

阪大理 渡辺 教

区間 $[0, 1]$ の部分集合の Hausdorff 次元が、その上のある shift のエントロピーを含む形であらわされることが少なくない。この事情を [1], pp. 136-145 にわたって説明する。関連文献として [2] — [5] をあげておく。

- [1] P. Billingsley, *Ergodic theory and information*, Wiley, 1965.
- [2] —————, Hausdorff dimension in probability theory I, *Illinois J. Math.*, 4 (1960), 187-209, *ibid.*, 5 (1961), 291-298.
- [3] —————, On the coding theorem for the noiseless channel, *Ann. Math. Stat.*, 32 (1961), 594-601.
- [4] J. R. Kinney and T. S. Pitcher, Dimensional properties of a random function on the square, *Ann. Math. Stat.*, 37 (1966), 849-854
- [5] A. Rényi, *Dimension, entropy and information*,

Transactions of the Second Conference on Information Theory, etc. (Prague), 545-556.

1. 距離空間の Hausdorff 測度

E を距離空間, M をその部分集合とする. $\alpha > 0$ と $\rho > 0$ を取り, $l_\alpha(M, \rho)$ を次のように定義する;

$$l_\alpha(M, \rho) = \inf \left\{ \sum_i (\text{diam } S_i)^\alpha \mid \begin{array}{l} S_i \text{ 肉球, } \cup S_i \supset M, \\ \text{diam } S_i < \rho \end{array} \right\},$$

ただし $\text{diam } S_i$ は肉球 S_i の直径を表す. $l_\alpha(M, \rho)$ は E 上の外測度で, ρ については単調減少である. したがって

$$l_\alpha(M) = \lim_{\rho \rightarrow 0} l_\alpha(M, \rho)$$

も外測度を定める. これを α 次 Hausdorff 測度 といい. Borel 集合 M は l_α -可測であることが示される. 以下 l_α の性質を列挙する.

1) $\alpha < \alpha'$ ならば, $l_\alpha(M) \geq l_{\alpha'}(M)$.

2) $\sup \{ \alpha \mid l_\alpha(M) = \infty \} = \inf \{ \alpha \mid l_\alpha(M) = 0 \}$.

この共通の値を $\dim M$ と書いて, M の Hausdorff 次元 といい.

不等号 \leq は 1) により明らかである. 逆向きの " \geq " を証明する. 2) の左辺を α_0 とおく. 任意に $\varepsilon > 0$ を取ると, $l_{\alpha_0 + \varepsilon}(M) < \infty$. $\rho > 0$ にたいして, $\text{diam } S_i < \rho$ をみたす M の被覆で

$$\sum (\text{diam } S_i)^{\alpha_0 + \varepsilon} \leq l_{\alpha_0 + \varepsilon}(M, \rho) + 1 \leq l_{\alpha_0 + \varepsilon}(M) + 1 = K < \infty$$

とすることもできる。

$$l_{\alpha_0 + 2\varepsilon}(M, \rho) \leq \sum (\text{diam } S_i)^{\alpha_0 + 2\varepsilon} \leq \rho^\varepsilon \cdot K.$$

$\rho \rightarrow 0$ として $l_{\alpha_0 + 2\varepsilon}(M) = 0$. したがって

$$\alpha_0 + 2\varepsilon \geq \inf \{ \alpha \mid l_\alpha(M) = 0 \}.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ として 2) が証明される。

これからたちまち 3) — 6) がえられる。

- 3) $l_\alpha(M) > 0$ ならば, $\dim M \geq \alpha$,
- 4) $\dim M > \alpha$ ならば, $l_\alpha(M) = \infty$,
- 5) $l_\alpha(M) < \infty$ ならば, $\dim M \leq \alpha$,
- 6) $0 < l_\alpha(M) < \infty$ ならば, $\dim M = \alpha$.
- 7) $M \subset M'$ ならば, $\dim M \leq \dim M'$

も明らかであるが, これより詳しく

$$8) \dim(\cup M_n) = \sup \dim M_n.$$

\geq は 7) より明らかである。“ \leq ”を示すために右辺を α_0 とおき, 任意に $\varepsilon > 0$ を取る。 $l_{\alpha_0 + \varepsilon}(M_n) = 0$. 外測度だから, $l_{\alpha_0 + \varepsilon}(\cup M_n) = 0$. したがって $\dim(\cup M_n) \leq \alpha_0 + \varepsilon$. $\varepsilon \rightarrow 0$ として 8) が証明される。

9) M が 1 葉集合ならば高々可算集合から, $\dim M = 0$.

$E = [0, 1]$ のときは, l_1 は その上での Lebesgue 測度 にほかならない. 次の性質は明らかである.

10) $l_1(M) \leq l_1(E) = 1$ だから, $\dim M \leq \dim E = 1$.

11) $l_1(M) > 0$ ならば, $\dim M = 1$.

通常の Cantor 集合の Hausdorff 次元が $\log 2 / \log 3$ であることはよく知られている. その確率論的証明と, 他の例を §4 で与える.

2. 定理

以下区間 $[0, 1]$ を Ω であらわす. \mathcal{F} をその上の Borel 集合全体の作る σ -代数とする. n を自然数とし, $[j/n, (j+1)/n)$ の形の区間を n 次の n 進筒集合 と呼ぶ. Ω の莫 ω の n 進展開

$\omega = .\omega_1\omega_2\dots$ を考え, ω_k を $x_k(\omega)$ とおく. ω を含む n 次の n 進筒集合を $U_n(\omega)$ であらわす. これは

$$U_n(\omega) = \{ \omega' \mid x_k(\omega') = x_k(\omega), k=1, 2, \dots, n \}$$

$$= [.\omega_1\omega_2\dots\omega_n, .\omega_1\omega_2\dots(\omega_n+1))$$

ともあらわされた (ω_n+1 は $\text{mod } n$ で考える).

μ を (Ω, \mathcal{F}) 上の連続な確率測度とし, §1 と類似に

$$\mu_\alpha(M, \mathcal{P}) = \inf \sum_i \mu(v_i)^\alpha,$$

$$\left(\begin{array}{l} v_i \text{ } n \text{ 進筒集合} \\ \cup v_i \supseteq M \\ \mu(v_i) < \mathcal{P} \end{array} \right)$$

$$\mu_\alpha(M) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \mu_\alpha(M, \rho)$$

を定義する。この $\mu_\alpha(M)$ について §1 の (1) - (11) の成立が容易に証明できる。

$$\dim_\mu M = \sup \{ \alpha \mid \mu_\alpha(M) = \infty \} = \inf \{ \alpha \mid \mu_\alpha(M) = 0 \}$$

よって μ に関する M の Hausdorff 次元を定義する。

特に Lebesgue 測度を λ とおくと、上のように記述される Hausdorff 測度 λ_α と、§1 で定義した h_α の関係は

$$(2) \quad h_\alpha(M, \rho) \leq \lambda_\alpha(M, \rho) \leq 2R h_\alpha(M, \rho), \text{ したがって}$$

$$(3) \quad \dim M = \dim_\lambda M$$

となる。(2) の最初の不等号は h_α , λ_α の定義により、後の不等式は、任意の区間 I がその長さを ϵ だけ高々 $2R$ 個の区間集合で覆われることから示される。

μ と ν を (Ω, \mathcal{F}) 上の 2 つの連続な確率測度とする。 $0 < \zeta < 1$ に対し次のように約束する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log \zeta / \log 0 = \log 1 / \log \zeta = \log 1 / \log 0 = 0 \\ \log 0 / \log \zeta = \log \zeta / \log 1 = \log 0 / \log 1 = \infty \\ \log 0 / \log 0 = \log 1 / \log 1 = 1 \end{array} \right.$$

定理 1. $0 \leq \delta \leq \infty$ とする. M が

$$M_\delta = \left\{ \omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(u_n(\omega))}{\log \mu(u_n(\omega))} = \delta \right\}$$

の部分集合ならば,

$$\dim_\mu M = \delta \cdot \dim_\nu M$$

が成り立つ.

これは次の定理から容易に導かれる.

定理 2. $0 \leq \delta \leq \infty$ とする. M が

$$M'_\delta = \left\{ \omega \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(u_n(\omega))}{\log \mu(u_n(\omega))} \geq \delta \right\}$$

の部分集合ならば,

$$\dim_\mu M \geq \delta \cdot \dim_\nu M.$$

定理 2 が定理 1 を含むことを示そう. $M \subset M_\delta$ とする. $M_\delta \subseteq$

M'_δ だから, $\dim_\mu M \geq \delta \cdot \dim_\nu M$. 次に

$$M''_\delta = \left\{ \omega \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(u_n(\omega))}{\log \nu(u_n(\omega))} \geq \frac{1}{\delta} \right\}$$

とすれば, $M_\delta \subseteq M''_\delta$ でもある. μ, ν を取りかえ, δ を $1/\delta$

におまかると定理 2 を使くと

$$\dim_\nu M \geq \frac{1}{\delta} \dim_\mu M.$$

定理又の証明. $\delta = 0$ のときは明らかに成立つから

$\delta > 0$ としよう.

先ず μ が次の条件(A)をみたす場合を証明する:

(A) M と交わる任意の n 進筒集合 v について, $\mu(v) > 0$.

任意に $\varepsilon > 0$ を取り, $\xi = \dim_{\mu} M + \varepsilon$, $\eta = \frac{1}{\delta} + \varepsilon$ とおく. $\xi \eta \geq \dim_{\nu} M$ を示せばよい. $\frac{1}{\eta} < \delta$ であるから, $\omega \in M$ ならばある番号 $N(\omega)$ より大きいすべての n について

$$\frac{\log \nu(u_n(\omega))}{\log \mu(u_n(\omega))} \geq \frac{1}{\eta}$$

である. \log の中が 1 をとるとなるから, これを変形して

$$[\nu(u_n(\omega))]^{\eta} \leq \mu(u_n(\omega))$$

をうる. $0 < 1$ の間 ρ をとる.

$$M_{\rho} = \left\{ \omega \in M \mid \mu(u_n(\omega)) \geq \rho \wedge \nu(u_n(\omega))^{\eta}, n=1, 2, \dots \right\}$$

とみると, $\rho \downarrow 0$ のとき M_{ρ} は M に増加する. 実際, $\omega \in M$ ならば, $\rho = \mu(u_{N(\omega)}(\omega))$ とおけば条件(A)により $\rho > 0$ であり, さらに $\mu(u_n(\omega))$ は n と共に減少

するから, $\mu(u_n(\omega)) < \rho$ かつ $n \geq N(\omega)$. したがって $\mu(u_n(\omega)) \geq \nu(u_n(\omega))$. すなわち ω は今えらんだ ρ について M_ρ に属する.

§1, 8) により $\dim_\mu M_\rho \leq \xi$ を示せばよい. $0 < \rho_1 < \rho$ と $\varepsilon_1 > 0$ を任意に取る. $\xi > \dim_\mu M_\rho$ だから, ρ 進筒集合による M_ρ の被覆 $\{v_i\}$ で $\mu(v_i) < \rho_1$ をみたすものを適当にえらぶと

$$\sum_i \mu(v_i)^\xi < \varepsilon_1,$$

とできる. すべての v_i について $v_i \cap M_\rho \neq \emptyset$ を仮定してもよい. したがって各 v_i は M_ρ のある ω について $v_i = u_n(\omega)$ となっている.

$\mu(v_i) \leq \rho_1 < \rho$ であるから, M_ρ の定義により

$$\mu(v_i) = \mu(u_n(\omega)) \geq \nu(u_n(\omega)) = \nu(v_i),$$

したがって
$$\sum_i \nu(v_i)^\xi < \varepsilon_1.$$

$\nu(v_i) \leq \rho_1^{\frac{1}{\xi}}$ であるから

$$\nu_{\xi, \rho_1^{\frac{1}{\xi}}}(M_\rho) < \varepsilon_1.$$

先ず $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, 次に $\rho_1 \rightarrow 0$ として $\nu_{\xi, \rho_1^{\frac{1}{\xi}}}(M_\rho) = 0$ をうる.

次に仮定(A)の特別な場合を証明する. E_μ を $\mu(v) = 0$ をみたすすべての ρ 進筒集合の和集合とする. $\dim_\mu E_\mu = 0$ であることは容易に示される. §1の8)により, 2つの集合 A, B の対称差が E_μ に含まれるならば, $\dim_\mu A = \dim_\mu B$ である.

同じことは μ の代りに ν を考えても成立す。 $\omega \in M \cap E_\mu$ とせよ。
 そのとき十分大きい m にたいして $\mu(U_m(\omega)) = 0$ であるが、 $\delta > 0$ の
 仮定と定理 1 の前の約束により、十分大きい m にたいして $\nu(U_m(\omega))$
 $= 0$, すなわち $\omega \in E_\nu$ である。したがって $M \cap E_\mu \subset M \cap E_\nu$ 。
 最後に $M \setminus E_\mu$ は仮定 (A) を満足する集合だから、これについては定
 理が成立することを注意する。

以上の注意から

$$\begin{aligned} \dim_\mu M &= \dim_\mu (M \setminus E_\mu) \geq \delta \cdot \dim_\nu (M \setminus E_\mu) \\ &\geq \delta \cdot \dim_\nu (M \setminus E_\nu) = \delta \cdot \dim_\nu M. \end{aligned}$$

3. Shift のエントロピーとの関係

前節のように $\omega \in \Omega$ の n 進展開 $\omega = .\omega_1 \omega_2 \dots$ を考え、

$$T\omega = .\omega_2 \omega_3 \dots$$

によって定まる Ω 上の変換を考えよう。さらに T は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$
 ν 上のエルゴード的保測変換 (あるいは shift) になっていると仮
 定する。 μ が Lebesgue 測度 λ ならば、 $\lambda(U_n(\omega)) = 2^{-n}$ である
 から定理 1 の M_δ の条件は

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \nu(U_n(\omega)) = \delta \cdot \log 2$$

となる。

今 $\nu(M) > 0$ としよう。すると §1, 11) により $\dim_{\nu} M = 1$ である。また Shannon-McMillan の定理により, (*) の左辺は ν -測度 1 で T のエントロピーに n といいから, $M \subset M_{\delta}$ が成り立つためには $h(T) = \delta \cdot \log 2$ なる関係が必要である。したがって, 定理 1, $\dim_{\nu} M = 1$ および §2, 13) を合せて, $\nu(M) > 0$, $M \subset M_{h(T)/\log 2}$ なる M の (古典的) Hausdorff 次元は,

$$\dim M = h(T) / \log 2$$

で与えられる。

注意. $\nu(M_{h(T)/\log 2}) = 1$ であるが, 与えられた ν -測度正の集合 M が $M_{h(T)/\log 2}$ に含まれるかどうかは, 別に確かめる必要がある。次節で示すように, 実際には与えられた M について ν を適当に定めて上の結果を適用するのである。一般に $\nu(M) > 0$ なる M については

$$\dim M \geq h(T) / \log 2$$

のみが成り立つ。実際 $M' = M \cap M_{h(T)/\log 2}$ とおけば, $\nu(M') > 0$ を用いて, $\dim M \geq \dim M' = h(T) / \log 2$ となる。

4. $[0, 1]$ の部分集合の Hausdorff 次元の例

$p_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1$ なる n 個の組 $\{p_i\}$ を考える。 $\{p_i\}$ に対応する Bernoulli shift T は ν は次のように定まることによることが示される:

$$\nu\{\omega \mid \omega_1 = i_1, \dots, \omega_n = i_n\} = p_{i_1} \cdots p_{i_n}.$$

以下 (ν, T) は Bernoulli shift とする。

例 1. $r = 3$, $p_0 = p_2 = \frac{1}{2}$, $p_1 = 0$ とする。

通常のカantor 集合 M は

$$M = \{\omega \mid \omega_i = 0 \text{ または } 1, i = 1, 2, \dots\}$$

と表わすことが出来る。明らかに $\nu(M) = 1$ 。また

$\omega \in M$ に対しては

$$u_n(\omega) = \{\omega' \mid \omega'_1 = \omega_1, \dots, \omega'_n = \omega_n\}, \quad (\omega_1, \dots, \omega_n \text{ は } 0 \text{ または } 2),$$

であるから, $\nu(u_n(\omega)) = 2^{-n}$ であるから

$$\text{したがって } -\frac{1}{n} \log \nu(u_n(\omega)) = \log 2. \quad \text{ゆえに } M$$

$$\subset M^{\log 2 / \log 3}. \quad \text{ゆえに}$$

$$\dim M = \log 3 / \log 2.$$

例 2. $r = 2$, $p_1 = p$, $p_0 = 1 - p$ とする。

$$M(p) = \left\{ \omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n \omega_k = p \right\},$$

とおく。エルゴード定理により、 $\nu(M(p)) = 1$.

$N_1(\omega, n)$ を $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ のうち 1 の回数、 $N_0(\omega, n)$ を 0 の回数とする。 $N_1(\omega, n) = \sum_{k=1}^n \omega_k$, $N_0(\omega, n) = n - \sum_{k=1}^n \omega_k$ である。 ν の定義から

$$-\frac{1}{n} \log \nu(u_n(\omega)) = -\frac{1}{n} \{ N_1(\omega, n) \log p + N_0(\omega, n) \log(1-p) \}$$

であるから、 $\omega \in M(p)$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \nu(u_n(\omega)) = -[p \log p + (1-p) \log(1-p)]$$

である。したがって

$$\dim M(p) = -\frac{1}{\log 2} [p \log p + (1-p) \log(1-p)],$$

これは Eggleston が最初別な方法で証明したものである。

例 2 を一般化した次の結果も同じように証明される。

例 3. 任意の r と、 p_0, \dots, p_{r-1} をとる。 ω の r 進展開を $\omega_1, \omega_2, \dots$ として、 $0 \leq i \leq r-1$ に対し $N_i(\omega, n)$ を $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ の中の i の回数とする。

$$M(p_0, \dots, p_{r-1}) = \{ \omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} N_i(\omega, n)/n = p_i, i=0, 1, \dots, r-1 \}$$

とあくと,

$$\dim M(p_0, \dots, p_{r-1}) = -\frac{1}{\log r} \sum_{i=0}^{r-1} p_i \log p_i.$$

注意. (\mathcal{V}, T) が \mathcal{M} と一般な shift たとは Markov shift を与えるように \mathcal{V} を取ることにより, \mathcal{M} と複雑な集合の Hausdorff 次元を求めるときはかまわないか, 方法は Bernoulli shift と全く同様である。