数理解析研究所講究録
20巻 1967年 34-40

Transversal field をもつ Automorphism の例

名大 工　野本久夫

Sinai は [1] で力学系の transversal field なる概念を導入し，それが力学系の研究において重要な役割を果すことを示した．とくに，[1] では力学系が K-system になるための条件が transversal field を用いて与えられている．この報告では transversal field のあり方を 2, 3 の例について述べる．

例 I. 無限個の transversal fields をもつ automorphism ([1])．

単位円周 S^1 上に普通の Lebesgue 測度 dx を与えた空間 (S^1, dx) の copy を (X_n, μ_n) とし，その両側無限直積を

$$(M, \mu) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \otimes (X_n, \mu_n)$$

とする．M 上の shift

$$T : M \ni x = (\cdots e^{ix_{-1}}, e^{ix_0}, e^{ix_1}, \cdots) \longrightarrow$$

$$x' = (\cdots e^{ix'_{-1}}, e^{ix'_0}, e^{ix'_1}, \cdots) \in M, \quad x'_k = x_{k-1} \pmod{2\pi})$$

に対して，実数λ，$|\lambda| \neq 1$ をとって

$$Z_t : \ M \ni x \longrightarrow Z_t x = x', \qquad x'_k = x_k + \lambda^k t \pmod{2\pi})$$

としてえられる$\{Z_t\}$はTの transversal flow：

(1) $Z_t T = T Z_{\lambda t}$

今

(2)， $\varphi_n(x) = e^{ix_n}$， $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x)^{a_0} \cdot \varphi_1(x)^{a_1} \cdot \cdots \cdot \varphi_p(x)^{a_p}, \quad a_k : \text{整数}$$

とおけば

(3) $\varphi(Z_t x) = \exp\left\{it[a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_p\lambda^p]\right\} \cdot \varphi(x)$

故に，Tは連続無限個の transversal flow をもち，

イ) λが代数的 $\Longleftrightarrow$ $\{Z_t\}$は non-ergodic.

ロ) λが超越的 $\Longleftrightarrow$ $\{Z_t\}$は ergodic.

ロ)の場合 $[\lambda\text{の有理整式}]/\lambda^n$ なる形の点スペクトルをもつ.

例2. Special flow の base automorphism の transversal flow ([3]).

Neumann [3] は continuous spectrum をもつ flow の例を special flow を用いて与えた. その例では ceiling function に課した条件から spectrum が連続であることを

示すのに若干の計算を行なわなければならない。ここでは transversal flow を用いてそのような例をつくる。

$\{S_t\}$ は base automorphism (X, T) と ceiling function $f(u)$ からきまる

$$M = \{(u, v) ;\ 0 \leqq v < f(u),\ u \in X\}$$

上の special flow. 次のことが知られている.

(*). $\varphi(u, v)$ を点スペクトル λ に属する $\{S_t\}$ の固有函数とする.

$e^{-i\lambda v}\varphi(u, v)$ は v に無関係で

(4) $\psi(u) \equiv e^{-i\lambda v}\varphi(u, v)$ とおくと

(5) $\psi(Tu) = e^{i\lambda f(u)}\psi(u)$

逆に(5)をみたす ψ から(4)で φ を定義すれば φ は λ の固有函数である。次の仮定をおく

i) T は X 上で ergodic な transversal flow $\{Z_t\}$ をもつ: $Z_t T = T Z_{\alpha t}$ $(|\alpha| < 1)$, $\qquad V_t \psi(u) \equiv \psi(Z_t u)$ とおく.

ii) $f(u)$ は non-const.

このとき, $\psi(u)$ が (5) をみたせば

(6) $V_t\left(e^{i\lambda f(u)}\psi(u)\right) = e^{i\lambda f(u)}\psi(u)$

$\because$ 上式左辺 $= V_t\,\psi(Tu) = \psi(Z_t Tu) = \psi(TZ_{\alpha t}u)$

$$= e^{i\lambda f(Z_{\alpha t}u)}\psi(Z_{\alpha t}u) = V_{\alpha t}\left(e^{i\lambda f(u)}\psi(u)\right) = \cdots\cdots$$

$$= V_{\alpha^n t}\left(e^{i\lambda f(u)}\psi(u)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{i\lambda f(u)}\psi(u) \quad .$$

こゝで次に注意する。

○ $\{S_t\}$ ergodic $\Longleftrightarrow$ T ergodic

∵ (4),(5) で $\lambda=0$ とすることによりたしかめられる。

○ $\{Z_t\}$ ergodic $\Longrightarrow$ T weakly mixing

∵ $Ug(u)\equiv g(Tu)$, $Ug=e^{i\mu}g$, $\|g\|_{L^2(X)}=1 \quad \Longrightarrow$

$$a(t)\equiv(V_t g,\ g)=(V_t Ug,\ Ug)=(UV_{\alpha t}g,\ Ug)=(V_{\alpha t}g,\ g)=a(\alpha t)$$

$a(t)$ は cont. ∴ $a(t)=a(0)=1$ ∴ $\|g\|=1$ より $V_t g=g$

で $g=\mathrm{const}$ だから $\mu=0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

今 $\{S_t\}$ が $\lambda\neq0$ な点スペクトルをもち、$\varphi(u,v)$ がその固有函数とする。(4) で $\psi(u)$ を定義し、(5), (6) と仮定 i) を用いれば、

$$\psi(Tu)=e^{i\lambda f(u)}\psi(u)=\mathrm{const.}\Rightarrow\psi(u)=\mathrm{const}\Rightarrow f(u)=\mathrm{const}$$

で ii) に矛盾。よって上の注意より $\{S_t\}$ は $L^2(M)\ominus\{1\}$ で continuous spectrum をもつ。

例 3. トーラス上の automorphism. ([2]).

$M=\mathbb{T}^2$: 2次元トーラス

T : $\mathbb{T}^2$ の group automorphism $A=(a_{ij})_{i,j=1,2}$, a_{ij} は整数,

$\det A=\pm1$ からきまるもの

この例については [1] で代数的に transversal flow $\{Z_t\}$ を求める方法がのべられている。こゝでは T の fibre としての取扱をのべる。なお本報告集，押川氏の項 §12 参照。

$1°$ $A: \mathbb{T}^2 \ni x = (x_1, x_2)^t \to \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^t,\quad \bar{x}_i = \sum_1^2 a_{ij} x_j,\ (\mathrm{mod}\ 1)$

で1次微分式 $\omega = \gamma_1 dx_1 + \gamma_2 dx_2$ が

$$\bar{\omega} = \lambda\omega,\quad \bar{\omega} = \gamma_1 d\bar{x}_1 + \gamma_2 d\bar{x}_2$$

とすると,

$$\gamma_1(a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2) + \gamma_2(a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2)$$

$$= \lambda\gamma_1 dx_1 + \lambda\gamma_2 dx_2$$

∴

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{21}\gamma_2 = \lambda\gamma_1 \\ a_{12}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 = \lambda\gamma_2 \end{cases} \iff A^*\gamma = \lambda\gamma,$$

A^* は A の adjoint

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^t$

A^* (A) は実固有値 λ_1, λ_2 ($|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$) をもつものと仮定し, $(\alpha_1, 1)^t$, $(\alpha_2, 1)^t$ を対応する固有ベクトルとすると,

$\gamma_1 : \gamma_2 = \alpha_i : 1$.

方程式

(7) $dx_2 + \alpha_1 dx_1 = 0$

の解のつくる $\mathbb{T}^2$ 上の直線の系 $\mathcal{Z}^{(1)}$ は A (T) 不変で,その transversal field である:

(i) 直線 $\Gamma \in \mathcal{Z}^{(1)} \Rightarrow A\Gamma \in \mathcal{Z}^{(1)}$

(ii) l を Γ 上の長さ $|l|$ の線分とすれば, $A^{-1}l \subset A^{-1}\Gamma$ かつ

(8) $|A^{-1}l| = |\lambda_1|^{-1}|l| \geq \mu_1 |l|$ (拡大) ($\exists\mu_1 > 1$).

λ_2 に対しても類似に

(7)' $dx_2 + \alpha_2 dx_1 = 0$

から transversal field $\mathcal{Z}^{(2)}$ で(i)および

(ii)′ l を $\Gamma\in\mathcal{Z}^{(2)}$ 上の線分とすれば，$A^{-1}l\subset A^{-1}\Gamma\in\mathcal{Z}^{(2)}$，かつ

(8)′ $|A^{-1}l|=|\lambda_2|^{-1}|l|\leq\mu_2|l|$ （縮小） （$^{\exists}0<\mu_2<1$）

なるものがある．

今 $Z_t:(x_1,x_2)\longrightarrow(x_1+\alpha_1 t,\ x_2+t)$ として与えられる flow $\{Z_t\}$ をとれば，これは T の transversal flow で，その orbit の全体が $\mathcal{Z}^{(1)}$ である．

$\mathcal{Z}^{(1)},\mathcal{Z}^{(2)}$ に Sinai [1] の結果を用いれば T が K-automorphism であることがわかる．また $|\lambda_i|\neq 1$ より A の特性多項式 $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ は有理的に既約，従って α_1，1 は有理的に一次独立となって $\{Z_t\}$ は純点スペクトルをもつ ergodic な flow となっている．これより本報告集の小和田氏の作用素論的な方法のみで，T が $L^2(\mathbb{T}^2)\ominus\{1\}$ で σ-ルベーグスペクトルをもつことが直接にわかる．

2°. 1° で述べた field $\mathcal{Z}^{(i)}$ は A に perturbation を与えた A_ε に対しても構成できる [2].

$$A_\varepsilon x=Ax+\varepsilon B(x) \qquad B(x)=(b_1(x),\ b_2(x))^t$$

で，$b_i(x)$ は C^3 級の $\mathbb{T}^2$ 上の函数とする．

<u>Theorem</u> 十分小さな $\varepsilon>0$ に対して，$\widehat{\alpha}_1(x,\varepsilon)$ を適当にとれば，方程式

(9) $\quad dx_2 + \tilde{\alpha}_1(x,\varepsilon)\,dx_1 = 0$

の解のつくる $\mathbb{T}^2$ 上の曲線の系 $Z_\varepsilon^{(1)}$ は，変換 A_ε に対して (i) (ii) をみたす transversal field である.

構成の概要. $\alpha_1^{(1)}(x,\varepsilon) = \alpha_1$ とし

$$(10) \quad \alpha_1^{(n+1)}(x,\varepsilon) = \frac{(\bar{a}_{11}+\varepsilon g_{11}(x,\varepsilon))\alpha_1^{(n)}(A_\varepsilon^{-1}x) + (\bar{a}_{21}+\varepsilon g_{21}(x,\varepsilon))}{(\bar{a}_{12}+\varepsilon g_{12}(x,\varepsilon))\alpha_1^{(n)}(A_\varepsilon^{-1}x) + (\bar{a}_{22}+\varepsilon g_{22}(x,\varepsilon))}$$

とおく. ただし $\varepsilon > 0$ は十分小とし,

$$A^{-1} = (\bar{a}_{ij}), \quad \left(a_{ij} + \varepsilon \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_j}\right)^{-1} = (\bar{a}_{ij}) + \varepsilon\,(g_{ij}(x,\varepsilon))$$

$g_{ij}(x,\varepsilon)$ は x に関して連続である.

このとき, $x \in \mathbb{T}^2$ に関して一様に $\alpha_1^{(n)}(x,\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{\alpha}_1(x,\varepsilon)$ となり $\tilde{\alpha}_1$ が Theorem の条件をみたすことが示される.

[1] Ya. G. Sinai; 可算ルベーグ・スペクトルをもつ古典力学系 II, Izv. Akad. Nauk, 30 (1966), 15-68.

[2] В.И. Арнольд и Я.Г. Синай; О малых возмущениях автоморфизмов тора, ДАН, 144, no4 (1962), 695-698

[3] J. von Neumann; Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechnik, Ann of Math. (2), 33 (1932), 587.