

Geodesic Flows On Homogeneous Spaces

京大 理 吉沢尚明
辰馬伸彦

§1 Geodesic flow と semisimple Lie group

1 Geodesic flow の定義

X を Riemannian metric をもった完備, 可符号, 連結の manifold とし, $x \in X$ における tangent space を $T^{(x)}$, $v(x) \in T^{(x)}$ で $|v(x)| = 1$ なるものの全体を $T_0^{(x)}$ とかく。

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ v \mid v = \begin{pmatrix} x \\ v(x) \end{pmatrix}, v(x) \in T_0^{(x)}, x \in X \right\}$$

と置く。 $v \in \mathcal{B}_0$ には, X の点 x から $v(x)$ の正方向への v を geodesic $l(v)$ に沿って距離 s の点 $y(v, s)$ と, $s=1$ における $l(v)$ の長さ 1 の接ベクトル $\partial y(v, s)$ を考えて $(y(v, s), \partial y(v, s))$ を対応させる:

$$\mathbb{U}_s : B_0 \ni v = \begin{pmatrix} x \\ v(x) \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{U}_s v = \begin{pmatrix} y(v, s) \\ \partial y(v, s) \end{pmatrix} \in B_0$$

\mathbb{U}_s は B_0 から B_0 の上への変換で $\mathcal{U} = \{\mathbb{U}_s; -\infty < s < +\infty\}$ は B_0 上の 1-parameter の transformation group となる。

def: \mathcal{U} を X 上の geodesic flow という。

μ_1 を X 上の metric による measure とする。

$T_0^{(x)} \sim S^{n-1}$ ($n = \dim X$) 故に $T_0^{(x)}$ には S^{n-1} 上の uniform measure μ_2 と同じ measure $\mu_2^{(x)}$ が入る。このとき

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2^{(x)} \sim \mu_1 \times \mu_2$$

は \mathbb{U}_s 不変で \mathcal{U} は measure space (B_0, μ) 上の metrical な flow となる。

2. Semi-simple Lie group の factor space.

G を non-compact, connected な semi-simple Lie group, K を G の maximal compact subgroup とする。 G, K の Lie algebra を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とおく。
 $G/K = \{gK\}$ は Riemannian manifold で, $G/K \ni \tilde{g} = gK$ での tangent space を $T(\tilde{g})$ とすると

$$T(\tilde{g}) \cong \mathfrak{G}/\tilde{K} \cong \tilde{K}^{\perp \text{put}} \cong \mathcal{N} \quad (\text{同型})$$

== ところで \mathcal{N} は \mathfrak{G} の Killing form による \tilde{K} の直交補空間である。

homogeneous space G/K では次がなりたつ

(1). $\tilde{g} = gK \in G/K$ を通る geodesic $l(v)$ は

$$l(v) = \{ \gamma(v, s) = g \exp(s v) \cdot K \mid -\infty < s < \infty \}_{v \in \mathcal{N}}$$

とあらわされ

$$\partial \gamma(v, s) = g \exp(s v) \cdot v$$

(2). G/K 上の Riemannian metric による measure $\tilde{\mu}$ は G の semi-simple かつ $\tilde{\mu}$ は G の両側不変な Haar measure から打ち出されたものである。

Γ を G の discrete subgroup とする。double coset space (Γ の fundamental domain)

$X = \Gamma \backslash G/K \ni x = \{ \Gamma g K \}$ において $T(x) = \{ \Gamma g v \}$ となる筈である。すなわち, $gK \in G/K$, $\gamma \in \Gamma$ とするとき, 対応

$$T(gK) \xleftrightarrow{\gamma} T(\gamma gK)$$

で接ベクトルを同一視する。 $\gamma gK = gK$ のとき $\gamma g v \neq g v$

ならば $\Gamma_g v$ は X の tangent vector と考えられたいので、 Γ の仮定 1) Γ は $T(x)$ の vector の同視を well-define するをおく。更に Γ の仮定 2) $\tilde{\mu}$ から induce した measure μ_1 で X は finite volume をもつ。

をおく。

Example $n-1$ 次元の定曲率負の定曲率空間で finite volume をもつ X は Lobachevsky 空間がその universal covering space である。

$$I^{n-1} = \left\{ x = (x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid [x, x] = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = -c^2, \right. \\ \left. x_n > 0 \right\}$$

(半径 $c > 0$ の pseudo sphere の上半部)

は metric

$$ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_{n-1}^2 - dx_n^2$$

で $n-1$ 次元の負の定曲率空間 - Lobachevsky 空間 -

になる。 $J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$ とし

$$g \in GL(n, \mathbb{R}), \quad : \quad {}^t g J g = J, \quad g_{nn} > 0, \quad \det g = 1$$

の全体は n 次元の proper Lorentz group G をつくる。

$G \ni g$ で x_n を不変にするものの全体

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; u \in SO(n-1) \right\} \sim SO(n-1)$$

は maximal compact subgroup で $\Lambda^{n-1} \sim G/K$ である。
 従ってある Γ ; discrete subgroup があって

$$X \sim \Gamma \backslash G/K$$

となる。

§2 Geodesic flow の群論的取扱ひ。

1. 問題点

geodesic flow $U = \{U_s\}$ が $L^2_\mu(B_0)$ 上に U を与える unitary 表現 $D = \{U_s, L^2_\mu(B_0)\}$ の既約分解で、

- 1). U の trivial な表現が唯一含まれる $\Leftrightarrow U$ ergodic
- 2). $D \oplus \mathbb{1}$ の既約分解の measure を multiplicity m としてみる。 $\Leftrightarrow U$ の spectral type をみる。となる仕方。 flow U の ergodic 性, spectral type を群論的に扱う。

U の orbitwise な B_0 の分解はこまかすきるので、次のようにしてアライ分解を考える。

$$3). \mathcal{B}_0 \ni \begin{pmatrix} x \\ v\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma g_0 k \\ \Gamma g_0 v \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{U}_g} \begin{pmatrix} \Gamma g_0 g k \\ \Gamma g_0 g v \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_0, \quad v \in \mathcal{M}$$

なる \mathcal{B}_0 の変換群 $\{\tilde{U}_g\}$ を考える。(1)より $g = \exp(sv) \in G$

のとき $\tilde{U}_g = L_s$ であるから

• $\{\tilde{U}_g\}$ orbit は geodesic flow $\{U_s\}$ の orbits からなるアライものである。

• $\{\tilde{U}_g\}$ orbit は K が compact なときより, \mathcal{B}_0 で closed 従って \mathcal{B}_0 上の measure μ は各 $\{\tilde{U}_g\}$ orbit θ 上の G -invariant measure μ_θ で

$$\mu = \int_S \mu_\theta d\nu(\theta)$$

$S = \{\text{orbit space}\}$

$$(4) \quad L^2_\mu(\mathcal{B}_0) = \int_S \oplus L^2_{\mu_\theta}(\theta) d\nu(\theta)$$

と分解される。(μ_θ は a.e $d\nu$ で G -invariant)

⊙ K が $T^0(gk)$ で transitive $\iff \mathcal{B}_0$ はある単一の \tilde{U}_g -orbit と一致。

(Labachevsky のときは $K \cong SO(n-1)$ より transitive.)

(4)より $L^2_{\mu_\theta}(\theta)$ で ergodicity, spectrum を考えればよい。

orbit θ を固定し, G は θ に作用していると考える。

$$\tilde{\Pi}_g : \begin{matrix} \sigma \\ \downarrow \\ v_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{g_0} K \\ \Gamma_{g_0} v \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{\Pi}_g v_0 = \begin{pmatrix} \Gamma_{g_0} g K \\ \Gamma_{g_0} g v \end{pmatrix}, \quad v \in \mathcal{N}$$

$$\therefore \tilde{\Pi}_g v_0 = v_0 \iff [g \in K, gv = v]$$

$$\therefore K_0 = \{k \in K; kv = v\};$$

よおくと

$$\tilde{\Pi}_g v_0 = v_0 \iff g \in K_0$$

\therefore

$$\sigma \sim \Gamma \backslash G / K_0$$

よって μ' を G の Haar measure からきまる measure とすれば

$$L^2_{\mu}(\sigma) \sim L^2_{\mu'}(\Gamma \backslash G / K_0)$$

一方 $g = \exp(sv)$ ならば $\tilde{\Pi}_g = \cup_s$. よって \mathcal{U} は double coset space である

$$\cup_s : \begin{pmatrix} \Gamma g_0 K_0 \\ \Gamma g_0 v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma g_0 \exp(sv) K_0 \\ \Gamma g_0 \exp(sv) v \end{pmatrix}$$

だから

$$H = \{\exp(sv); -\infty < s < +\infty\}$$

は ρ を $\rho|_K$ に制限した変換群となる。

以上によって H が $L^2_{\mu}(\Gamma \backslash G / K_0)$ 上にひきおこす表現の既約分解を求めることを考えればよい。そのために次のことに注意する

• $K \supset K_0$ は V の stability group で compact だから

$$(5) \quad L^2(\Gamma \backslash G / K_0) \subset L^2(\Gamma \backslash G)$$

とみてよい

$$\therefore f \in L^2(\Gamma \backslash G / K_0) \iff f(m) = f(m k_0), \quad \forall m \in \Gamma \backslash G, \\ \forall k_0 \in K_0$$

• $\mathcal{H} = L^2(\Gamma \backslash G)$, $\mathcal{H}_0 = L^2(\Gamma \backslash G / K_0)$ とおく。

\mathcal{H} 上への G の operation = \mathcal{H} 上への G -right translation

R_g , G の表現 $D = \{R_g, \mathcal{H}\}$:

$$\mathcal{H} \ni f(m) \longrightarrow R_g f(m) = f(mg),$$

を考えると (5) より

• \mathcal{H}_0 上への H の operation = R_g ($g \in H$) の \mathcal{H}_0 の制限となるから

よって

問題: 表現 $D = \{R_g, \mathcal{H}\}$ で $g \in H$, $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$ とした

もの, すなわち H の \mathcal{H}_0 上での表現

$$D(H, \mathcal{B}_0) \equiv D|_H|_{\mathcal{B}_0} = \{R_h, \mathcal{B}_0: (h \in H)\} |_{\mathcal{B}_0}$$

の既約分解を求める。

について考えればよい。このとき § 2.1 の 1), 2) に対応して

1) \mathcal{O} で ergodic $\Leftrightarrow D(H, \mathcal{B}_0)$ が唯一つの trivial $\mathbb{1}_H$ な表現をもつ

2) \mathcal{O} での spectrum $\Leftrightarrow D(H, \mathcal{B}_0)$ の既約分解の spectrum なる対応を通してしるべることになる。

2. Example

§ 1. の Example の場合には

$G = \text{proper Lorentz group of dim } n = \text{Lor}(n)$

$$K = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} u & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) : u \in SO(n-1) \right\} \sim SO(n-1),$$

\mathcal{B}_0 は 1 つの $\tilde{\Pi}_g$ -orbit と一致, $v = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & 0 \ 1 \\ & 1 \ 0 \end{array} \right)$ としよ。

$$K_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \gamma & 0 \\ \hline 0 & 1 \ 0 \\ & 0 \ 1 \end{array} \right) ; \gamma \in SO(n-1) \right\}$$

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \text{chs shs} \\ & \text{shs chs} \end{array} \right) : -\infty < s < +\infty \right\}$$

3. 注意 S.S. Lie algebra \mathcal{G} の simple component \sim の分解。

$$\mathcal{O}_j = \sum_i \oplus \mathcal{O}_{j_i}$$

↓

$$v = \sum_i v_i$$

において $\exists v_i = 0$ ならば v からきまる \mathcal{B}_0 中の G -orbit は lower dimension となるから $\forall_j: v_j \neq 0$ としよ。

§. 3. Gelfand - Fomin, Mautner, Hirai の方法.

1. §. 2. の reduction より §. 2. 1 の問題 1), 2) は

問題: G の表現 $D = \{R_g, \mathcal{H} = L^2(\Gamma \backslash G)\}$ の制限

$D(H, \mathcal{H}_0) = D|_H|_{\mathcal{H}_0}$ の H -既約分解を求めよ。

$$(\mathcal{H}_0 = L^2(\Gamma \backslash G / K_0))$$

の如く, 表現論の問題に帰着する。

① 目的の分解を

$$D(H, \mathcal{H}_0) \sim \int_{\Sigma} x_{\sigma} d\nu(\sigma), \quad x_{\sigma} = H \text{ の一次元の表現} \quad (1)$$

② D の既約分解を

$$D \sim \int_{\Omega} w_{\rho} d\tau(\rho) \quad (2)$$

とする。

$\mathcal{H}_\rho(P)$: \mathcal{W}_ρ の表現空間,

$$\Omega_0 = \{ \mathcal{W}_\rho \in \Omega \mid K_0 - \text{invariant vector set} \}$$

$\mathcal{H}_\rho(P) =$ 表現 $\mathcal{W}_\rho (\in \Omega_0)$ 中の $K_0 - \text{invariant}$ vector a set

i. e.,
$$= \{ v \in \mathcal{H}_\rho(P) ; \mathcal{W}_\rho \in \Omega_0, \forall K_0 v = v \quad \forall K_0 \in K_0 \}$$

とすると

$$\mathcal{H}_\rho \sim \int_{\Omega} \mathcal{H}_\rho(P) d\tau(P), \quad \mathcal{H}_0 \sim \int_{\Omega_0} \mathcal{H}_0(P) d\tau(P).$$

③
$$D|_{(H, \mathcal{H}_0)} \sim D_0|_{(H, \mathcal{H}_0)} \sim \int_{\Omega_0} \mathcal{W}_\rho|_{(H, \mathcal{H}_0^{(\rho)})} d\tau(\rho) \quad *)$$

$$\therefore \mathcal{W}_\rho|_{(H, \mathcal{H}_0^{(\rho)})} \sim \int_{\Sigma'_\rho} x_\sigma d\gamma'_\rho(\sigma)$$

とすると

$$*) \sim \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{\Sigma'_\rho} x_\sigma d\gamma'_\rho(\sigma) \right\} d\tau(\rho) \quad (3)$$

$\therefore (1) \text{より}$

$$\begin{cases} \Sigma \sim \Omega_0 \times (\Sigma'_\rho) \\ \gamma \sim \tau \times (\gamma'_\rho) \end{cases}$$

2 ergodicity $\forall w_g \in \Omega_0$ について

$$\begin{cases} w_g|_H \sim \int_{\Sigma_g} \chi_\sigma dY_g(\sigma), \\ w_g|_{(H, \mathcal{F}_0(g))} \sim \int_{\Sigma'_g} \chi_\sigma dY'_g(\sigma) \end{cases}$$

がわかっているものとする。

w_g の仮定 1)

$$w_g|_H \succ \exists \mathbb{1}_H \text{ (H-invariant vector がある)} \Leftrightarrow w_g = \mathbb{1}_G$$

がみたされるならば

$D(H, \mathcal{F}_0)$ の H-invariant vectors の次元

= 分解 (3) の D での $\mathbb{1}_G$ の multiplicity

= 1

i.e. ergodic.

結果

◦ (Mautner). $v = \sum_j v_j \quad \forall_j, v_j \neq 0 \Rightarrow w_g$ の仮定 1) がなりたつ。

従ってこれを含む \mathcal{O} は ergodic

◦ Gelfand - Fomin (Lor (3), Lor (4)), Hirai (任意 $\dim(n)$) は
全ての k_0 -class 1 の表現をかぞえ上げて w_g の仮定 1) のなり

たつことを示した。

3. Spectrum

$$(*) \begin{cases} H \text{ の同じ表現 } \varphi \sim \varphi_\rho \text{ の連続和 } \int_{\Omega'} \varphi_\rho d\sigma(\rho) \text{ は} \\ [\dim L^2_{\alpha}(\Omega')] \varphi \text{ と同値} \end{cases}$$

ω_ρ の仮定 2) $\omega_\rho(H, \mathfrak{g}_0(\rho))$ は $\omega_\rho \neq \mathbb{1}_G$ に対して multiple Lebesgue をみたすならば (*) より分解 (3) で

$$D(H, \mathfrak{g}_0) \ominus \mathbb{1} \text{ は } [\dim L^2_{\alpha}(\Omega_0) + \alpha] \text{-Lebesgue}$$

◦ Gelfand-Fomin, Hirai は仮定 2) と

$\dim L^2_{\alpha}(\Omega_0) = \infty$ を示し、従って σ -Lebesgue を示した。

4. Examples

§ 2.2 の examples 2)

1. $n=3 \Rightarrow$

$$G = \text{Lor}(3) \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; n \in SO(2) \right\}$$

$$B = 0 \quad v = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \ 1 \\ \hline & 1 \ 0 \end{array} \right)$$

\Rightarrow

$$K_0 = \{e\} \quad H = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1} & & \\ \hline & chs & shs \\ & shs & chs \end{array} \right) : -\infty < s < \infty \right\}$$

\downarrow

$$\therefore \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_0$$

$\forall \omega_\rho$ は $\neq \mathbb{1}_G$ なる既約表現で

$w|_H$: simply Lebesgue (discrete series ")

: doubly Lebesgue (cont. s)

$$\dim L^2(\Gamma \backslash G) = \infty$$

i.e. 仮定 1) 仮定 2) が成り立ち、 u は σ -Lebesgue.

2. $n = 4$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in SO(3) \right\}$$

$$B_0 = \sigma, \quad v = \left(\begin{array}{c|c} 0_2 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow K_0 = \left\{ \begin{pmatrix} r & \\ & 1_1 \end{pmatrix} \right\} \sim SO(2), \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \\ \hline chs & shs \\ shs & chs \end{pmatrix} \right\}$$

$\Omega = \Omega_0$ の $\forall w_p$ ($\neq \Gamma$ 既約) z : $w|_{(H \backslash B_0(p))}$
は simply Lebesgue

$$\dim L^2(\Gamma \backslash G / K_0) \geq \dim L^2(\Gamma \backslash G / K) = \dim \{f: f(cgk) = f(g)\}$$

$\Gamma g k$ は closed z $\dim(\Gamma g k) \leq \dim G$

$$\therefore \dim L^2(\Gamma \backslash G / K) = \infty$$

z 仮定 1) 2) が成り立つ。