

リーマン多様体上の flow と transversal field

九大理 押川元重

[1] Ya. G. Sinai ; 可算ルベークスペクトルをもつ
力学系 I. Izv. Akad. Nauk, 25(1961), 899-924.

[2] Ya. G. Sinai ; 可算ルベークスペクトルをもつ古典
力学系 II. Izv. Akad. Nauk, 30(1966), 15-68.

Ya. G. Sinai は論文 [1] において, Kolmogorov-system の一
般的性質—エルゴード性, 混合性, 可算ルベークスペクトル
等—を示したのに続き, 論文 [2] において古典力学系が K-sys-
tem になるための条件を与える方法として transversal field
の概念とその性質を研究した。

§ 1. リーマン多様体上の automorphism

n 次元, 連結, 向きづけ可能な C^∞ 級リーマン多様体 M は区分的に滑らかな $(n-1)$ 次元部分多様体をなす境界 ∂M をもつ。

リーマン計量を $ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i dx_j$, リーマン計量から定まる体積要素を $d\sigma(x) = \sqrt{\det(g_{ij}(x))} dx_1 \cdots dx_n$ とする。

M 上の測度 μ は微分形式により与えられる。

$d\mu(x) = a(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$, $a(\cdot)$ は非負 C^+ 級函数
 M のボレル部分集合の全体の作る σ 代数を \mathcal{F} とあらわす。

M から M の上への 1 対 1, C^+ 級写像を T とする。

T が μ -不変

$$\mu(A) = \mu(TA) = \mu(T^{-1}A), \quad A \in \mathcal{F}$$

のとき, T を M 上の *automorphism* という。

注. (M, \mathcal{F}, μ) はルベーグ空間になる。

§ 2. リーマン多様体上の flow

M を含む n 次元, 連結, 向きづけ可能な C^∞ 級リーマン多様体を M_0 とする。 M_0 上に滑らかなベクトル場 $\tilde{\omega}(x)$ が与えられているとする。 $\tilde{\omega}(x)$ の M への制限を $\omega(x)$ とかく。

$$\partial M_1 = \left\{ x \in \partial M ; \begin{array}{l} x \text{ における } \partial M \text{ の外法線ベクトルへの} \\ \omega(x) \text{ の射影が非負} \end{array} \right\}$$

$$\partial M_2 = \left\{ x \in \partial M ; \begin{array}{l} x \text{ における } \partial M \text{ の外法線ベクトルへの} \\ \omega(x) \text{ の射影が非正} \end{array} \right\}$$

とすると, $\partial M = \partial M_1 \cup \partial M_2$ となる。ただし $\partial M_1 \cap \partial M_2$ は ∂M の滑らかな成分上では ∂M を ∂M_1 と ∂M_2 に分ける $(n-2)$ 次元の部分多様体と仮定する。

∂M_1 から ∂M_2 への滑らかな 1 対 1 変換で $\partial M_1 \cap \partial M_2$ 上では恒等変換になるようなものを S とする。

M の内部では微分方程式系 $\frac{dx}{dt} = \omega(x)$ により軌道が定まり, ∂M_1 に達すれば S により ∂M_2 に変換されることにより構成される M 上の変換の1参数群を $\{S_t\}$ とする.

$\{S_t\}$ が μ -不変のとき, $\{S_t\}$ を M 上の flow という.

注. S を M を閉多様体にかえる縁の同一視とみなせば, $\{S_t\}$ はその上の区分的に滑めらかな変換となる.

§3. 可測ファイバー構造

定義 M の可測部分集合 U に対して, 次のような U の可測分割 $\xi = \{C_\xi\}$ が与えられているとき, ξ を U における n 次元局所ファイバー構造 という.

1) ξ の成分 C_ξ は M における区分的に滑らかな n 次元局所的な部分多様体であり, $C_\xi \neq C'_\xi$ ならば, $\overline{C_\xi} \cap \overline{C'_\xi} = \emptyset$.

M のリーマン計量から導かれる C_ξ 上のリーマン計量を $d\rho_{C_\xi}(x)$ とし, $d\rho_{C_\xi}(x)$ に対応する C_ξ 上の体積要素を $d\sigma_{C_\xi}(x)$ とする.

2) $\mu(A \cap B) = \int_B \mu(A | C_\xi(x)) d\mu(x)$, $A \in \mathcal{Y}_U$, $B \in \mathcal{Y}(\xi)$

とするとき,

$$\mu(A | C_\xi(x)) = \int_{A \cap C_\xi(x)} P_\xi(y) d\sigma_{C_\xi(x)}(y)$$

但し $P_\xi(y)$ は U 上の ~~非~~正 (a.e.) 可測函数.

3) $x \in U$ から $C_\xi(x)$ の境界までの距離を与える函数 $f_\xi(x)$ が可測.

C_{ξ} を 局所ファイバー という。

定義 (local base)

ルベーク空間 (M, \mathcal{T}, μ) の部分集合の系 $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}$ が local base であるとは

1) \mathcal{U} はルベーク空間 M の base である。

2) $\forall A \in \mathcal{T} ; 0 < \mu(A) < 1$

$$\implies \exists U_{\alpha} ; \mu(U_{\alpha} \cap A) \mu(U_{\alpha} \cap (M-A)) \neq 0$$

lemma 1. $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}$ を M の local base とする。

\mathcal{T} の任意の部分 σ -代数 \mathcal{T}' が全ての U_{α} について, $\mathcal{T}'_{U_{\alpha}} = \mathcal{T}_{U_{\alpha}}$ ならば, $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ (trivial) である。

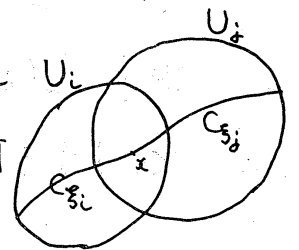
定義 リーマン多様体 M に次のような可算 local base $\mathcal{U} = \{U_i\}$ が与えられたとき, 良次元可測ファイバー構造 \mathcal{Z} が与えられたという。

1) 各 U_i は良次元局所ファイバー構造 ξ_i をもつ。

2) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ のとき,

a.e. $x \in U_i \cap U_j$ に対して, $C_{\xi_i}(x) \cap U_j = C_{\xi_j}(x) \cap U_i$

であり, とともに良次元区分的に滑めらかな局所的な部分多様体である。



lemma 2. $\mathcal{U} = \{U_i\}$ を可測ファイバー構造を与える可算 local base とする。

$$W_i \subset U_i, W_i \in \mathcal{F}(\xi_i), \mu(W_i) = 0$$

$$\Rightarrow \exists W \supset \bigcup_i W_i, W \cap U_i \in \mathcal{F}(\xi_i), \mu(W) = 0$$

M の元 x と y が同値とは、有限 η の局所ファイバー

$$C_{\xi_{d_1}} \subset U_{d_1}, C_{\xi_{d_2}} \subset U_{d_2}, \dots, C_{\xi_{d_m}} \subset U_{d_m} \quad \text{が存在して,}$$

$$\overline{C_{\xi_{d_1}}} \ni x, \overline{C_{\xi_{d_m}}} \ni y, \overline{C_{\xi_{d_i}}} \cap \overline{C_{\xi_{d_{i+1}}}} \neq \emptyset \quad (i=1, 2, \dots, m-1)$$

となること、と定義する。

この同値関係による同値類を Γ とあらわせば、 Γ は M の可測集合であり、その全体 $\mathcal{Z} = \{\Gamma\}$ は M の分割 (mod 0) を与える。但し可測分割になるとは限らない。 Γ のことを ファイバー とよび、分割 \mathcal{Z} の可測被を \mathcal{U}_Z で表わす。ファイバーをこのように定義するには lemma 2. を用いるが、次の lemma 3 も lemma 2 より直ちにわかる。

lemma 3. M 上の μ -可測函数 $f(x)$ が、各 U_i 上で $\mathcal{F}(\xi_i)$ -可測であれば、 $f(x)$ は $\mathcal{F}(\mathcal{U}_Z)$ -可測である。

§4. 2つの可測ファイバー構造の絶対連続性

Z_1, Z_2 を n 次元リーマン多様体 M のそれぞれ n_1 次元、 n_2 次元の可測ファイバー構造とし、構造を与える local base をそれぞれ

れ $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ とする。

定義 Z_2 が Z_1 に関して絶対連続であるとは、

1) a.e. $C_{\xi_\alpha^1} \subset U_\alpha^1 \in \mathcal{U}_1$ に対して

$\mu(U_\beta^2 | C_{\xi_\alpha^1}) > 0$ なる $U_\beta^2 \in \mathcal{U}_2$ について

a) $U_\beta^2(C_{\xi_\alpha^1}) = \bigcup_{x \in C_{\xi_\alpha^1} \cap U_\beta^2} C_{\xi_\beta^2}(x)$ とするとき, $\mu(U_\beta^2(C_{\xi_\alpha^1})) > 0$.

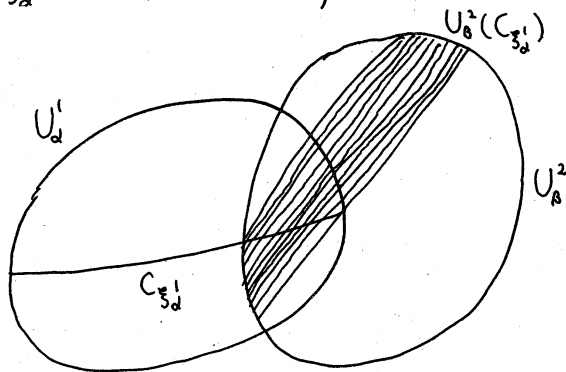
e) $C_{\xi_\alpha^1} \cap U_\beta^2$ 上に与えられる次の2つの測度 μ_1, μ_2 が互に絶対連続である。

$$\mu_1(A) = \mu(A | C_{\xi_\alpha^1})$$

$$\mu_2(A) = \mu(\tilde{A}), \quad \tilde{A} \in \mathcal{U}_2(C_{\xi_\alpha^1}), \tilde{A} \cap C_{\xi_\alpha^1} = A.$$

2) 任意の測度 ν の可測集合 K に対して

$\{U_\beta^2(C_{\xi_\alpha^1}(x)); x \in K\}$ が M の local base をなす。



注 1), a) が成立するためには, $k_1 + k_2 \geq n$

定理 1. Z_2 が Z_1 に関して絶対連続であれば,

$$\mathcal{U}(U_{Z_1}) \cap \mathcal{U}(U_{Z_2}) = \mathcal{U}$$

証明 $\gamma(U_{z_1}) \cap \gamma(U_{z_2})$ の case をなる可算集合系を $\{B_i\}$ とすれば, Z_1 の完全なるファイバーからなる集合の系 $\{B_i^{(1)}\}$ 及び Z_2 の完全なるファイバーからなる集合の系 $\{B_i^{(2)}\}$ が存在して,

$$\mu(B_i \Delta B_i^{(1)}) = \mu(B_i \Delta B_i^{(2)}) = \mu(B_i^{(1)} \Delta B_i^{(2)}) = 0, \quad \forall i$$

全ての $U_\alpha \in \mathcal{U}_1$ について

$$\{C_{\mathfrak{F}_\alpha} \in \mathfrak{F}_\alpha; \mu(B_i | C_{\mathfrak{F}_\alpha}) = \mu(B_i^{(1)} | C_{\mathfrak{F}_\alpha}) = \mu(B_i^{(2)} | C_{\mathfrak{F}_\alpha}) = 0 \text{ or } 1, \forall i\}$$

は測度 1 の集合をなす. 絶対連続性の定義 1), 2) より

$$\mu(B_i^{(2)} | C_{\mathfrak{F}_\alpha}) = \mu_1(B_i^{(2)}) = 1 \Rightarrow \mu_2(B_i^{(2)}) = 1 \Rightarrow \mu(U_\alpha^2(C_{\mathfrak{F}_\alpha}) - B_i^{(2)}) = 0$$

従って, $\gamma(U_{z_1}) \cap \gamma(U_{z_2}) |_{U_\alpha^2(C_{\mathfrak{F}_\alpha})} = \mathcal{R} |_{U_\alpha^2(C_{\mathfrak{F}_\alpha})}$

絶対連続性の定義 2) と lemma 1 より,

$$\gamma(U_{z_1}) \cap \gamma(U_{z_2}) = \mathcal{R} \quad \square$$

§5. 一般の可測ファイバー構造と flow から定まる可測ファイバー構造の可積分性

M 上の flow $\{S_t\}$ の軌道への空間 M の分割により与えられる可測ファイバー構造を \mathcal{Z} とし, M の任意の可測ファイバー構造を \mathcal{Z}_1 とする.

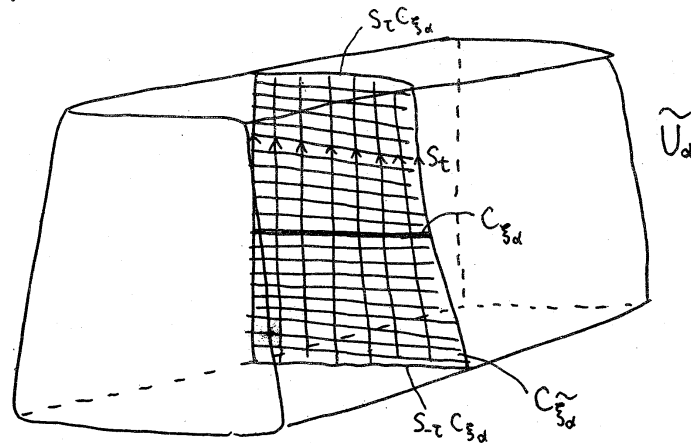
定義 \mathcal{Z}_1 と \mathcal{Z} が互に可積分であるとは, 次のような局所可測ファイバー構造をもつ local base $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_\alpha\}$ により与えられる可測ファイバー構造 $\tilde{\mathcal{Z}}_1$ が存在することである.

1) 各 \tilde{U}_α 上の局所ファイバー構造 \mathfrak{F}_α の局所ファイバーは

$$C_{\tilde{\Sigma}_d} = \bigcup_{|t| < \tau} S_t C_{\Sigma_d} \text{ の形をしている.}$$

但し, $\tau = \tau(C_{\tilde{\Sigma}_d}(x))$ は可測函数であり,
 C_{Σ_d} は Z_1 の局所ファイバーである.

2) 各 \tilde{U}_d 上の分割 $\{S_t C_{\Sigma_d}; |t| < \tau, C_{\Sigma_d}\}$ は \tilde{U}_d 上の局所可測ファイバー構造 $\tilde{\Sigma}_d$ をなし, 系 $\{\tilde{U}_d, \tilde{\Sigma}_d\}$ は可測ファイバー構造 Z_1 を与える.



\tilde{Z}_1 を Z_1 と Z の和とよび, $\tilde{Z}_1 = Z_1 \wedge Z$ と表わす.

注. $\dim \tilde{Z}_1 = \dim Z_1 + \dim Z = \dim Z_1 + 1$

§6. 2つの可測ファイバー構造の非可積分性

Z_1, Z_2 はともに $\text{flow}\{S_t\}$ から定まる可測ファイバー構造 Z と可積分な可測ファイバー構造とする.

$$\tilde{Z}_1 = Z_1 \wedge Z, \quad \tilde{Z}_2 = Z_2 \wedge Z$$

$\dim Z_1 + \dim Z_2 + 1 \geq n$ を仮定する.

\tilde{U}_i を Z_i 及び和 \tilde{Z}_i 構造を同時に与える local base とする.

Z_1 の局所ファイバー $C_{Z_1} \subset \tilde{U}_d \in \tilde{U}_1$ について,

$\tilde{U}_\beta^2 \in \tilde{\mathcal{U}}_2$ を $\mu(\tilde{U}_\beta^2 | C_{Z_1}) > 0$ なるものとする.

$$\Gamma_2(C_{Z_1}) = \bigcup_{x \in C_{Z_1} \cap \tilde{U}_\beta^2} C_{Z_2}(x), \quad C_{Z_2}(x) \text{ は } x \text{ を通る } \tilde{U}_\beta^2 \text{ 上の } Z_2 \text{ の局所ファイバー}$$

とすれば, $\Gamma_2(C_{Z_1})$ 上には Z_2 の局所ファイバーからなる分割 χ_2 が与えられる. 集合 $\Gamma_2(C_{Z_1})$ には滑らかさが必ずしもないので可測な多様体と呼ぶことにする.

$$U_2(C_{Z_1}) = \bigcup_{|t| < \rho_0} S_t \Gamma_2(C_{Z_1}), \quad \rho_0 \text{ は定数.}$$

とすれば, 可測集合 $U_2(C_{Z_1})$ 上には, \tilde{Z}_2 の局所ファイバー

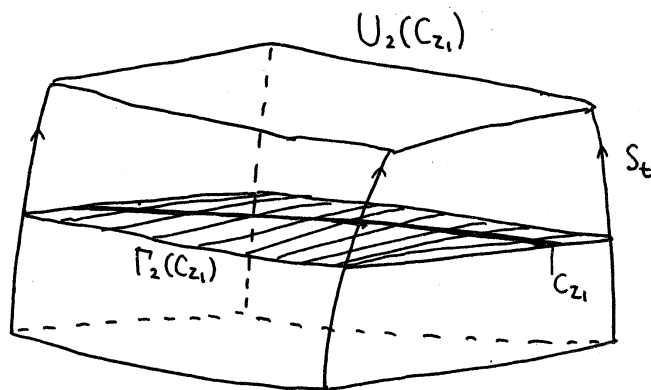
$$C_{\tilde{Z}_2} = \bigcup_{|t| < \rho_0} S_t C_{Z_2}, \quad C_{Z_2} \text{ は } C_{Z_1} \cap \tilde{U}_\beta^2 \text{ と交わる } Z_2 \text{ の局所ファイバー.}$$

からなる可測分割 $\tilde{\chi}_2$ が与えられる.

$\mu(U_2(C_{Z_1})) > 0$ であれば, $\Gamma_2(C_{Z_1})$ 上には,

$$\sigma(A) = \mu(\tilde{A}), \quad \tilde{A} = \bigcup_{|t| < \rho_0} S_t A, \quad A \in \mathcal{X}(\chi_2), \tilde{A} \in \mathcal{X}(\tilde{\chi}_2).$$

により測度 σ が与えられる.



同様に Z_2 の局所ファイバー C_{Z_2} に対して, 可測集合 $U_1(C_{Z_2})$ とその上での \tilde{Z}_1 の局所ファイバー $C_{\tilde{Z}_1} = \bigcup_{|t| < \rho_0} S_t C_{Z_1}$ が与えられる.

定義 Z_1 と Z_2 が非可積分であるとは,

正測度の Z_1 の局所ファイバー C_{Z_1} に対して, $\mu(U_2(C_{Z_1})) > 0$ であり,
 $\Gamma_2(C_{Z_1})$ の部分集合 $\Gamma' \in \mathcal{F}(\mathcal{X}_2)$, $\delta(\Gamma') > 0$ が存在して,
 任意の Z_2 の局所ファイバー $C'_{Z_2}, C''_{Z_2} \in \Gamma'$ に対して,

1) $\mu(U_1(C'_{Z_2}) \cap U_1(C''_{Z_2})) > 0$

2) $U_1(C'_{Z_2}) \cap U_1(C''_{Z_2}) \ni x$ について, 2つの \tilde{Z}_1 の局所ファイバーを

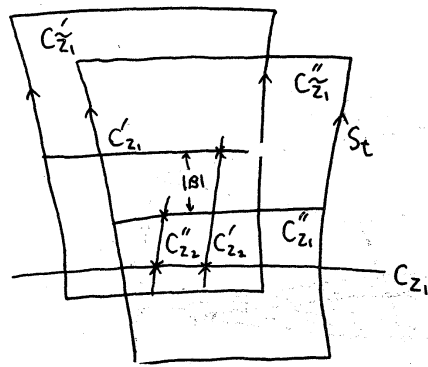
$$C'_{\tilde{Z}_1}(x) = \bigcup_{|t| < \rho_0} S_t C'_{Z_1}, \quad C'_{Z_1} \text{ は } C'_{Z_2} \text{ と交わる } Z_1 \text{ の局所ファイバー.}$$

$$C''_{\tilde{Z}_1}(x) = \bigcup_{|t| < \rho_0} S_t C''_{Z_1}, \quad C''_{Z_1} \text{ は } C''_{Z_2} \text{ と交わる } Z_1 \text{ の局所ファイバー.}$$

とするとき, 次のような $\beta = \beta(x)$, $|\beta| < \rho_0$ が定まる.

$$C'_{\tilde{Z}_1}(x) \cap C''_{\tilde{Z}_1}(x) = \begin{cases} \bigcup_{-\rho_0 < t < \rho_0 - \beta} S_t (S_0 C'_{Z_1} \cap C''_{Z_1}) & \text{if } \beta \geq 0 \\ \bigcup_{-\rho_0 - \beta < t < \rho_0} S_t (S_0 C'_{Z_1} \cap C''_{Z_1}) & \text{if } \beta < 0 \end{cases}$$

$\beta(x)$ は 0 と異なる (a.e.) 可測函数である.



§ 7. automorphism の transversal field

定義 可測ファイバー構造 $Z = \{\Gamma\}$ が automorphism T の trans-
 -versal field であるとは,

$$Z \ni \forall \Gamma \longrightarrow T^{-1}\Gamma \in Z$$

をみたすことである。

ファイバー Γ 上の正則な点 x を通り Γ 上にある長さをもつ曲線をとす。 $l' = T^{-1}l$ はファイバー $T^{-1}\Gamma$ 上の点 $x' = T^{-1}x$ を通る曲線を表わす。点 x から点 y までの曲線 l の長さを Δ 、点 $x' = T^{-1}x$ から点 $y' = T^{-1}y$ までの曲線 l' の長さを Δ' とする。

$$\lambda_l(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta'}{\Delta}, \quad \lambda(x) = \inf_l \lambda_l(x)$$

とすれば、 $\lambda(x)$ は正則点 x を通るファイバー上で局所的に滑らかである。

定義 任意の正則な点 x と任意の方向 l に対して、 $\lambda_l(x) > 1$ のとき、transversal field は拡大しているという。

任意の正則な点 x と任意の方向 l に対して、 $\lambda_l(x) < 1$ のとき、transversal field は縮小しているという。

ファイバー Γ 上で、点 $x \in \Gamma$ の近傍におけるリーマン計量から導かれる体積要素を $d\sigma_2(x)$ で表わす。 $d\sigma'_2(x) = d\sigma_2(T^{-1}x)$ は $d\sigma_2(x)$ に関して絶対連続で密度函数 $\Delta(x)$ をもつ。即ち

$$d\sigma_2(T^{-1}x) = \Delta(x) d\sigma_2(x)$$

拡大している transversal field のときは、 $\Delta(x) > 1$, $\lambda(x) > 1$ 。

縮小している transversal field のときは, $\Delta(x) < 1$, $\lambda(x) < 1$.

$\rho_Z(x_1, x_2)$ を Z のファイバー Γ 上の 2 点 x_1, x_2 間の Γ にそっての距離とする.

lemma 4. 拡大している transversal field $Z = \{\Gamma\}$ について, ほとんど全てのファイバー Γ に対して, Γ 上の任意の 2 点を x_1, x_2 とすれば,

$$\rho_Z(T^n x_1, T^n x_2) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

証明 1° 可測集合 U は次の性質をみたすようなものとする.

1) ある点の球近傍 V に含まれ, V の中の Z の各局所ファイバーと U との交わりは区分的に滑らかな境界をもつ滑らかな部分多様体をなす. 2) $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 1$ for $\forall x \in U$.

U 上の 2 点 x_1, x_2 が Z の一つの局所ファイバー上にあれば,

$$\rho_Z(T^n x_1, T^n x_2) \geq \lambda_0 \rho_Z(x_1, x_2)$$

2° 再帰定理より可算無限可測集合列で次の性質をみたすもの $U_i' \subset U_i''$ ($i=1, 2, \dots$) が存在する.

1) U_i', U_i'' はともに 1° と同じ性質をもち, U_i' 中の Z の各局所ファイバーはそれを含む U_i'' 中の Z の局所ファイバーの境界から $\alpha_i > 0$ 以上はなれている. 2) ほとんど全ての x は U_i' の少くとも一つに無限回はいる.

完全なファイバーから成る測度 μ の可測集合 M' で、 M' に制限して考えると、全ての局所ファイバーで条件つけた 2) の性質をみたす点 x の集合の確率が 1 になる。ようなものが存在する。

3° M' の任意のファイバー Γ に対して、 Γ 上の 2 点 x_1, x_2 が $\rho_2(T^n x_1, T^n x_2) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) のとき同値 ($x_1 \sim x_2$) であると定義すると、同値類は同値関係の定義より Γ で閉集合になり、2° より Γ で閉集合になることもわかる。従って Γ の連結性より同値類は Γ に一致する。 ─

lemma 5 エルゴード性をもつ automorphism T について、測度正の集合 U 上に T の拡大している transversal field Z の局所ファイバーへの分割 ξ が与えられているとする。

ほとんど全ての $x \in U$ に対して、

$T^{n_i} x \in U$ なる時刻列を $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k \leq \dots$ とすれば、

$$\Gamma(x) = \bigcup_k T^{-n_k} C_{\xi}(T^{n_k} x) \quad \text{となる。}$$

証明 U の測度正の部分集合 U' を次の様にとる。 ξ が U' 上に導びく分割を ξ' とする。各 $C_{\xi'}$ は C_{ξ} を含む C_{ξ} の境界から ($C_{\xi'}$ に関係する) $a > 0$ 以上にはなれている。

U' への induced automorphism のエルゴード性を考えるとほとんど全ての x に対して、正数 a_0 と $\{n_k\}$ の部分列 $\{m_0\}$

が存在して, $C_{\xi'}(T^{m_0}x)$ に対して $a > a_0$ となる。

x は同時に $\Gamma(x)$ が lemma 4 の性質をみたすようなものとする。
 $\Gamma(x)$ の点で, $\bigcup_{\mathbb{R}} T^{-n_2} C_{\xi}(T^{n_2}x)$ に含まれない点 y が存在したと仮定する。 $\rho_z(T^n y, T^n x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) だから, 充分大きな s では $\rho_z(T^{m_0} y, T^{m_0} x) \leq a_0$ 。従って, $T^{m_0} y \in C_{\xi}(T^{m_0} x)$, $y \in T^{-m_0} C_{\xi}(T^{m_0} x)$ となり矛盾。」

§ 8. flow の transversal field

定義 可測ファイバー構造 \mathcal{Z} が flow $\{S_t\}$ の transversal field であるとは。

- 1) \mathcal{Z} の各ファイバー Γ に対して $S_t \Gamma$ も又 \mathcal{Z} のファイバーである。
- 2) flow $\{S_t\}$ から導かれる可測ファイバー構造と \mathcal{Z} は可積分である。

Automorphism の場合と同様に S_t に対して $\lambda_2(t, x)$, $\Delta(t, x)$ が定義される。 $\{S_t\}$ の滑らかさにより正則点で次の極限も存在する。

$$\lambda_2(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda_2(t, x) - 1}{t}, \quad \alpha(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta(t, x) - 1}{t}$$

$$\Delta(t_1 + t_2, x) = \Delta(t_1, S_{t_2} x) \Delta(t_2, x) \text{ より}$$

$$\Delta(t, x) = \exp\left(\int_0^t \alpha(S_s x) dt\right)$$

も成り立つ。

定義 任意の正則点 x と任意の方向 λ に対して,

$\lambda_e(x) > 0$ ならば transversal field は拡大している.

$\lambda_e(x) < 0$ ならば transversal field は縮小している.

という。

定義 transversal field Z について, $U_Z = U$ (trivial)

であれば, metrical transitive であるという。

§9. エルゴード性に関する定理

定理 2A automorphism T に対して, 拡大している (又は縮小

している) transversal field Z_1 があれば, T 不変な集合

全体の作る σ 代数を γ_0 とするとき,

$$\gamma_0 \subset \gamma(U_{Z_1})$$

が成り立つ。

証明 Z_1 が拡大しているとき; $f(x)$ を M 上の連続函数とする.

エルゴード定理より, 次の極限はほとんど全ての x に対して

存在する.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^k x) = \bar{f}_+(x)$$

函数 $\bar{f}_+(x)$ は T 不変即ち γ_0 -可測であり, しかもこのような

函数は γ_0 -可測かつ絶対値可積分な函数のなすバナッハ空間で

いたるところ稠密である。従って $\bar{F}_+(x)$ が $\mathcal{G}(U_{Z_1})$ -可測であることを示せば充分である。

lemma 4 より, ほとんど全ての Z_1 のファイバー Γ に対して, Γ 上の任意の 2 点を x_1, x_2 とすれば, $\rho_{Z_1}(T^n x_1, T^n x_2) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 空間 M の Compact 性より, 函数 $f(x)$ は一様連続となるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(T^n x_1) - f(T^n x_2)| = 0$$

従って, $\bar{F}_+(x_1)$ が存在すれば, $\bar{F}_+(x_2)$ も存在して, $\bar{F}_+(x_1) = \bar{F}_+(x_2)$. 即ち $\bar{F}_+(x)$ はそのようなファイバー Γ 上で定数となり, $\mathcal{G}(U_{Z_1})$ -可測である。

Z_1 が縮小しているとき; 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^{-k} x) = \bar{f}_-(x)$$

を考察することにより, 同様にいえる。 ┘

系 automorphism T に対して, 拡大している transversal field Z_1 と縮小している transversal field Z_2 が存在して,

Z_2 が Z_1 に関して絶対連続

又は Z_1 が Z_2 に関して絶対連続

であれば, T はエルゴード性をもつ。

証明 定理 1 を使って, $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}(U_{Z_1}) \cap \mathcal{G}(U_{Z_2}) = \mathcal{G}$.

注 系の条件の「拡大」「縮小」はどちらでもよいが具体例ではこのような形で使えることが多い。このことは以後の定理についてもいえる。

定理 2F flow $\{S_t\}$ に対して、拡大(又は縮小)している trans-
-versal field Z_1 があれば、 $\{S_t\}$ -不変な集合全体の作る σ -代
数を \mathcal{F}_0 とするとき、 $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}(U_{\tilde{Z}_1})$
が成り立つ。ここに $\tilde{Z}_1 = Z_1 \wedge Z$, Z は flow $\{S_t\}$ から導か
れる可測ファイバー構造。

証明 automorphism の場合と同じような議論をすればよい
が、flow の場合は M 上に定義された連続関数 $f(x)$ について、

$$\text{極限} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S_t x) dt = \bar{F}_+(x)$$

を考える。ほとんどすべての Z_1 の局所ファイバー C_{z_1} に対して、
 C_{z_1} 上の任意の 2 点を x_1, x_2 とすれば $\bar{F}_+(x_1) = \bar{F}_+(x_2)$.

\tilde{Z}_1 の局所ファイバーは $C_{\tilde{z}_1} = \bigcup_{|t| < \rho_0} S_t C_{z_1}$ の形をしているので、
 $C_{\tilde{z}_1}$ 上の任意の 2 点を y_1, y_2 とすれば、 $S_{\tau_1} y_1 = x_1, S_{\tau_2} y_2 = x_2$
, $x_1, x_2 \in C_{z_1}$, $|\tau_1|, |\tau_2| < \rho_0$ と表わせる。 \bar{F}_+ の定義より

$\bar{F}_+(y_1) = \bar{F}_+(x_1) = \bar{F}_+(x_2) = \bar{F}_+(y_2)$ となり $C_{\tilde{z}_1}$ 上で定数と
なる。従って \bar{F}_+ は $\mathcal{F}(U_{\tilde{Z}_1})$ -可測となる。 \square

系 flow $\{S_t\}$ に対して, 拡大している transversal field Z_1 と縮小している transversal field Z_2 が存在して,
 \tilde{Z}_2 が Z_1 に関して絶対連続
 又は \tilde{Z}_1 が Z_2 に関して絶対連続
 であれば, $\{S_t\}$ はエルゴード性をもつ.

証明 $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}(U_{Z_2}) \cap \mathcal{X}(U_{Z_1}) = \mathcal{X}$.

§10. 増大している分割の存在に関する定理

定理 3A エルゴード性をもつ automorphism T が拡大している transversal field Z をもてば, ほとんどすべての要素が Z のファイバーの束連結部分集合であるような可測分割 \mathcal{S} で次の性質をみたすものが存在する.

0) $T\mathcal{S} > \mathcal{S}$

1) $\bigcap_{\mathbb{R}} T^{\mathbb{R}}\mathcal{S} = \mathcal{E}$

2) $\bigcap_{\mathbb{R}} T^{\mathbb{R}}\mathcal{S} = U_Z$

3) $H(T\mathcal{S} | \mathcal{S}) = h$ 但し $h = \int \log_2 \Delta(x) d\mu(x)$

証明 0° Z を与える local base の元を U_1 とする.

U_1 の測度正の部分集合 V を次のようにとる.

1. $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 1$ for $x \in V$

2. U_i の各局所ファイバー C_ξ に対して $C_\xi \cap V$ は滑らかな境界をもつファイバーの部分集合

3. V はある半徑 $d_0 > 0$ の球を含み, 球に滑らかに同位相

V の測度正の部分集合 V_1 を次のようにとる.

1. U_i の各局所ファイバー C_ξ に対して $C_\xi \cap V_1$ は滑らかな境界をもつファイバーの部分集合

2. V_1 は半徑 $\frac{d_0}{16}$ の球を含み, 球に滑らかに同位相

3. $C_\xi \cap V_1$ は直径 $\frac{d_0}{4}$ 以下であり, $C_\xi \cap V$ の境界から $\frac{d_0}{4}$ 以上にはなれている.

Z の局所ファイバーへの集合 V_1 の分割を \mathcal{N} とかく。 V_1 上では \mathcal{N} と一致し, $V - V_1$ 上では Z の局所ファイバーを与える集合 V の分割を $\hat{\mathcal{N}}$ とかく。 次のことを仮定するのは自然である。 正数 R が存在して, $C_{\hat{\mathcal{N}}}$ の境界からの距離が t を越えない点からなる集合 $D_t \subset C_{\hat{\mathcal{N}}}$ に対して, $\mu(D_t | C_{\hat{\mathcal{N}}}) \leq R t$.

V_1 上では \mathcal{N} に一致し, $M - V_1$ 上で退化している M の分割を $\tilde{\mathcal{N}}$ とかく。 $\mathcal{S} = \prod_{k \leq 0} T^k \tilde{\mathcal{N}}$ が求める分割である。

1° $\varepsilon > 0$ をとめて考える。 エルゴード定理を用いれば,

$$\Delta_n(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{V_1}(T^i x) \quad \text{とすると, 集合 } G \text{ と自然数}$$

$n(\varepsilon)$ が次のようにとれる。

$$\mu(G) > 1 - \varepsilon$$

$$|\Delta_n(x) - n\mu(V_1)| \leq \varepsilon n \quad \text{for } x \in G, n > n(\varepsilon).$$

$$\tilde{G} = \{x \in V_1 ; \mu(G | C_n(x)) > 1 - \sqrt{\varepsilon}\} \in \mathcal{T}_{V_1}(\eta)$$

とすれば, $\mu(V_1 - \tilde{G}) < \sqrt{\varepsilon}$.

$T^i C_n(x) \cap V_1 \neq \emptyset$ ならば, $T^i C_n(x) \subset V$ だから,

又 $x \in G$ ならば, $\Delta_n(x) \geq n(\mu(V_1) - \varepsilon)$ だから,

$$d(T^n C_n(x)) \leq d_0 \lambda_0^{-n(\mu(V_1) - \varepsilon)} \quad \text{for } x \in \tilde{G}, n > n(\varepsilon).$$

$K_n = \{x \in \tilde{G} ; H(\tilde{\eta} | C_{T^n \tilde{\eta}}(T^n x)) > 0\}$ とする.

点 $y \in T^n K_n$ はある $C_{\tilde{\eta}}$ の境界から $d_0 \lambda_0^{-n(\mu(V_1) - \varepsilon)}$ 以内の距離にある。従って,

$$\mu(K_n) = \mu(T^n K_n) = \int_V \mu(T^n K_n | C_{\tilde{\eta}}) d\mu \leq R d_0 \lambda_0^{-n(\mu(V_1) - \varepsilon)}.$$

$\sum_n \mu(K_n) < \infty$ なることより, ほとんどすべての点 x は高々有限個の K_n にのみ属する.

エントロピーの性質から, ほとんどすべての点 $x \in \tilde{G}$ に対して,

$$H(\mathcal{S} | C_{\tilde{\eta}}(x)) = H(T^{-1} \tilde{\eta} \vee T^{-2} \tilde{\eta} \vee \dots \vee T^{-\ell} \tilde{\eta} | C_{\tilde{\eta}}(x))$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\ell} H(T^{-i} \tilde{\eta} | C_{\tilde{\eta}}(x)) = \sum_{i=1}^{\ell} H(\tilde{\eta} | T^i C_{\tilde{\eta}}(x)) < \infty$$

ここには ℓ は最右辺により決まる x に関係する数である.

この式は \mathcal{S} がほとんど全ての $C_{\tilde{\eta}} \subset \tilde{G}$ を有限個の連結成分に分けることを意味する.

$\varepsilon = \frac{1}{m}$ とおき, $m \rightarrow \infty$ とすれば, ほとんどすべての $C_{\tilde{\eta}} \subset V_1$ を分割 \mathcal{S} の有限個の要素に mod 0 で分ける.

$W_\ell = T^{-\ell} V_1 - \left(\bigcup_{k=0}^{\ell-1} T^{-k} V_1 \right)$, $\ell > 0$ とすれば, T のエルゴード性より $\bigcup_{\ell \geq 0} W_\ell = M \pmod{0}$

$x \in W_\varepsilon$ に対して $C_S(x) = T^{-l} C_S(T^l x)$ が得られる.

即ちほとんどすべての要素 C_S は Z のファイバーの南連結部分集合である.

2° $TS \geq S$ は定義より明らか. $TS > S$ は $H(TS|S) > 0$ よりわかる.

$\prod_{\mathbb{R}} T^{\mathbb{R}} S = \varepsilon$, $\bigcap_{\mathbb{R}} T^{\mathbb{R}} S = U_Z$ は Z の拡大性を lemma 4.

lemma 5 によって用いければよい.

$$\begin{aligned} 3^\circ & \cdot -\frac{1}{m} \log \mu(C_{T^m S}(x) | C_S(x)) \\ &= -\frac{1}{m} [\log \mu(C_{T^m S}(x) | C_{T^{m-1} S}(x)) + \dots + \log \mu(C_{TS}(x) | C_S(x))] \\ &= -\frac{1}{m} \sum_{\mathbb{R}=0}^m \log \mu(C_{T^{\mathbb{R}} S}(T^{\mathbb{R}} x) | C_S(T^{\mathbb{R}} x)) \quad \text{for a.e. } x \end{aligned}$$

エルゴード定理より,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{m} \log \mu(C_{T^m S}(x) | C_S(x)) \right] = H(TS|S) \quad \text{for a.e. } x$$

・まず, $H(TS|S) \leq \nu$ を示す. $\nu < \infty$ を仮定してもよい.

分割 S_{V_i} は ν の細分故, ほとんどいたるところ正の密度 $P_S(x)$ で,

$$\mu(A | C_S) = \int_{A \cap C_S} P_S(x) d\sigma_{C_S}(x) \quad \text{for a.e. } C_S$$

$$G(P, P) = \{x \in V_i; P < P_S(x) < P\} \quad \text{とする.}$$

$\varepsilon > 0$ に対して, 次のような $0 < P_0 < P_0 < \infty$ と集合 $G_1 \in \mathcal{G}_{V_i}(S)$

が見いだせる. 即ち $x \in G_1$ に対して,

$$\alpha_1) \int_{C_S(x) \cap G(P_0, P_0)} d\sigma_{C_S}(y) \geq (1-\varepsilon) \sum(C_S(x))$$

$$d_2) P_0 < \sum (C_f(x)) < P_0$$

$$d_3) \int_{C_f(x) \cap G(P_0, P_0)} P_f(y) d\delta_{C_f(x)}(y) = \mu(G(P_0, P_0) | C_f(x)) \geq 1 - \varepsilon$$

$$\mu(G_1) \geq \mu(V_1) (1 - \varepsilon)$$

$$\bullet E_m = U \{ G_{T^m f} \in T^m f ; \int_{G_{T^m f} \cap G(P_0, P_0)} d\delta_{C_f}(y) \geq (1 - \sqrt{\varepsilon}) \sum C(G_{T^m f}) \}$$

とすれば, $C_f \subset G_1$ について

$$\int_{(G_1 - E_m) \cap C_f} d\delta_{C_f}(y) = \sum_{G_{T^m f} \subset (G_1 - E_m) \cap C_f} \int_{G_{T^m f}} d\delta_{C_f}(y)$$

$$\leq \sum_{G_{T^m f} \subset (G_1 - E_m) \cap C_f} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \int_{G_{T^m f} \cap (V_1 - G(P_0, P_0))} d\delta_{C_f}(y) \quad (E_m \text{ の定義})$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{C_f \cap (V_1 - G(P_0, P_0))} d\delta_{C_f}(y) \leq \sqrt{\varepsilon} \sum(C_f) \quad (d_1)$$

G_1 上に新しい測度 μ_1 を, $A \subset G_1$

$$\mu_1(A) = \int_{P_0} \int_{G_1} d\mu(x) \int_{A \cap C_f(x)} \frac{1}{P_f(y)} d\mu(y | C_f(x)) = \int_{P_0} \int_{G_1} d\mu(x) \int_{A \cap C_f(x)} d\delta_{C_f}(y)$$

を導入すれば, 測度 μ と μ_1 は同値である。

$$\mu_1(G_1 - E_m) \leq \int_{G_1} \sqrt{\varepsilon} \sum(C_f(x)) d\mu(x) < \sqrt{\varepsilon} \mu(V_1)$$

故に $\mu(G_1 - E_m) < \varepsilon$

• エルゴード定理より,

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log \Delta(T^i y) \longrightarrow \int \log \Delta(y) d\mu(y) = R \quad \text{a.e. } y$$

$\varepsilon > 0$ に対して $m(\varepsilon)$ と集合 F が存在して,

$$\mu(F) > 1 - \varepsilon$$

$$2^{-m(R+\varepsilon)} \leq \frac{1}{\Delta(Ty) \cdots \Delta(T^m y)} \leq 2^{-m(R-\varepsilon)}, \quad y \in F, m > m(\varepsilon)$$

$$\left(\begin{array}{l} R = \infty \text{ のときは, 任意の } N \text{ に対して, } \mu(F) > 1 - \frac{1}{N} \\ 0 \leq \frac{1}{\Delta(Ty) \cdots \Delta(T^m y)} \leq 2^{-mN}, \quad y \in F, m > m(N) \end{array} \right)$$

$$\bullet \quad F_1 = \{x \in V_1; \mu(F | C_S(x)) > 1 - \sqrt{\varepsilon}\} \in \mathcal{T}_{V_1}(S)$$

$$\text{とすれば, } \mu(F_1) > \mu(V_1)(1 - \sqrt{\varepsilon})$$

$$L_m = E_m \cap T^m G_1 \cap T^m F_1 \text{ とすると, } a > 0 \text{ と } \mu(L_m) > a$$

なる無限に多くの m がある。即ち無限に多くの L_m にはいるよ

うな点の集合は正測度である。

$x \in L_m$ について,

$$\mu(C_{T^m S}(x) | C_S(x)) = \int_{C_{T^m S}(x)} P_S(y) d\sigma_{C_S(x)}(y)$$

$$\geq \int_{C_{T^m S}(x) \cap G(P_0, P_0)} P_S(y) d\sigma_{C_S(x)}(y) \geq P_0(1 - \sqrt{\varepsilon}) \sum(C_{T^m S}(x))$$

$$\sum(C_{T^m S}(x)) = \int_{C_{T^m S}(x) | C_S(x)} d\sigma(y) = \int_{T^{-m} C_{T^m S}(x) | C_S(T^{-m}x)} d\sigma(T^{-m}y)$$

$$= \int_{T^{-m} C_{T^m S}(x)} \frac{1}{\Delta(Ty) \cdots \Delta(T^m y)} d\sigma_{C_S(T^{-m}x)}(y)$$

$$= \int_{T^{-m} C_{T^m S}(x)} \frac{1}{P_S(y)} \cdot \frac{1}{\Delta(Ty) \cdots \Delta(T^m y)} P_S(y) d\sigma_{C_S(T^{-m}x)}(y)$$

$$\geq \int_{T^{-m} C_{T^m S}(x) \cap G(P_0, P_0) \cap F} \frac{1}{P_S(y)} \cdot \frac{1}{\Delta(Ty) \cdots \Delta(T^m y)} d\mu(y | C_S(T^{-m}x))$$

$$\geq \frac{1}{P_0} 2^{-m(R+\varepsilon)} \mu(G(P_0, P_0) \cap F | C_S(T^{-m}x))$$

$$\geq \frac{1 - \sqrt{\varepsilon} - \varepsilon}{P_0} 2^{-m(R+\varepsilon)}$$

故に

$$-\frac{1}{m} \log \mu(C_{T^m S}(x) | C_S(x))$$

$$\leq \frac{-\log P_0 - \log(1-\sqrt{\varepsilon}) + \log P_0 - \log(1-\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon)}{m} + R + \varepsilon$$

$$m \rightarrow \infty \text{ とすれば } H(TS | S) \leq R + \varepsilon$$

$$\varepsilon \downarrow 0 \text{ とすれば } H(TS | S) \leq R$$

$$4^\circ H_m = \{x \in V_1 ; \mu(G(p_0, p_0) \cap T^m F | C_{T^m S}(x)) > 1 - \sqrt{\varepsilon}\}$$

$$\text{とすれば } \mu(H_m) > \mu(V_1)(1 - \sqrt{\varepsilon})$$

$$I_m = H_m \cap T^m G_1 \text{ とすると } \varepsilon > 0 \text{ と } \mu(I_m) > \varepsilon$$

なる無限に多くの m がある。即ち無限に多くの I_m にはいるような点の集合は正測度である。

$x \in I_m$ について,

$$\mu(C_{T^m S}(x) | C_S(x)) = \frac{\mu(G \cap T^m F \cap C_{T^m S}(x) | C_S(x))}{\mu(G \cap T^m F | C_{T^m S}(x))}$$

$$\leq \frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon}} \int_{G(p_0, p_0) \cap T^m F \cap C_{T^m S}(x)} P_S(y) d\sigma_{C_S(x)}(y)$$

$$\leq \frac{P_0}{1 - \sqrt{\varepsilon}} \int_{G(p_0, p_0) \cap T^m F \cap C_{T^m S}(x)} d\sigma_{C_S(x)}(y)$$

$$\int_{G(p_0, p_0) \cap T^m F \cap C_{T^m S}(x)} d\sigma_{C_S(x)}(y) = \int_{T^m G(p_0, p_0) \cap F \cap T^m C_{T^m S}(x)} d\sigma_{C_S(T^m x)}(z)$$

$$= \int_{T^m G(p_0, p_0) \cap F \cap C_S(T^m x)} \frac{1}{\Delta(Tz) \cdots \Delta(T^m z)} d\sigma_{C_S(T^m x)}(z)$$

$$\leq 2^{-m(R-\varepsilon)} \sum(C_S(T^m x)) \leq 2^{-m(R-\varepsilon)} P_0$$

故に.

$$-\frac{1}{m} \log \mu(C_{T^m S}(x) | C_S(x))$$

$$\geq \frac{-2 \log P_0 + \log(1-\sqrt{\varepsilon})}{m} + h - \varepsilon$$

$$m \rightarrow \infty \text{ とすれば } H(TS|S) \geq h - \varepsilon$$

$$\varepsilon \downarrow 0 \text{ とすれば } H(TS|S) \geq h \quad \lrcorner$$

定理 3F エルゴード性をもつ flow $\{S_t\}$ が拡大している transversal field Z_1 をもてば、ほとんどすべての要素が Z のファイバーの南連結部分集合であるような可測分割 \mathcal{S} で次の性質をみたすものがある。

$$0) \quad S_t \mathcal{S} > \mathcal{S} \quad \text{for } \forall t > 0$$

$$1) \quad \prod_t S_t \mathcal{S} = \mathcal{E}$$

$$2) \quad \bigcap_t S_t \mathcal{S} = U_{Z_1}$$

$$3) \quad H(S_t \mathcal{S} | \mathcal{S}) = t h \log_2 e \quad \text{但し } h = \int \alpha(x) d\mu(x)$$

証明 1° 分割 \mathcal{S} の作り方

可測集合 U を次のように選ぶ。

1. U には $\widehat{Z}_1 = Z_1 \cap Z$ の局所ファイバーで

$$C_{\widehat{Z}_1} = \bigcup_{0 \leq t \leq \tau} S_t C_{Z_1}, \quad \tau = \tau(C_{Z_1}), \quad C_{Z_1} \text{ は } Z_1 \text{ の局所ファイバー.}$$

の形をしたものからなる可測分割がある。

$$2. \quad \alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 \quad \text{for } x \in U$$

U の部分集合 V を次のように選ぶ。

1. Z の V に含まれる局所ファイバーは、それを含み、 U に含まれる局所ファイバーの境界から $d_0 > 0$ 以上はなれている
2. Z の V に含まれる局所ファイバーの直径は d_0 より小さい。また V は $\frac{d_0}{4}$ 半径の球を含む。
3. V に含まれる \tilde{Z}_1 の局所ファイバーは次のような形をしている。

$$C_{\tilde{Z}_1} = \bigcup_{0 \leq t \leq \delta} S_t C_{Z_1}, \quad C_{Z_1} \text{ は } V \text{ に含まれる } Z_1 \text{ の局所ファイバー}$$

δ は $C_{\tilde{Z}_1}$ に無関係

Z_1 の局所ファイバーへの V の分割を ξ , V 上では ξ に一致し、 $M-V$ 上では退化している空間 M の分割を $\tilde{\xi}$ とあらわす。

$$S = \prod_{k \leq 0} S_{\frac{k\delta}{2}} \tilde{\xi} \quad \text{が求めるものである。}$$

2° エントロピーの計算

$$\begin{aligned} H(S_t S | S) &= \int \log_2 \Delta(t, x) d\mu(x) \\ &= \int d\mu(x) \int_0^t \alpha(S_\tau x) d\tau \cdot \log_2 e \\ &= \int_0^t d\tau \int \alpha(S_\tau x) d\mu(x) \cdot \log_2 e \\ &= t \int \alpha(x) d\mu(x) \cdot \log_2 e \end{aligned}$$

§ 11. transversal field の metrical transitivity と K-system.

定理 4A automorphism T が拡大している transversal field Z_1 と縮小している transversal field Z_2 をもち、

1) Z_1 は Z_2 に関して絶対連続

且つ 2) Z_2 は Z_1 に関して絶対連続

ならば, $U_{Z_1} = U_{Z_2} = U$.

結果 定理4A の条件のもとで定理3A の分割 \mathcal{S} は T が K -system であることを与える分割となっている。

単に T が K -system であるためには定理4A の条件 1) 又は 2) のどちらかがいえればよい。

定理4F flow $\{S_t\}$ が拡大している transversal field Z_1 と縮小している transversal field Z_2 をもち,

1) \widetilde{Z}_1 は Z_2 に関して絶対連続

且つ 2) \widetilde{Z}_2 は Z_1 に関して絶対連続

であれば, $U_{Z_1} = U_{Z_2}$

定理5F flow $\{S_t\}$ の transversal field Z_1, Z_2 について,

3) Z_1 と Z_2 が非可積分

4) $U_{Z_1} = U_{Z_2}$

であれば, $U_{Z_1} = U_{Z_2} = U_{\widetilde{Z}_1} = U_{\widetilde{Z}_2}$

結果 定理4F, 5F の条件 1) 2) 3) のもとで, 定理3F の分割 \mathcal{S} は $\{S_t\}$ が K -system であることを与える分割となっている。

§13. automorphism の 1 次元 transversal field

抽象ルベーク空間を M とし, その上に automorphism T が定義されているとする.

定義 M の可測変換の一変数群 $\{Z_u\}$ が *admissible* とは.

1) 空間 M の群 $\{Z_u\}$ に対し正則な分割が存在する. 即ちほとんどすべての要素が群 $\{Z_u\}$ の軌道の半開区間であるような可測分割で, 分割の時間的長さが可測函数であるもの.

2) 空間 M の任意の正則分割 ξ に対し, 定数 $0 < c \leq C < \infty$ が存在し, 分割の要素 $C_\xi = \{Z_u x; a \leq x < a+\epsilon\}$ について,

$$\mu(A | C_\xi) = \int_{A \cap C_\xi} f(u | C_\xi) du$$

ここに密度は $c \leq f(u | C_\xi) \leq C$ をみたすとする.

特に $\{Z_u\}$ が力学系即ち不変測度をもつときは *admissible* であり, このとき $c = C = 1$ となる.

定義 *admissible group* $\{Z_u\}$ が T の *transversal field* とは,

1) $\{Z_u\}$ の軌道は T によって $\{Z_u\}$ の軌道にうつる

$$2) T^{-1} Z_u x = Z_{\bar{u}} T^{-1} x$$

をみたす函数 $\bar{u} = \bar{u}(u, x)$ に対し, 次の極限がほとんどいたるところ存在し, x の可測函数になる.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\bar{u}(u, x)}{u} = \lambda(x)$$

$\lambda(x) > 1, < 1$ により拡大, 縮少を定義する。

定理3A と同様の定理がなり立つ。

Compact abelian group 上の automorphism について, transversal field の存在するための条件を与える。

\mathcal{A} 可算公理をみたす compact abelian group を M とし, M 上の群としての自己同型写像を T とする。 T は M 上の Haar 測度 μ を不変にする。

G を M の character group とする (離散群になる), T に共役な G の自己同型写像を T^* と表わす。

$\{a_u\}$ を M の 1 至数部分群とする。 即ち $a_{u+v} = a_u + a_v$

$\{a_u\}$ が T に関する固有部分群であるとは, $T^{-1}a_u = a_{\lambda u}$ をみたす λ が存在することをいう。

$\{a_u\}$ により導かれる M の 1 至数変換群を $\{Z_u\}$ とする。

$$\text{即ち } Z_u x = x + a_u$$

lemma T に関する固有部分群 $\{Z_u\}$ により導かれる変換群

$\{Z_u\}$ は T の transversal field をなす。

証明 $T^{-1}Z_u x = T^{-1}(x + a_u) = T^{-1}x + T^{-1}a_u$
 $= T^{-1}x + a_{\lambda u} = Z_{\lambda u} T^{-1}x$
 $\bar{u} = \lambda u \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\bar{u}}{u} = \lambda \quad \lrcorner$

定理 群 G の実数の加法群 \mathbb{R}^1 への isomorphic imbedding $\varphi(\cdot)$ で, $\varphi(T^*g) = \frac{1}{\lambda} \varphi(g)$ をみたすものが存在すれば T は transversal field をもつ

証明 $a_u(g) = \exp(iu\varphi(g))$ とする.

1) $a_u(\cdot)$ は G から複素数群 \mathbb{C}^\wedge の準同型写像

2) $|a_u(g)| = 1$ 3) $\{a_u(\cdot)\}$ は 1 至数群

だから a_u は M の 1 至数群と考えられる.

$$(Ta_{\lambda u}, g) = (a_{\lambda u}, T^*g) = \exp[i\lambda u\varphi(T^*g)] \\ = \exp[iu\varphi(g)] = (a_u, g)$$

故に $Ta_{\lambda u} = a_u, \quad T^{-1}a_u = a_{\lambda u}$

即ち $\{a_u\}$ は T に関する固有部分群である. \lrcorner

2次元 torus の場合

$$M = \mathbb{T}^2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; 0 \leq x, y < 1 \right\}$$

$$T : \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij} \text{ は整数} \\ \det \alpha = 1$$

α の固有値を λ, λ' とすると. $\lambda\lambda' = 1$. 1 の根が固有値でないこと即ち λ, λ' が実数値であることを仮定する.

$$\alpha \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad \alpha \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix}$$

$$G = \left\{ N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} ; n_1, n_2 \text{ は整数} \right\}$$

$$T^* ; \alpha^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$$(TX, N) = (\alpha X)^* N = X^* \alpha^* N = (X, \alpha^* N) = (X, T^* N)$$

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = n_1 \gamma_1 + n_2 \gamma_2$$

とすれば, φ は G から \mathbb{R}^1 の isomorphic imbedding であり,

$$\varphi(T^* \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}^* \alpha^* \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \lambda \varphi \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\langle a_u, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \rangle = \frac{i u \varphi \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \right)}{2\pi i} = \frac{u}{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \left[\frac{u}{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \right]$$

故に, $a_u = \frac{u}{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$

$$Z u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{u}{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

┘