ha^2,\varphi\rangle$$

$$= \langle h,\varphi\rangle^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\langle ha^4,\varphi\rangle^{1/4}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\leqq \langle h,\varphi\rangle^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}}\langle ha^{2^n},\varphi\rangle^{1/2^n} = \langle h,\varphi\rangle^{1-\frac{1}{2^n}}\langle ha^{2^n},\varphi\rangle^{1/2^n}$$

$$\leqq \langle h,\varphi\rangle^{1-\frac{1}{2^n}}(\|\varphi\|\,\|h\|\,\|a\|^{2^n})^{1/2^n}$$

$$= \langle h,\varphi\rangle^{1-\frac{1}{2^n}}\|a\|(\|h\|\|\varphi\|)^{1/2^n} \longrightarrow \|a\|\langle h,\varphi\rangle\ (n\longrightarrow\infty$$

従って　$|\langle ha,\varphi\rangle| \leqq \|a\|\langle h,\varphi\rangle,\ h \geqq 0.$

補題 2　$\varphi\in M_*^+,\ b\in M \Rightarrow |b\varphi| \leqq \|b\|\varphi.$

証明.　$b\varphi = v|b\varphi|$ と polar decompose すると，$|b\varphi| = v^*b\varphi$.　$|b\varphi|$ は self-adjoint だから補題 1 を適用して $h\in M_+$ に対し，

$$\langle h,|b\varphi|\rangle = \langle h, v^*b\varphi\rangle \leqq \|v^*b\|\langle h,\varphi\rangle = \|b\|\langle h,\varphi$$

定理 1 2 (Radon – Nikodym)

$\varphi,\psi\in M_*,\ 0\leq\psi\leq\varphi \Rightarrow \exists a_0\in M;\ \psi = a_0\varphi a_0\ \ 0\leq a_0\leq 1.$

証明.　$s(\psi)\leq s(\varphi)$ により $s(\varphi)Ms(\varphi)$ 上だけで考えれば，φ は faithful と仮定して一般性を失わない．M の φ による cyclic representation を考えることにより，M は Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上に作用していて，

$$\exists \xi_0 \in \mathfrak{h} : [M\xi_0] = [M'\xi_0] = \mathfrak{h}$$

$$\langle x, \varphi \rangle = (x\xi_0 | \xi_0) \qquad x \in M$$

と仮定出来る。 $0 \in \psi \leq \varphi$ なので

$\exists h_0' \in M'$; $0 \leq h_0' \leq 1$. $\langle x, \psi \rangle = (x h_0' \xi_0 | h_0' \xi_0)$ $x \in M$.

$M_*' \ni \omega_0$ を $\langle x', \omega_0' \rangle = (x'\xi_0 | \xi_0)$ $x' \in M'$

により定義すれば $\omega_0' \geq 0$, 補題2により

$$|h_0' \omega_0'| \leqq \|h_0'\| \omega_0' \leq \omega_0'$$ により

$$\exists a_0 \in M_+ \cap S ; \quad \langle x', |h_0' \omega_0'| \rangle = (x' a_0 \xi_0 | \xi_0)$$

$h_0' \omega_0'$ の polar decomposition を

$$h_0' \omega_0' = v' |h_0' \omega_0'|$$

とおけば, $x' \in M'$ に対し

$$\langle x', |h_0' \omega_0'| \rangle = \langle x', v'^* h_0' \omega_0' \rangle = \langle x' v'^* h_0', \omega_0' \rangle$$

$$= (x' v'^* h_0' \xi_0 | \xi_0)$$

$$= (x' a_0 \xi_0 | \xi_0)$$

ξ_0 は M' に対する generating vector だから

$$v'^* h_0' \xi_0 = a_0 \xi_0 , \qquad v' a_0 \xi_0 = v' v'^* h_0' \xi_0$$

一方, $x' \in M'$ に対して

$$(x' v' v'^* h_0' \xi_0 | \xi_0) = \langle x' v', |h_0' \omega_0'| \rangle = \langle x', v' |h_0' \omega_0'| \rangle$$

$$= \langle x', h_0' \omega_0' \rangle = (x' h_0' \xi_0 | \xi_0)$$

により

$$v'v'^* h_0' \xi_0 = h_0' \xi_0$$

故に，　$v' a_0 \xi_0 = h_0' \xi_0$

従って，　$x \in M$ に対して

$$\begin{aligned}\langle x, \psi \rangle &= (x h_0' \xi_0 | h_0' \xi_0) = (x h_0' \xi_0 | v' a_0 \xi_0) \\ &= (v'^* x h_0' \xi_0 | a_0 \xi_0) = (x v'^* h_0' \xi_0 | a_0 \xi_0) \\ &= (x a_0 \xi_0 | a_0 \xi_0) = (a_0 x a_0 \xi_0 | \xi_0) \\ &= \langle a_0 x a_0, \varphi \rangle = \langle x, a_0 \varphi a_0 \rangle\end{aligned}$$

以上．

上の定理の逆，即ち　$\varphi \in M_*^+$，$a \in M_+ \cap S$，
でも　$a \varphi a \leqq \varphi$　とは限らない．それで次のことが問題になる．

問題．　$\varphi, \psi \in M_*^+$，$\exists\, a \in S$：

$$\psi = a \varphi a^* \quad 又は \quad 0 \leqq a \leqq 1,\ \psi = a \varphi a$$

となるための条件は何か？

問題．　定理１２を使って von Neumann algebra の spatial theory を再構成出来ないか？特に，cyclic projection　　　　のequivalencyの議論がもっと透明にならないか？

文献：[7], [20], [26].

§9. von Neumann Algebra の Separable Representation の連続性

von Neumann algebra 間の同型対応の連続性は前にも述べた通り完全な形で保証されるが，これを homomorphism 又は into isomorphism となって来ると問題は全く別で，von Neumann algebra の表現の連続性は，その表現の値域と kernel の両方の情報がなければ保証されないことになる．しかし，表現を separable Hilbert space 上のものに限るならば algebra が構造的に表現論を必要としない程度に簡単な場合を除いて，連続性が保証されることを次に見よう．

定理 13. σ-finite*) von Neumann algebra M が finite type I の直和因子を有しなければ M の表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ は $\mathfrak{H}$ が separable のとき σ-weakly continuous である．

証明．π を定理 9 により，$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ と normal part π_1, singular part π_2 に分解して $\pi_2 = 0$ を示す．$\pi_2 \neq 0$ と仮定して矛盾に導くが，π_2 だけに着目して π 自身が singular として一般性を失わない．$\mathfrak{H}$ の separability により

$$\exists \varphi : \text{faithful normal state of } \mathcal{B}(\mathfrak{H})$$

---

*). orthogonal projections が高々可附番個以上存在しないこと.

${}^t\pi(\varphi) = \omega$ とすれば，ω は M の singular state である．定理5により

$$\exists \{e_n\} \subset M_p : \text{orthogonal} \quad \sum e_n = 1, \quad \langle e_n, \omega\rangle = 0.$$

$$\langle \pi(e_n), \varphi\rangle = \langle e_n, {}^t\pi(\varphi)\rangle = \langle e_n, \omega\rangle = 0$$

φ は faithful だから $\pi(e_n) = 0$.

こゝで M を直和分解して，properly infinite のときと finite のときに場合を分けて証明する。

I. M が properly infinite の場合

$$\exists \{p_n\} \subset M_p : \text{orthogonal}, \ \exists v_n \in M_{p.I} ;$$

$$v_n^* v_n = p_n \qquad v_n v_n^* = I.$$

$\displaystyle g_n = v_n^* \left(\sum_{k=1}^{n} e_k\right) v_n$ とおけば $\{g_n\}$ は orthogonal で自然数の列 $n_1 < n_2 < \cdots$ に対し $\displaystyle g_{n_{i+1}} \gtrsim \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} e_k$ により

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_{n_i} \gtrsim \sum_{i=1}^{\infty} e_i = I$$

従って，$\displaystyle \pi\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_{n_i}\right) \neq 0$. 各 g_n は $\pi(e_k) = 0$ により $\pi(g_n) = 0$ だから

$$\pi\left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right) = 0$$

次に $\{r_n\}$ を有理数全体の enumeration とし，各実数 s に自然数列 $\{n_i\}$ を $\displaystyle s = \lim_{i\to\infty} r_{n_i}$ により対応させる．

$s \neq s'$ ならば対応する $\{n_i\}$ と $\{n'_i\}$ は $\{n_i\} \cap \{n'_i\}$ が有限個になる．今 s に対し $e_s = \sum_{i=1}^{\infty} e_{n_i}$ とおけば

$$\pi(e_s) = \pi\left(\sum_{i=1}^{\infty} e_{n_i} \right) \neq 0.$$

$$\pi(e_s)\pi(e_{s'}) = \pi(e_s \cdot e_{s'})$$

$$= \pi\left(\sum_{k \in \{n_i\} \cap \{n'_i\}} e_k \right) = 0 \quad s \neq s'.$$

により，$\{\pi(e_s)\}$ は $\mathfrak{H}$ の non-zero orthogonal projections になる．従って $\mathfrak{H}$ は separable ではあり得ない．

II. M が finite の場合

この場合の証明は少し長くなりすぎるので原論文［33］を参照していただきたい．たゞ **M** が factor ならば極めて簡単に証明出来る。

M を finite factor とすると **M** は simple だから，**M** の表現は trivial か又は faithful でなければならない。ところで singular separable representation は前にも見た通り faithful にはなり得ないから zero representation である。即ち finite factor の separable representation は normal である。　　以上。

これで von Neumann algebra の separable な表現は，

algebra がある意味で複雑なときは normal になることになったが，これを逆に眺めれば次の問題になる．

問題． Singular representation が non-separable であるのはどんな時か？

勿論これまでの議論によって問題になるのは finite type I の場合である．

文献：[9], [31], [32], [33].

§ ∞. 発散した話し。

可換な von Neumann algebra では，その predual は或る measure space 上の L^1-space として把握されるから角谷により "Concrete representation of abstract (L)-space, Ann. Math., 42(1941), 523-537" で (AL)-space として Banach lattice の性質で特徴づけられている これの非可換な場合への拡張は出来ないであろうか．即ち，

問題 1. Banach space F の conjugate space F* が適当な仕方で C*-algebra になるための条件は何か？

またこれと関係して，上は space-free な predual の特徴づけであるが，spatial なものとしては次の事が問題である。

問題 2. Hilbert space $\mathfrak{h}$ 上の nuclear operators 全体の Banach space $\mathcal{T}(\mathfrak{h})$ の closed subspace V の $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ における polar が von Neumann algebra になるのは V がどんな時か？

上の二つの問題はそれ自体として十分興味あることであるが，あまり人為的な特徴づけでも困るので，上の問題が von Neumann algebra の理論の中でどんな位置にあるかを説明しておく．

von Neumann algebra の理論は随分目ざましい発展をとげているが，今日その中で最も不十分な点といえば一つは factor

の理論であり，もう一つは Reduction theory であるといってもいゝすぎではないであろう。この Reduction theory と上の問題が関係するのである．

von Neumann algebra M を measure space (Ω, μ) 上に $M = \int^{\oplus} M(\omega) d\mu(\omega)$ と factor 分解されたというのはどんな意味に於てであろうか。

$$x = \int^{\oplus} x(\omega)\, d\mu(\omega), \qquad y = \int^{\oplus} y(\omega)\, d\mu(\omega)$$

と $x, y \in M$ を分解した時，

$$x \pm y = \int^{\oplus} \{x(\omega) \pm y(\omega)\} d\mu(\omega)$$

$$x^* y = \int^{\oplus} x(\omega)^* y(\omega)\, d\mu(\omega)$$

と書けるが，各 $M(\omega)$ は M の何かということになればたちまち reduction theory の弱点が暴露される。即ち各 $x \in M$ に対し，$x(\omega)$ は measure zero の集合上では決まらないし，

$$x \in M \longrightarrow x(\omega) \in M(\omega)$$

が homomorphism になる様な selection $\{x(\omega)\}$ は定理13を考慮に入れゝば存在しない。実際，M も $M(\omega)$ も separable Hilbert space 上に表現されてるのだから，$x \in M \longmapsto x(\omega) \in M(\omega)$ が homomorphism ならば ω は measure space (Ω, μ) の atom になってしまう．

上の対応が linear でさえあれば良いのであれば，後でふれる様に measurable selection $\{x(\omega)\}$ は存在する．

以上の考察を基礎に次の様に reduction theory を見なおして見る。 $\mathbf{M}$ の factor 分解はその center $\mathcal{Z}$ を diagonal algebra として分解するものだから， $\mathcal{Z}'$ の分解を考えることが基礎になる。$\mathcal{Z}'$ は I 型だから，それを homogeneous part に分解して考えれば，本質的に問題となるのは $\mathcal{Z}'$ が homogeneous type I の場合である．この場合 $\mathcal{Z}'$ は適当に Hilbert space $\mathfrak{K}$ をとれば $\mathcal{Z}' \cong \mathcal{Z} \otimes \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ となる。このテンソル積は勿論 von Neumann algebra としてのテンソル積である． $\mathcal{Z}$ の spectrum space を Ω， faithful normal measure*) を μ とすれば， $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{B}$ の predual $(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{B})_*$ は $\mathcal{Z}_* \hat{\otimes}_\gamma \mathcal{B}_* = L^1(\Omega, \mu) \hat{\otimes}_\gamma \mathcal{B}_* = L^1_{\mathcal{T}}(\Omega, \mu)$ となる。こゝで $L^1_{\mathcal{T}}(\Omega, \mu)$ は Ω 上の $\mathcal{T}$ - valued Bochner integrable functions 全体のなす Banach space である。こゝで $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{B} = (\mathcal{Z}_* \hat{\otimes}_\gamma \mathcal{B}_*)^* = L^1_{\mathcal{T}}(\Omega, \mu)^*$ 且 Ω が Hyperstonean space であることに注意すれば，

$$\forall x \in \mathcal{Z} \otimes \mathcal{B},\ \exists_1\, x(\cdot) \in C_{\mathcal{B}}(\Omega);$$

$$\langle x, \varphi \rangle = \int_\Omega \langle x(\omega), \varphi(\omega) \rangle \, d\mu(\omega), \quad \varphi \in L^1_{\mathcal{T}}(\Omega, \mu)$$

---

*) 必ずしも $\mathcal{Z}$ 上に faithful normal state はないが本質的に問題となるのはこの場合である。

(*) $\begin{cases} \exists_1\, x(\varphi) \in C(\Omega) \cong L^\infty(\Omega, \mu) : \langle x, f \otimes \varphi \rangle = \int x(\varphi)(\omega) f(\omega)\, d\mu(\omega) \\ \text{各 } \omega \in \Omega \text{ に対して } \varphi \in \mathcal{T} \longmapsto x(\varphi)(\omega) \text{ は } \mathcal{T}^* = \mathcal{B} \text{ に属するから} \end{cases}$

但し，$C_{\mathcal{B}}(\Omega)$ は Ω 上の σ-weakly continuous $\mathcal{B}$-valued functions 全体の Banach space である．

実際，$\varphi \in \mathcal{T}$ を固定して，$f \in Z_* = L^1(\Omega, \mu) \longmapsto \langle x, f \otimes \varphi \rangle$ は Z_* 上の continuous linear functional だから

(*) $\exists_1\, x(\omega) \in \mathcal{B}$; $\langle x(\omega), \varphi \rangle = x(\varphi)(\omega)$, φ を固定すれば，

$\omega \in \Omega \longmapsto \langle x(\omega), \varphi \rangle = x(\varphi)(\omega)$ は Ω 上の連続函数ゆえ

$x(\cdot) \in C_{\mathcal{B}}(\Omega)$ となる．

次に，最初に問題にした $Z \subset M \subset Z \otimes \mathcal{B}$ を考える．

$Z \otimes \mathcal{B}$ を Banach space $C_{\mathcal{B}}(\Omega)$ と見なして

$M(\omega) = \{x(\omega) ;\ x \in M\}$ としては，$M(\omega)$ は algebra になるかどうか判らない。そして前に指摘したように $x \longrightarrow x(\omega)$ は linear ではあるが，積を保存しないから，M を直接分解するのをやめて，M_* を分解することを考えて見る．$M_* = (Z_* \hat{\otimes}_\gamma \mathcal{T})/M^\circ$ だから，$V = M^\circ$ とおいて V を考えると，

$$V = [V \cap C_{\mathcal{T}}(\Omega)]$$

となる事が，Lusin の定理を考慮に入れて容易に示される．こゝで $C_{\mathcal{T}}(\Omega)$ は $\mathcal{T}$ の norm の意味で $\mathcal{T}$-valued continuous functions 全体の Banach space である．それで

$$\mathcal{V}(\omega)=\{\varphi(\omega)\mid\varphi\in\mathcal{V}\cap C_{\mathfrak{J}}(\Omega)\}^{-}\subset\mathfrak{J}$$

とおいて，$\mathcal{V}(\omega)^{\circ}=\mathcal{M}(\omega)$ とおけばどうなるであろうか，問題が separable Hilbert space 上で考えてる場合は $\mathcal{M}(\omega)$ は factor で通常の意味でも $\mathcal{M}=\int^{\oplus}\mathcal{M}(\omega)d\mu(\omega)$ となる事が示される。たゞこれを証明するために，$\mathcal{V}(\omega)$ が factor の polar であるということを示すわけだが，その方法としていわゆる measurable selection の方法を使うために non-separable へ移行出来ない，しかし，predual の議論は weak topology ではなく，norm による位相の議論になっているため，議論がしやすくなっている。問題 1, 2 の解答が与えられた時には，このアプローチが意味を持って来ることが考えられる。

これまで von Neumann algebra についてはもっぱら space-free なことばかり問題にして来たが，spatial な問題を考えた場合共範空間の話しとしては次のことが問題となる。

von Neumann algebra の表現としては cyclic な場合が本質的で，大体の spatial な問題はこゝに帰着される。

$\varphi\in\mathcal{M}_*^+$ により誘導される cyclic representation を

$(\pi_\varphi, \mathfrak{H}_\varphi)$ とし，cyclic vector を ξ_φ とする．

$a' \in \pi_\varphi(M)'$ に対して

$$\langle x, \varphi_{a'} \rangle = (x a' \xi_\varphi \mid \xi_\varphi) \qquad x \in M$$

とおけば，$a' \in \pi_\varphi(M)' \longrightarrow \varphi_{a'} \in M_*$ は linear injection になる。

問題 3. 上の injection による image

$\{\varphi_{a'} \ ; \ a' \in \pi_\varphi(M)'\} = V_\varphi$ は φ と M, M_* により記述出来ないか？

$V_{\varphi_1} = V_{\varphi_2}$ ならば $(\pi_{\varphi_1}, \mathfrak{H}_{\varphi_1}) \simeq (\pi_{\varphi_2}, \mathfrak{H}_{\varphi_2})$ である。

あまり発散しても困るので，この辺で零に発散することにする。

REFERENCES

1. C. Akemann; The dual space of an operator algebra, to appear.

2. F. F. Bonall; A minimal property of the norm in some Banach algebras, J. London Math. Soc., 29(1954), 156 - 164.

3. J. Dixmier; Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, (1957).

4. J. Dixmier; Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, (1964).

5. J. Dixmier; Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, Ann. Math., 54(1950), 384 - 408.

6. J. Dixmier; Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, Bull. Soc. Math. Fr., 81(1953), 9 - 39.

7. H. A. Dye; The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators, Trans. Amer. Math. Soc., 72(1952), 243 - 280.

8. E. G. Effros; Order ideals in a C*-algebra and its dual, Duke Math. J., 30(1963), 391 - 412.

9. J. M. G. Fell and J. Feldman; Separable representations of rings of operators, Ann. Math., 65(1957), 241 - 249.

10. J. M. G. Fell; The dual spaces of C*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 94(1960), 365 - 403.

11. J. Glimm; Type I C*-algebras, Ann. Math., 73(1961), 572 - 612.

12. A. Grothendieck; Un résultat sur le dual d'une C*-algèbre, J. Math. pures et appl., 36(1957), 97 - 108.

13. R. V. Kadison; Isometries of operator algebras, Ann. Math., 54 (1951), 325 - 338.

14. R. V. Kadison; Irreducible operator algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 43(1957), 273 - 276.

15. I. Kaplansky; A theorem on rings of operators, Pacific J. Math., 1(1951), 227 - 232.

16. J. von Neumann; Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren, Math. Ann., 102(1929), 370 - 427.

17. J. von Neumann; On a certain topology for rings of operators, Ann. Math., 37 (1936), 111 - 115.

18. J. von Neumann; On rings of operators. Reduction theory, Ann. Math., 50(1949), 401 - 485.

19. R. T. Prosser; On the ideal structure of operator algebras, Mem. Amer. Math. Soc. no. 45 (1963).

20. S. Sakai; The theory of W*-algebras, Lecture note, Yale Univ., (1962).

21. S. Sakai; A characterization of W*-algebra, Pacific J. Math., 6 (1956), 763 - 773.

22. S. Sakai; Absolute valure of W*-algebras of finite type, Tôhoku Math. J., 8 (1956), 70 - 85.

23. S. Sakai; On the σ-weak topology of W*-algebras, Proc. Japan Acad. 32 (1956), 329 - 332.

24. S. Sakai; On topological properties of W*-algebras, Proc. Japan Acad., 33 (1957), 439 - 444.

25. S. Sakai; On linear functionals of W*-algebras, Proc. Japan Acad., 34 (1958), 571 - 574.

26. S. Sakai; A Radon-Nikodym theorem in W*-algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 71 (1965), 149 - 151.

27. S. Sakai; On topologies of finite W*-algebras, Illinois J. Math., 9 (1965), 236 - 241.

28. R. Schatten; A theory of cross-space, Ann. Math. Studies, no 26, Princeton Univ. Press, Princeton (1950).

29. S. Sherman; The second conjugate of a C*-algebra, Proc. Intern. Congr. Math. Cambridge, 1 (1950), 470.

30. Z. Takeda; Conjugate spaces of operator algebras, Proc. Japan Acad., 30 (1954), 90 - 95.

31. M. Takesaki; On the conjugate space of an operator algebra, Tôhoku Math. J., 10 (1958), 194 - 203.

32. M. Takesaki; On the singularity of a positive linear functional on operator algebra, Proc. Japan Acad., 35 (1959), 365 - 366.

33. M. Takesaki; On the non-separability of singular representations of operator algebras, Kōdai Math. Sem. Rep., 12 (1960), 102 - 108.

34. M. Tomita; On rings of operators in non-separable Hilbert spaces, Mem. Faculty of Sci. Kyūsyū Univ., 7 (1953), 129 - 168.

35. M. Tomita; Spectral theory of operator algebras. I, Math. J. Okayama Univ., 9 (1959), 63 - 98.

36. J. Tomiyama; On the projection of norm one in W*-algebras, Proc. Japan Acad., 33 (1957), 608 - 612.

37. H. Umegaki; Weak compactness in an operator space, Kōdai Math. Sem. Rep., 8 (1956), 145 - 151.

38. F. B. Wright; A reduction for algebras of finite type, Ann. Math., 60 (1954), 560 - 570.