数理解析研究所講究録
21巻 1967年 1-19

Homotopy groups of Lie groups

京大 理　戸田 宏
三村 護
今西 英器
名大 理　可知 偉行

この稿は上記表題による戸田の,「Homotopy groups of classical groups (p-components)」と題する今西の,および「Homotopy groups of exceptional groups」と題する三村,可知の講演をまとめたものである。

リー群のホモトピー群を求める問題は単連結な単純リー群のそれを求める問題に帰着される。このとき,一般的手段として次の三種の方法が考えられる。

(A)　バンドルのホモトピー完全系列を用いて球面のホモトピー群の結果から計算する.

(B)　典型群の安定ホモトピー群より(A)の方法または,Stiefel多様体のホモトピー群を用いて計算する。

(C)　コホモロジー構造をもとゝしていわゆる"killing

method" を用いる。

第一の方法(A) はとくに rank の低い Lie 群に対して有効であり，[20]，[21]，[19] 等に使われている。方法(B) は，[23] に始まり，[18] およびその一般化である [13] に見られる。方法(C) は [26]，[19]，[14] に用いられている。これらの方法は互に独立ではなく適当に綜合して用いられること勿論である。とにく例外群 G の $\pi_{14}(G)$ を求めるときはこれらの間の関連が十分に活用されることは後に見られる通りである。

I. 典型群のホモトピー群 （今西 [13]）

バンドル $SU(n+k+1)/SU(n)$ に関するホモトピー完全系列に Bott の週期性 $\pi_{2n+2k}(SU(n+k+1))=0$, $\pi_{2n+2k-1}(SU(n+k+1))\approx Z$, および $\pi_{2n+2k-1}(U(n))$ の有限性を用いれば次の同型をうる。

$$\partial:\ \pi_{2n+2k}(SU(n+k+1)/SU(n))\xrightarrow{\approx}\pi_{2n+2k-1}(SU(n))$$

James [15] の一般化された Freudental-Serre の懸垂定理によれば p- 成分を考えるときは $k<(n+1)(p-1)$ の制限の下にこの同型の左辺の n を $n+2N\cdot b_{k+1}$ におきかえることができる。すなわち，この場合 n は k に比して十分大にとることができる。（この n の変更は，後に述べる定理の型から本質的でないことが知られる）。 横田の胞体分割 [28] によって，

$SU(n+k+1)/SU(n)$ は $S(CP(n+k))/CP(n-1)$ におきかえることができる。したがって(以後，n は k に比して十分大とする)

$$\pi_{2n+2k-1}(SU(n)) \approx \pi_{2n+2k-1}(CP(n+k)/CP(n-1))$$

こゝでさらに $k < p^2-2$ とするとき，球面の p-成分に関する結果によって [illegible]，$CP(n+k)/CP(n-1) = S^{2n} \cup e^{2n+2} \cup \cdots \cup e^{2n+2k}$ の胞体のうち $2n+2k-2i(p-1)$ 次元の胞体のみが essential である．すなわち，$n+k = n+l+t(p-1)$ $0 \leqq l \leqq p-2$，とおくとき complex $X^{0,t}_{n+l} = S^{2n+2l} \cup e^{2n+2l+2(p-1)} \cup \cdots \cup e^{2n+2k}$ と連続写像 f；$CP(n+k)/CP(n-1) \longrightarrow X^{0,t}_{n+l}$ があって，f^*；$H^*(X^{0,t}_{n+l}; Z_p) \longrightarrow H^*(CP(n+k)/CP(n-1); Z_p)$ は単射，f_*；$\pi_{2n+2k-1}(CP(n+k)/CP(n-1)) \longrightarrow \pi_{2n+2k-1}(X^{0,t}_{n+l})$ は p-成分の同型である。かくして，問題は $X^{0,t}_{n+l}$ の形の胞複体の構造に帰着される。そのためには [1],[28] の方法によって $X^{0,t}_{n+l}$ における，Chern character を知れば十分であることがわかる。さらに $X^{0,t}_{n+l}$ の Chern character は $CP(n+k)/CP(n-1)$ のそれより知られる。$\tilde{K}(CP(n+k)/CP(n-1)) \subset \tilde{K}(CP(n+k)) = Z[\xi]/(\xi^{n+k+1})$ の生成元 ξ の chern character は $ch(\xi) = e^x - 1$ で与えられる。こゝで，次のような補題を用意する。

補題 (i) $$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(e^x-1)^i = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{p}\right)^k \frac{(kp)!}{k!(kp-k+1)!}x^{kp-k+1}$$

で定まる有理数 a_i の分母は $i<p^2$ のとき，p と素である。

(ii) $$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{p}\right)^i \frac{(ip)!}{i!(ip-i+1)!}x^{ip-i+1}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{p}\right)^k \frac{n(n+kp-1)!}{k!(n+kp-k)!}x^{k(p-1)+n}$$

実際には $X_{n+l}^{0,t}$ の最高次元の胞体の接着写像の類の位数を上の補題を用いて求めることによって $\pi_{2n+2k-1}(CP(n+k)/CP(n-1))$ の p-成分が求められる。$\pi_{2n+2k}(SU(n))$, $\pi_i(Sp(n))$ 等はこれらの考察から比較的容易に求めることができる。その結果は以下の通りである。

整数 q を素因数分解したときの p の巾を $\nu_p(q)$ とかく。整数 n, k に対して $N(n,k)$, $N'(n,k)$ を次の様に定義する。$t=\left[\frac{k}{p-1}\right]$ とおく。$n+k=q-i$, $q\equiv 0 \pmod p$, $1\leq i\leq p$ とするとき，

$$N(n,k)=\begin{cases} 0 & i>t \\ \mathrm{Min}(\nu_p(q),\ t-i+1) & i\leq t,\ t<p \\ \mathrm{Min}(\nu_p(q)-1,\ p) & i=1,\ t<p \\ \mathrm{Min}(\nu_p(q),\ p-i+2) & i\neq 1,\ p\ \&\ t=p \\ \mathrm{Min}(\nu_p(q-p^2),\ 2) & i=t=p \end{cases}$$

$$N'(n,k) = \begin{cases} \nu_p((n+k)!) - t + N(n,k), & i<p \text{ or } t=p,\ i=1 \\ \nu_p((n+k)!) - p - 1 + N(n,k) & t=p,\ i \neq 1. \end{cases}$$

このとき次の定理が成り立つ。（${}^p\pi$ は π の p-成分）

定理1. $0<k<p^2-1$, $k<(n+1)(p-1)$ とするとき

$$ {}^p\pi_{2n+2k-1}(SU(n)) \approx \begin{cases} Z_{p^{N(n,k)}} & , k<p^2-2 \text{ or } n \not\equiv 0\ (p) \\ Z_{p^{N(n,k)}} + Z_p, & k=p^2-2,\ n\equiv 0\ (p) \end{cases}$$

$0<k<p^2-1$, $k<(n+1)(p-1)-1$ とするとき

$$ {}^p\pi_{2n+2k}(SU(n)) \approx \begin{cases} Z_{p^{N'(n,k)}} & , \begin{cases} k<p(p-1)-1, \text{ or } k=p^2-1 \\ \text{or } n+k\equiv -2\ (p) \end{cases} \\ Z_{p^{N'(n,k)}} + Z_p, & \begin{cases} p(p-1)-1 \leq k < p^2-2, \\ n+k \not\equiv -2\ (p) \end{cases} \end{cases}$$

定理2. $k<\dfrac{p^2-1}{2}$ とする。

$k \leq (n+1)(p-1)$ のとき ${}^p\pi_{4n+4k-1}(Sp(n)) = 0$,

$k<(n+1)(p-1)$ のとき

$$ {}^p\pi_{4n+4k}(Sp(n)) \approx \begin{cases} 0 & , 2k<p(p-1) \text{ or } n+k \not\equiv -1\ (p), \\ Z_p, & 2k=p(p-1),\ n+k \not\equiv -1\ (p) \end{cases}$$

$k<(n+1)(p-1)$ のとき

$$ {}^p\pi_{4n+4k+1}(Sp(n)) \approx Z_{p^{N(2n+1,2k)}}$$

$k<(n+1)(p-1)$ のとき

$$ {}^p\pi_{4n+4k+2}(Sp(n)) \approx Z_{p^{N'(2n+1,2k)}}$$

尚, ${}^p\pi_i(SO(2n+1)) \approx {}^p\pi_i(Sp(n))$, ${}^p\pi_i(SO(2n)) \approx$

$\approx {}^p\pi_i(SO(2n-1)) + {}^p\pi_i(S^{2n-1})$ [12] であるから典型群のホモトピー群の p 成分はかなりの所まで明らかになった。上の定理における制限 $k<p^2-1$ を取り除くことは，こゝで述べた方法では多くの困難を伴なう。

II. 例外リー群 G におけるコホモロジー作用素.

G に killing method を適用するとき，まず必要なことはそのコホモロジー構造，とくに $\mathcal{P}^i$- 作用素の構造である。

一般に単連結な結合的 H- 空間 X について $H^*(X;Z_p)=\Lambda(x_1,\cdots,x_\ell)$ がなりたつならば，次の Clark の定理 [11] がある。

(a) $2n_i-1$ を x_i の次元とするとき，$n_i \not\equiv 0\ (p)$ ならば，$n_j\equiv 1-p\ (\mathrm{mod}\ n_i)$ なる j がある。

証明は，X の分類空間 B_X について $H^*(B_X;Z_p)=Z_p[y_1,\cdots,y_\ell]$ $\dim y_i=2n_i$ であるからそれに対する $\mathcal{P}^i$ の作用，$y_i^p=\mathcal{P}^{n_i}y_i$ および Adem の関係式を用いてえられる。この証明を検討すれば次のことがわかる。

(b) (a) の場合の n_j がただ一つ，かつ $n_j<n_i$ ならば，$n_j=n_i+1-p$ かつ $\mathcal{P}^1x_i=x_j$ (適当な底のおきかえによって) である。

(c) (a) における n_j がただ一つでない場合でも，特定の n_j

を除く $n_k \equiv 1-p\ (n_i)$ について $x_k = \mathcal{P}^1 x_l$ なる l があるならば，$\mathcal{P}^1 x_i = x_j$.

これを例外群（p-torsion のない場合）に適用する。

$H^*(G_2;Z_p) = \Lambda(x_3, x_{11})$, $p \geq 3$

$H^*(F_4;Z_p) = \Lambda(x_3, x_{11}, x_{15}, x_{23})$, $p \geq 5$

$H^*(E_6;Z_p) = \Lambda(x_3, x_9, x_{11}, x_{15}, x_{17}, x_{23})$, $p \geqq 5$,

$H^*(E_7;Z_p) = \Lambda(x_3, x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{23}, x_{27}, x_{35})$, $p \geqq 5$,

$H^*(E_8;Z_p) = \Lambda(x_3, x_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{35}, x_{39}, x_{47}, x_{59})$, $p \geqq 7$.

こゝで $\dim x_t = t$ とあらわした。

この結果，次の命題(*)の成立が予想される。

(*)　x_s, x_t について $\mathcal{P}^1 x_s = x_t$（0 でない係数を除いて）となるための必要かつ十分な条件は $t-s = 2(p-1)$ かつ $s-1 \neq 2p$ なることである。

たとえば，x_{2p+1} があれば $\mathcal{P}^1 x_3 = x_{2p+1}$，したがって $\mathcal{P}^1 x_{2p+1} = 0$ となる。但し上の (b), (c) では，次の各場合に(*)の成立がいえない：

E_7 における (x_3, x_{2p+1}), $p = 5, 7, 11$ (x_{11}, x_{23}), $p = 7$

E_8 における (x_3, x_{2p+1}), $p = 13, 17$, (x_{23}, x_{35}), $p = 7$

こゝで E_7 の場合は [9] をうまく使えば (*) の成立がいえる。また E_8 においても同様な方法が適用されるかと想像されるがよくは解っていない。E_8 における最後のものについて

(i)の成立することはSteenrod作用素の構造をくわしく調べて知ることができる。(何れにしても，我々の必要とする範囲の$\mathcal{P}^1$は定まる。)

p-torsionのない場合に$\mathcal{P}^1$の構造が解れば，π_3をkillingすることができる。その結果において再び$\mathcal{P}^1$の構造が問題となるがこれは二次的作用素の問題となる。Gのπ_3をkillしたものを$\widehat{G}$とすれば，$B_{\widehat{G}}$としてB_Gのπ_4をkillしたもをとることが出来て，上の(a)，(b)，(c)の結果を適用することができる。(詳細は略する)．

次にp-torsionのある場合は，荒木[3]，[4]，荒木-四方[5]の結果でかなりのことが解っている。こゝでは一つの問題点である$H^*(E_7;Z_3)$について述べる。[3]によれば

$$H^*(E_7;Z_3) = Z_3[x_8]/(x_8^3) \otimes \Lambda(x_3, x_7, x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{27}, x_{35}), \quad \mathcal{P}^1 x_3 = x_7, \quad \delta x_7 = x_8.$$

である。これをkillするには$\mathcal{P}^3\mathcal{P}^1 x_3$が0か否かを決定する必要がある。そのため一応$\mathcal{P}^3\mathcal{P}^1 x_3 = 0$と仮定してkillingすると，

$$H^*(\widetilde{E}_7;Z_3) = Z_3[y_{18}] \otimes \Lambda(x_{11}, x_{15}, x_{19}, y_{19}, y_{23}, x_{27}, x_{35})$$

となり，$\delta y_{18} = y_{19}$，$\mathcal{P}^1 y_{19} = y_{23}$が成立する。従って

$$H^*(B\widetilde{E}_7;Z_3) = Z_3[x_{12}, x_{16}, x_{20}, y_{20}, y_{24}, x_{36}, \delta\mathcal{P}^9 y_{19}, \cdots] \otimes \Lambda(y_{19}, \mathcal{P}^9 y_{19}, \cdots)$$

となる。こゝで $\delta y_{19} = y_{20}$, $\wp^1 y_{20} = y_{24}$. でさ $0 \neq x_{28}^3 = -\wp^1\wp^{13} x_{28}$ を考えるとき，次元の関係から $\wp^{13} x_{28}$ は $\pm x_{28}^2 \cdot y_{24}$ を含みかつ Cartan の公式から $\wp^1 y_{24} = a \cdot x_{28} + b \cdot x_{12} \cdot x_{16}$ $(a \neq 0)$ でなければならぬことがわかる。一方 $0 \neq \wp^1 y_{24} = \wp^1\wp^1 y_{20} = \wp^1\wp^1\delta y_{19} = -(\delta\wp^1 + \wp^1\delta)\wp^1 y_{19}$ かつ $\wp^1 y_{19} = 0$（次元の関係より）だから矛盾となる。以上から $\wp^3\wp^1 x_3 \neq 0$，これは primitive であるから $\wp^3\wp^1 x_3 = \pm x_{19}$ をうる。killing すれば

$$H^*(\hat{E}_7; Z_3) = Z_3[y_{54}] \otimes \Lambda(x_{11}, x_{15}, y_{19}, y_{23}, x_{27}, x_{35}, y_{55})$$

が正しい結果で，$\wp^1 x_{11} = x_{15}$，$\wp^1 y_{19} = y_{23}$，$\wp^1 y_{23} = x_{27}$ が成立する。

III. 例外リー群のホモトピー群

リー群のホモトピー群を考えるとき，忘れてはならないのは，次の Serre-Kumpel [16],[22] の定理である。G をコンパクト，単純，1連結のリー群とするとき，Hopf によれば，$H^*(G; R) = \Lambda(x_{n_1}, \cdots, x_{n_l})$ 但し $\deg x_{n_i} = n_i$ (odd)，$1 \leqq i \leqq l$，$l = \mathrm{rank}\, G$，$n = \dim G = \sum_{i=1}^{l} n_i$．

今，$X(G) = S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_l}$ とおくとき，素数 p が G に対して regular であるとは，写像 f ; $X(G) \longrightarrow G$ が存在し

て，すべての i につき $f_* ; H_i(X(G);Z_p) \cong H_i(G;Z_p)$ となる事である。$N(G) = (\dim G/\operatorname{rank} G) - 1$ とおくとき，次の定理が成立つ。

" G に対して p が regular であるための必要十分条件は，$p \geqq N(G)$，従ってこのときすべての i につき，

$$ {}^p\pi_i(G) \cong {}^p\pi_i(X(G)) $$ "

G が例外リー群のとき，N の値は

G	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
$N(G)$	6	12	12	18	30

以下，例外リー群のホモトピー群の p-成分（$p < N(G)$）を方法(A),(C) によって計算する。

G の π_3 を kill したものを $\tilde{G}$ と書くとき，これに関連して二つの fibring がある；

$$ K(Z,2) \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G $$
$$ \tilde{G} \longrightarrow G' \longrightarrow K(Z,3) $$

但し，G' は G と同じホモトピー型をもつ。$\tilde{G}$ の Z_p-コホモロジー群およびそこにおける Steenrod 作用素は，上記の二つの fibring に関するスペクトル列の計算，$H^*(G;Z_p)$ での関係および II で述べた方法によりえられ，それらは例外リー群での場合次のようになる。

$H^*(\tilde{G}_2; Z_2) \cong Z_2[y_8] \otimes \Lambda(Sq^1 y_8, Sq^2 Sq^1 y_8)$

$H^*(\tilde{G}_2; Z_5) \cong Z_5[y_{50}] \otimes \Lambda(y_{11}, \delta y_{50})$

$H^*(\tilde{G}_2; Z_p) \cong Z_p[y_{2p}] \otimes \Lambda(y_{11}, \delta y_{2p})$　p；素数 $\neq 2, 5$.

ロ)

$H^*(\tilde{F}_4; Z_2) \cong Z_2[y_8] \otimes \Lambda(Sq^1 y_8, Sq^2 Sq^1 y_8, x_{15}, Sq^8 x_{15})$

$H^*(\tilde{F}_4; Z_3) \cong Z_3[y_{18}] \otimes \Lambda(y_{11}, \mathcal{P}^1 y_{11}, \delta y_{18}, \mathcal{P}^1 \delta y_{18})$

但し, $\mathcal{P}^2 y_{11} = \mathcal{P}^3 y_{11} = 0$

$H^*(\tilde{F}_4; Z_p) \cong Z_p[y_{2p^2}] \otimes \Lambda(x_{11}, x_{15}, x_{23}, \delta y_{2p^2})$ for

$p = 5, 7, 11$. 但し, $\mathcal{P}^1_5 x_{15} = x_{23}$, $\mathcal{P}^1_7 x_{11} = x_{23}$

$H^*(\tilde{F}_4; Z_p) \cong Z_p[y_{2p}] \otimes \Lambda(x_{11}, x_{15}, x_{23}, \delta y_{2p})$ for $p \geq 13$.

ハ)

$H^*(\hat{E}_6; Z_2) \cong Z_2[y_{32}] \otimes \Lambda(y_9, Sq^2 y_9, Sq^4 Sq^2 y_9, Sq^8 y_9,$

$Sq^8 Sq^4 Sq^2 y_9, Sq^1 y_{32})$

$H^*(\hat{E}_6; Z_3) \cong Z_3[y_{18}] \otimes \Lambda(x_9, x_{11}, \mathcal{P}^1 x_{11}, x_{17}, \delta y_{18}, \mathcal{P}^1 \delta y_{18})$

但し, $\Phi x_9 = x_{17}$, Φ；二次作用素.

$H^*(\tilde{E}_6; Z_5) \cong Z_5[y_{50}] \otimes \Lambda(x_9, y_{11}, x_{15}, \mathcal{P}^1 x_9, \mathcal{P}^1 x_{15}, \delta y_{50})$

$H^*(\hat{E}_6; Z_7) \cong Z_7[y_{98}] \otimes \Lambda(x_9, x_{11}, y_{15}, x_{17}, \mathcal{P}^1 x_{11}, \delta y_{98})$

$H^*(\tilde{E}_6; Z_{11}) \cong Z_{11}[y_{242}] \otimes \Lambda(x_5, x_{11}, x_{15}, x_{17}, y_{23}, \delta y_{242})$

ニ)

$H^*(\tilde{E}_7; Z_2) \cong Z_2[y_{32}] \otimes \Lambda(y_{11}, Sq^4 y_{11}, Sq^8 y_{11}, Sq^8 Sq^4 y_{11},$

$Sq^4Sq^8Sq^4 y_{11},\ Sq^1 y_{32},\ y_{35})$

$H^*(\tilde{E}_7; Z_3) \cong Z_3[y_{54}] \otimes \Lambda(x_{11}, \mathcal{P}^1 x_{11}, y_{19}, \mathcal{P}^1 y_{19}, \mathcal{P}^2 y_{19},$
$x_{35}, \delta y_{54})$

$H^*(\hat{E}_7; Z_5) \cong Z_5[y_{50}] \otimes \Lambda(y_{11}, x_{15}, x_{19}, \mathcal{P}^1 x_{15}, \mathcal{P}^1 x_{19}, \mathcal{P}^2 x_{19}$
$, \delta y_{50})$

$H^*(\hat{E}_7; Z_7) \cong Z_7[y_{98}] \otimes \Lambda(y_{15}, x_{11}, \mathcal{P}^1 x_{11}, x_{19}, x_{27}, \mathcal{P}^2 x_{11}$
$, \delta y_{98})$

$H^*(\tilde{E}_7; Z_{11}) \cong Z_{11}[y_{242}] \otimes \Lambda(x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{27}, \mathcal{P}^1 x_{15}, y_{23}$
$, \delta y_{242})$

$H^*(\tilde{E}_7; Z_{13}) \cong Z_{13}[y_{338}] \otimes \Lambda(x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{23}, y_{27}, \mathcal{P}^1 x_{11}$
$, \delta y_{338})$

$H^*(\hat{E}_7; Z_{17}) \cong Z_{17}[y_{578}] \otimes \Lambda(x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{23}, x_{27}, y_{35}$
$, \delta y_{578})$.

ホ)

$H^*(\tilde{E}_8; Z_2) \cong Z_2[x_{15}, y_{32}]/(x_{15}^4) \otimes \Lambda(Sq^8 x_{15}, Sq^4Sq^8 x_{15}$
$, Sq^2Sq^4Sq^8 x_{15}, \delta y_{32}, y_{35}, y_{47})$

$H^*(\hat{E}_8; Z_3) \cong Z_3[y_{54}] \otimes \Lambda(x_{15}, y_{23}, \mathcal{P}^3 x_{15} = \mathcal{P}^1 y_{23}, x_{35},$
$, x_{39}, x_{47}, y_{59}, \delta y_{59})$ 但し，$\Phi x_{15} = y_{23}$.

$H^*(\hat{E}_8; Z_5) \cong Z_5[y_{50}] \otimes \Lambda(x_{15}, \delta x_{15}, x_{27}, \mathcal{P}^1 x_{27}, x_{39},$
$, \mathcal{P}^1 x_{39}, \delta y_{50}, y_{59})$

$H^*(\hat{E}_8; Z_7) \cong Z_7[y_{98}] \otimes \Lambda(y_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{35}, \mathcal{P}^1 x_{27}, \mathcal{P}^1 x_{35}$

$\wp^2 x_{35},\ \delta y_{98})$

$H^*(\hat{E}_8 ; Z_{11}) \cong Z_{11}[y_{242}] \otimes \Lambda(x_{15}, y_{23}, x_{27}, \wp^1 x_{15}, x_{39},$
$\wp^1 x_{27}, \wp^1 x_{39}, \delta y_{242})$

$H^*(\hat{E}_8 ; Z_{13})$

$H^*(\hat{E}_8 ; Z_{17})$

$H^*(\hat{E}_8 ; Z_{19}) \cong Z_{19}[y_{721}] \otimes \Lambda(x_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{35}, y_{39}, x_{47}, \wp^1 x_{23}$
$, \delta y_{721})$

$H^*(\hat{E}_8 ; Z_{23}) \cong Z_{23}[y_{1058}] \otimes \Lambda(x_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{35}, x_{39},$
$\wp^1 x_{15}, y_{47}, \delta y_{1058})$

$H^*(\hat{E}_8 ; Z_{29}) \cong Z_{29}[y_{1682}] \otimes \Lambda(x_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{35}, x_{39}, x_{47}$
$, y_{59}, \delta y_{1682})$

こゝで，$H^*(\hat{E}_6 ; Z_2)$，$H^*(\hat{E}_7 ; Z_2)$ における関係式 $Sq^4 Sq^2 y_9 \neq 0$，$Sq^4 y_{11} \neq 0$ は $\pi_{14}(F_4) = Z_2$ という事実から帰結される。（$H^*(\hat{E}_8 ; Z_{13})$，$H^*(\hat{E}_8 ; Z_{17})$ は $\wp^1 x_3$ を決定できないから，こゝでは求められない）

さて，以上の事実より Killing method の繰返し使う事により，ホモトピー群は，${}^p\pi_i(G_2)$　$p=2, 3$，${}^2\pi_i(F_4)$ を除いて求まる（別表参照）．${}^2\pi_i(G_2)$ はバンドル $G_2/SU(2) \approx S^6$ ${}^3\pi_i(G_2)$ は $G_2/S^3 = V_{7,2}$ より適当な inducedバンドル．${}^2\pi_i(F_4)$ は F_4/G_2 に関する夫々のホモトピー完全系列より計算される。$\pi_{14}(F_4) = Z_2$ という事実は，F_4/G_2 に関するホモトピー完全系列でも本質的な役割を果す。

Homotopy groups of exceptional Lie groups $\pi_i(\ ;p)$.

(他の odd-components は考えている範囲で 0)

	$p \backslash i$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
G_2	2	2	2	0	$\infty+2$	0	0	8+2	2	2+2+2	8+2	16	2
	3	0	3	0	0	0	0	3	0	3	0	3	3
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0
	7	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_4	2	2	2	0	$\infty+2$	0	0	2	∞	2+2	2	16	2
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9+3	0
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0
E_6	2	0	∞	0	∞	4	0	0	∞	0	$\infty+2$	16+2	0
	3	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	9+3	3
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_7	2	0	0	0	∞	2	2	0	∞	2	2	4	$\infty+2$
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3 or 9	0
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5 or 0	0
E_8	2	0	0	0	0	0	0	0	8	2	2	8	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Homotopy groups of exceptional Lie groups (続き)

	p \ i	20	21	22	23	24	25	26	27	28
G_2	2	2	0	8+2	2+2+2 or 4+2					
	3	0	0	9	0					
	5	0	0	0	0					
	7	0	0	7	0					
	11	0	0	11	0					
F_4	2	0	0	0	∞+2+2 or ∞+4					
	3	0	3+3	27 or 9	0					
	5	0	0	0	0					
E_6	2	8	0	0						
	3	27	3+3	27+3 or 9+3						
	5	0	0	0						
	7	7	0	0						
E_7	2	2	2	4	∞+2+2	2+2+2	2+2			
	3	0	3	9 or 27	0	0	3			
	5	0	0	0	0	0	0			
E_8	2	0	2	0	∞+2	2+2	2	0	∞	0
	3	0	0	0	0	0	3	0	0	3
	13	0	0	0	0	0	0	13 or 0	0	0

文 献

[1] J.F. Adams, On the groups J(X)-IV. Topology 5-1 (1966), 21-71.

[2] J. Adem, The relations on Steenrod power of cohomology classes, Algebraic geometry and topology, Princeton (1957), 191-238.

[3] S. Araki. Differential Hopf algebras and the cohomology mod 3 of the compact exceptional groups E_7 and E_8, Ann. of Math. 73 (1961), 404-436.

[4] S. Araki, Cohomology mod 2 of the compact exceptional groups E_6 and E_7. J. Osaka City. Univ. 12 (1961) 43-65.

[5] S. Araki & Y. Shikata. Cohomology mod 2 of the compact exceptional group E_8, Proc. Japan, Acad. 37 (1961) 619-622.

[6] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groups de Lie compacts. Ann. of. Math. 57 (1953) 115-207.

[7] A. Borel, Sur l'homologie et la cohomology des groups de Lie compacts connexes, Amer. J. Math.

76 (1954), 273-342.

[8] R. Bott. The stable homotopy of the classical groups Ann. of Math. 70 (1959) 313-337.

[9] R. Bott & H. Samelson, Application of the theory of Morse to symmetric spaces, Amer. J. Math. 80 (1958) 964-1029.

[10] H. Cartan, Algebres d'Eilenberg-Maclane et homotopie, Seminaire Cartan. 7, 1954/55.

[11] A. Clark, On π_3 of finite dimensional H-spaces, Ann. of Math., 78 (1963), 193-196.

[12] B. Harris, On the homotopy groups of the classical groups, Ann. of Math., 74 (1961), 407-413.

[13] H. Imanishi, Unstable homotopy groups of classical groups (odd primary components) ... to appear.

[14] H. Kachi, The homotopy groups of compact Lie groups E_6, E_7, and E_8 ... to appear.

[15] I.M. James, Cross-section of Stiefel manifolds Proc. London. Math. Soc. 8 (1958) 536-547.

[16] P.G. Kumpel, Lie groups and product of spheres Proc. of Amer. Math. Soc. 16-II (1965) 1350-1356.

[17] T. Kudo, A transgression theorem, Mem. Fac. Sci Kyûshu Univ. 9 (1956) 79-81.

[18] H. Matsunaga, Unstable homotopy groups of unitary groups. Osaka J. Math. 1 (1964) 15-24.

[19] M. Mimura, Homotopy groups of Lie groups of low rank, J. Math. Kyoto Univ. 6 (1967) 131-176.

[20] M. Mimura & H. Toda, The homotopy groups of $Sp(2)$, $SU(3)$ and $SU(4)$. J. Math. Kyoto. Univ. 3 (1964), 217-250.

[21] ____________, Homotopy groups of symplectic groups. ibid. 3 (1964), 251-273.

[22] J. P. Serre, Groupes d'homotopie et classes de groupes abelians, Ann. of Math. 58 (1953) 258-294.

[23] H. Toda, A topological proof of the theorem of Bott and Borel-Hirzebruch. for homotopy groups of unitary groups. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto 32 (1959), 103-119.

[24] ______, p-primary components of homotopy groups IV, ibid 32 (1959) 297-332.

[25] ______. Composition methods in homotopy groups

of spheres, Princeton (1962)

[26] ________, On the homotopy groups of S^3-bundles over spheres, J. Math. Kyoto. Univ. 2 (1963) 193-207.

[27] ________, ホモトピー概論, 数学 15 (1964) 13-27.

[28] I. Yokota, On the homology of classical Lie groups, J. Inst. Poly. Osaka. City. Univ. 8 (1957) 93-120.