数理解析研究所講究録
22巻 1967年 127-140

超函数と定数係数偏微分方程式[1]

東大 理　　小松彦三郎

佐藤の超函数。

1958年から60年にかけて発表された一連の論文[20, 21]において佐藤幹夫は hyperfunction[2] と呼ばれる新しい広義の函数を導入した。Distribution は底空間の C^∞ 構造と密接に結びついているのに反し、hyperfunction は底空間の実解析構造と結びついている。実際、hyperfunction はいかなるパラコンパクト実解析多様体上で定義できる。しかし、ここでは簡単のためユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開部分集合上で定義されたものに限ることにする。Ω を $\mathbb{R}^n$ の中の開集合、V を Ω を相対閉集合として含むような $\mathbb{C}^n$ の中の開集合とする。このとき、Ω 上の hyperfunction の空間 $\mathcal{B}(\Omega)$ は、正則函数の層 $\mathcal{O}$ を係数とする第 n 相対コホモロジー群 $H^n_\Omega(V, \mathcal{O}) = H^n(V, V-\Omega, \mathcal{O})$ と定義される。$V-\Omega$ が開であるため、この相対コホモロジーは Godement の教科書[8]で論じられたものとは異なる。彼は $V-\Omega$ が閉である場合を考察した。事実は、佐藤[21]や Grothendieck[9] が示しているように、開集合の場合の方が理論が簡単である。

---

1. これは Conference on Generalized Functions 1966 at Katowice の講義録の翻訳である。1月17日の講義とはわずかに異なる。　2. 極超函数と訳すべきか。

佐藤[21]は次の結果を述べている。

a). $\mathcal{B}(\Omega)$ は複素近傍 V のとり方に関係しない。

b). $\mathcal{B}(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, は軟弱層（*faisceau flasque*）をなす。すなわち，$\Omega\supset\Omega'$ が二つの開集合ならば，自然な制限写像 $\varphi^{\Omega}_{\Omega'}:\mathcal{B}(\Omega)\to\mathcal{B}(\Omega')$ が定義される。もし $\Omega\supset\Omega'\supset\Omega''$ が開ならば，$\varphi^{\Omega}_{\Omega''}=\varphi^{\Omega'}_{\Omega''}\circ\varphi^{\Omega}_{\Omega'}$。Hyperfunction $f\in\mathcal{B}(\Omega)$ が零となるのは Ω の各点で局所的に零となる事と同じである。$\{\Omega_j\}$ が $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ の開被覆で，hyperfunction $f_j\in\mathcal{B}(\Omega_j)$ の系が適合しているならば，$f_j=\varphi^{\Omega}_{\Omega_j}f$ をみたす Ω 上の hyperfunction f がある。最後に，いかなる開集合上の hyperfunction も全空間 $\mathbb{R}^n$ 上の hyperfunction に拡張できる。

Distribution は層をなすが，最後の性質すなわち軟弱性は持っていない。

Hyperfunction の層を $\mathcal{B}$ で表わす。$A\subset B$ が二つの集合，$\mathcal{F}$ が B 上の層のとき，$\mathcal{F}_A(B)$ でもって A の中に台を持つ B 上の $\mathcal{F}$ の横断面の空間を表わす。特に $\mathcal{B}_K(\Omega)$ は K の中に台を持つ Ω 上の hyperfunction の空間である。

c). K がコンパクトならば，$\mathcal{B}_K(\mathbb{R}^n)$ は自然な位相でもって Fréchet Schwartz（実は核型）空間になり，しかも

$$\mathcal{B}_K(\mathbb{R}^n)\cong\mathcal{A}(K)'\ .$$

ただし，$\mathcal{A}(K)'$ は，K の近傍で実解析的な函数全体に自然な位相を入れた空間 $\mathcal{A}(K)$ の強共役空間を表わす。

d). Distribution $\mathcal{D}'(\Omega)$ あるいは更に一般に Ω上の Gevrey 族の函数の共役空間などは自然に $\mathcal{B}(\Omega)$ に含まれている。

性質 a) は自明であるが，他の性質 b) ～ d) の証明は簡単でない。佐藤[21] は必要な道具を全部与えてはいるが，あまりに多くのすき間を残し，そのままでは殆んど理解不能である。不幸にも予告された論文は発表されなかった。

Martineau [19] は性質 c) を出発点とする別の接近法を与えた。しかし，これも Bourbaki セミナーの一講演にすぎなかったため，多くのすき間を残さねばならなかった。現在最も完全な記述は R. Harvey の博士論文 [11] に見られるであろう。

直観的には，Ω 上の hyperfunction は Ω に近接する複素開集合上で定義された解析函数の境界値の和である。実際 V として，$V \cap \mathbb{R}^n = \Omega$ となるような Stein 開集合をとれば，Leray の定理によって，$\mathcal{B}(\Omega)$ は商空間 $\mathcal{O}(V \# \Omega) / \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}(\hat{V}_j)$ と同一視される。ここで $V \# \Omega = \{z \in V;$ $\mathrm{Im}\, z_j \neq 0$ (すべての j に対し)$\}$，$\hat{V}_j = \{z \in V;\ i \neq j$ に対し $\mathrm{Im}\, z_i \neq 0\}$. $V \# \Omega$ は 2^n 個の連結成分を持つから，$\varphi \in \mathcal{O}(V \# \Omega)$ は実は各連結成分上で定義された 2^n 個の正則函数である。これらの函数がすべて正則な境界値 $\varphi(x_1 \pm i0, \cdots, x_n \pm i0)$ を持つ場合は，φ が $\sum \mathcal{O}(\hat{V}_j)$ に属するのは $\sum \mathrm{sign}\, \sigma\, \varphi(x_1 + i\sigma_1 0, \cdots, x_n + i\sigma_n 0) = 0$ のときそのときに限ることが示される。ただし，σ は ± 1 の列すべてにわたるとする。

$\varphi \in \mathcal{O}(V \# \Omega)$ で代表される hyperfunction を $[\varphi]$ と表わすと，以上の事実により $[\varphi]$ を形式的な和

$$[\varphi] = \sum \mathrm{sign}\, \sigma\ \varphi(x_1 + i\sigma_1 0, \cdots, x_n + i\sigma_n 0)$$

と解釈することができる。もし境界値が distribution の意味で存在するならば，hyperfunction $[\varphi]$ は上の和に等しいことが示される。一方，

Ehrenpreis [9] は R^n 上の distribution f に対し，境界値の和が f と等しくなる正則函数 $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \# R^n)$ があることを示した。

$P(x, D) = \sum a_\alpha(x)\, \partial^{|\alpha|}/\partial x^\alpha$ が Ω 上実解析的な係数 $a_\alpha(x)$ を持つ線型微分作用素のとき，それは Ω のある複素近傍 V 上の作用素 $P(z, D) = \sum a_\alpha(z)\, \partial^{|\alpha|}/\partial z^\alpha$ に解析的に拡張される。このとき，類 $[P(z, D)\varphi]$ は類 $[\varphi]$ のみによって決定される。そこで

$$P(x, D)[\varphi] = [P(z, D)\varphi]$$

と定義する。

定数係数の微分方程式。

$P(D)$ を定数係数の微分作用素を要素とする r_1 行 r_0 列の行列とする。われわれは，未知函数 $u(x)$，既知函数 $f(x)$ がそれぞれ $\mathcal{B}(\Omega)^{r_0}$ および $\mathcal{B}(\Omega)^{r_1}$ にあると仮定して微分方程式

$$(1) \qquad P(D)u(x) = f(x)$$

を考察する。同じ方程式は，$u(x)$ および $f(x)$ が無限回微分可能函数，distribution あるいは実解析的函数の場合，Petrowsky，Ehrenpreis，Malgrange，Hörmander 等によって論じられた。彼らの結果と同様に次の結果がなりたつ。

定理 1。適合系と呼ばれる系 $P_1(D)$ が存在して，任意の凸開集合 Ω に対し，$f \in \mathcal{B}(\Omega)^{r_1}$ が適合条件

$$P_1(D) f(x) = 0$$

をみたすときそしてそのときに限り (1) は解 $u \in \mathcal{B}(\Omega)^{r_0}$ を持つ。

定理 2。もし，同次方程式

(2) $$P(D)u=0$$

の hyperfunction 解 $u\in\mathcal{B}(R^n)^{r_0}$ がすべて，原点のある近傍で無限回微分可能な函数であるならば，$P(D)$は楕円型である。また $P(D)$が楕円型ならば，(1) の hyperfunction 解 $u\in\mathcal{B}(\Omega)^{r_0}$ は f が実解析的な開集合上実解析的である。

単独方程式（すなわち $r_0=r_1=1$ の場合）に対する定理1，2 は R. Harvey の博士論文 [10] [11] で与えられた。定理2の後半は Bengel の博士論文 [2] [3] の仕事でもある。

無限回微分可能 函数および distribution に対する存在定理は Ehrenpreis [6] によって言明され，Malgrange [18] および Hörmander [14] によって証明が与えられた。適合系 $P_1(D)$ は $P(D)$ から代数的に求められ，同じ系 $P_1(D)$ が hyperfunction に対しても distribution に対してもまた函数に対しても有効である。単独方程式に対しては $P_1(D)=0$ である。

定理2での楕円性は Hörmander [12] の意味の楕円性である。彼はそこで，(2) の R^n 上での C^∞ 解がいつも原点の近傍で解析的ならば $P(D)$ が楕円型であること，そしてもし $P(D)$ が楕円型ならば (1) の distribution 解 u は f が実解析的な集合上実解析的であることを証明した。定理2の後半は Hörmander の定理の後半より強力である。Hörmander は(2)のすべての distribution 解が C^∞ であるような系 $P(D)$ を準楕円型と呼んでいる。定理2の前半は，準楕円性が hyperfunction に対してその意味を失うことを示している。この事実は Gevrey 族の超函数解に関連して Chou [5] および Björck [4] によっても指摘された。

定理1および2の詳しい証明は[15]で与えられている。定義函数を用いることにより，定理1はfおよびuが正則函数の場合の存在定理に帰着され，後者はMalgrange [16] 以来の標準的な方法で証明される。定理2の後半は，領域 $\{z\,;\ |z|<r,\ $すべての$j$に対して$\ \mathrm{Im}\, z_j > 0\}$ 上の(2)の解がすべて実の空間 $\{z\,;\ |z|<r,\ $すべての$j$に対して$\ \mathrm{Im}\, z_j = 0\}$ をこえて解析接続できるという事実に帰着される。Harveyはこれを Ehrenpreis [6] の *fundamental principle* によって証明した。より初等的な証明が[15]で与えられている。Bengel [2, 3] は彼自身のP汎函数の理論を用いて，証明を更に簡単な拡張問題に帰着した。

<u>解の層の分解。</u>

$\mathcal{B}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$ および $\mathcal{A}$ でもってそれぞれ *hyperfunction*, *distribution*, C^∞函数および実解析函数の層を表わし，$\mathcal{F}$でもって一般にこれらの層の一つを表わすことにする。微分作用素は局所作用素であるから，$P(D)$は層準同型 $P(D): \mathcal{F}^{r_0} \longrightarrow \mathcal{F}^{r_1}$ を定義する。この核は(2)の解の層に他ならない。これを$\mathcal{F}^P$で表わす。凸開集合はどの点においても基本近傍系をなすから，定理1および$\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$ および $\mathcal{A}$ に対する対応する定理から

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^P \longrightarrow \mathcal{F}^{r_0} \xrightarrow{P(D)} \mathcal{F}^{r_1} \xrightarrow{P_1(D)} \mathcal{F}^{r_2}$$

が完全であることがわかる。$P_1(D)$の適合系$P_2(D)$を考える等して この完全系列をいくらでも長く延長することができ，その結果

$$0 \to \mathcal{F}^P \to \mathcal{F}^{r_0} \xrightarrow{P(D)} \mathcal{F}^{r_1} \xrightarrow{P_1(D)} \mathcal{F}^{r_2} \xrightarrow{P_2(D)} \cdots$$
$$\longrightarrow \mathcal{F}^{r_{m-1}} \xrightarrow{P_{m-1}(D)} \mathcal{F}^{r_m}$$

という形で $\mathcal{F}^p$ の分解（resolution）を得る。Hilbert のシジジー定理[23] から適当な $m \leqq n$ に対して，この最後に $\longrightarrow 0$ をつけ加えてよいこともわかる。

定理2は $P(D)$ は $\mathcal{B}^p = \mathcal{A}^p$ となるときそのときに限って精円型であること，またHörmander の定理は $P(D)$ は $\mathcal{D}'^p = \mathcal{E}^p$ となるときそのときに限って準精円型であることを示している。従って，$P(D)$ が精円型であるならば，正則解の軟弱分解：

$$(3) \qquad 0 \to \mathcal{A}^p \to \mathcal{B}^{r_0} \xrightarrow{P(D)} \mathcal{B}^{r_1} \xrightarrow{P_1(D)} \cdots \to \mathcal{B}^{r_{m-1}} \xrightarrow{P_{m-1}(D)} \mathcal{B}^{r_m} \to 0$$

を得る。

応用。

1。単独方程式に対しては一見定理1より強い存在定理がなりたつ。

定理3（Harvey [10]）。$P(D)$ が単独ならば，任意の開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$(4) \qquad P(D)\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}(\Omega)。$$

証明。この場合適合系 $P_1(D) = 0$ であるから，凸開集合 Ω に対して(4)がなりたつことは定理1によってわかる。一般の Ω に対しては，まず $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の hyperfunction に拡張し，$\mathbb{R}^n$ 上で解 u を見つけそれからそれを Ω に制限すればよい。

この定理は，任意の開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が，hyperfunction に関してはいかなる $P(D)$ に対しても $P(D)$ 凸であることを示しており，distribution，Beurling 型の　広義の函数の場合と対照をなしている。（[13] [4] を参照せよ。）

2。 $P(D)$ が単独楕円型ならば、任意の開集合が $\mathcal{F}=\mathcal{B}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$ および $\mathcal{A}$ に関して $P(D)$ 凸である。

<u>定理4</u>(Malgrange [16])。 $P(D)$ が単独楕円型ならば、任意の開集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ に対して

$$(5)\qquad P(D)\mathcal{F}(\Omega)=\mathcal{F}(\Omega)。$$

証明。定理3によって任意の $f\in\mathcal{F}(\Omega)$ に対して(1)の解 $u\in\mathcal{B}(\Omega)$ を見つけることができる。一方、各点 $x\in\Omega$ に対し、x のある開近傍 Ω' 上での解 $u'\in\mathcal{F}(\Omega')$ が存在する。差 $u-u'$ は Ω' 上方程式(2)をみたし、従って解析的である。これから、$u\in\mathcal{F}(\Omega')$ である。

3。 $P(D)$ を再び単独楕円型作用素とする。このとき、軟弱分解:

$$0\longrightarrow\mathcal{A}^{P}\longrightarrow\mathcal{B}\xrightarrow{P(D)}\mathcal{B}\longrightarrow 0$$

を得る。特に、K が $\mathbb{R}^n$ の部分集合のとき、相対コホモロジー群 $H_K^*(\mathbb{R}^n,\mathcal{A}^P)$ は複体

$$0\longrightarrow\mathcal{B}_K(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{P(D)}\mathcal{B}_K(\mathbb{R}^n)\longrightarrow 0$$

のコホモロジー群として計算される。ここで $\mathcal{B}_K(\mathbb{R}^n)$ は K の中に台を持つ $\mathbb{R}^n$ 上の hyperfunction の空間である。従って明らかに $H_K^p(\mathbb{R}^n,\mathcal{A}^P)=0$ が $p>1$ に対してなりたつ。K がコンパクトの場合、$H_K^1(\mathbb{R}^n,\mathcal{A}^P)$ を次のように計算することができる。

<u>定理5</u>(Grothendieck, Bengel [1, 3])。 $P(D)$ を単独楕円型とする。K がコンパクトならば

$$(6)\qquad H_K^1(\mathbb{R}^n,\mathcal{A}^P)\cong\mathcal{A}^{P'}(K)'。$$

但し、$\mathcal{A}^{P'}(K)'$ は K のある近傍での $P(-D)v=0$ の解 v の空間に自然な位相を入れて局所凸空間としたものの共役空間を表わす。

証明。$P'(D)=P(-D)$ とする。$P'(D)v=0$ の解の層 $\mathcal{A}^{P'}$ は次の分解を持つ：

$$0 \longleftarrow \mathcal{A} \xleftarrow{P'(D)} \mathcal{A} \longleftarrow \mathcal{A}^{P'} \longleftarrow 0 。$$

Malgrange [17] によれば

$$H^p(K,\mathcal{A})=0 \ , \ p>0 ,$$

である。従ってコホモロジー群 $H^*(K,\mathcal{A}^{P'})$ は複体：

$$0 \longleftarrow \mathcal{A}(K) \xleftarrow{P'(D)} \mathcal{A}(K) \longleftarrow 0$$

のコホモロジー群として計算される。$\mathcal{B}_K(R^n)$ と $\mathcal{A}(K)$ は互に共役，$P(D)$ と $P'(D)$ も互に共役，かつ定理4によって $P'(D)$ は上への写像である。ゆえに、Serre の補題 [22] によって

$$H^1_K(R^n,\mathcal{A}^P) \cong H^0(K,\mathcal{A}^{P'})' = \mathcal{A}^{P'}(K)' 。$$

4。代りに分解：

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{B}^{\binom{n}{0}} \xrightarrow{d} \mathcal{B}^{\binom{n}{1}} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{B}^{\binom{n}{n}} \to 0$$

$$0 \leftarrow \mathcal{A}^{\binom{n}{n}} \xleftarrow{-d} \mathcal{A}^{\binom{n}{n-1}} \xleftarrow{-d} \quad \xleftarrow{-d} \mathcal{A}^{\binom{n}{0}} \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow 0$$

を用いれば上と同じ方法によって次の定理を得る。ここで d は外微分である。

<u>定理6</u>（Alexander-Pontrjagin）。もし $K\subset R^n$ が良いコンパクト集合，例えば

$$\dim H^p(K, \mathbb{C}) \leqq \aleph_0 \quad , p = 0, 1, \cdots, n-1$$

とすると、

(7) $$H_K^p(R^n, \mathbb{C}) \cong H^{n-p}(K, \mathbb{C})', \ p = 0, 1, \cdots, n。$$

特に、$H_K^1(R^n, \mathbb{C})$ と $H^{n-1}(K, \mathbb{C})$ の相対性は $b^{n-1} = \dim H^{n-1}(K, \mathbb{C})$ が高々可算というだけの仮定でなりたつ。

古典的な Alexander-Pontrjagin の定理は、定理6と次の定理の $P(D) = d$ の場合から導かれる。

<u>定理7</u>。K を R^n の中のある開集合 V の中に含まれるコンパクト集合、$\mathcal{F}$ を $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}'$ または $\mathcal{E}$ の中の一つとする。このとき任意の系 $P(D)$ に対して次の系列は完全である。

$$0 \to H_K^0(V, \mathcal{F}^P) \to H^0(V, \mathcal{F}^P) \to H^0(V-K, \mathcal{F}^P) \to H_K^1(V, \mathcal{F}^P) \to 0,$$

$$0 \to H^p(V, \mathcal{F}^P) \to H^p(V-K, \mathcal{F}^P) \to H_K^{p+1}(V, \mathcal{F}^P) \to 0, \quad p \geqq 1。$$

これは定理1および $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$ に対する対応する定理から容易に得られる。

<u>定理8</u> (Jordan-Brouwer)。K を R^n の中の開集合 V に含まれるコンパクト集合で

$$b^{n-1} = \dim H^{n-1}(K, \mathbb{C})$$

を高々可算とする。このとき、$V-K$ の連結成分の数は b^{n-1} と V の連結成分の数の和に等しい。

証明。明らかに $H_K^0(V, \mathbb{C}) = 0$ であるから、完全系列：

$$0 \to H^0(V, \mathbb{C}) \to H^0(V-K, \mathbb{C}) \to H^{n-1}(K, \mathbb{C})' \to 0$$

を得る。$\dim H^0(V, \mathbb{C})$ および $\dim H^0(V-K, \mathbb{C})$ はそれぞれ V および $V-K$ の連結成分の数であるから、求める結果を得る。

文献。

[1] G. Bengel : Sur une extension de la théorie des hyperfonctions, C. R. Acad. Sc. Paris <u>262</u> (28 fév. 1966), 499-501.

[2] G. Bengel : Régularité des solutions hyperfonctions d'une équation elliptique, C. R. Acad. Sc. Paris <u>262</u> (7 mars 1966), 569-570.

[3] G. Bengel : Das Weyl'sche Lemma in der Théorie der Hyperfunktionen, Thesis, Univ. Frankfurt, 1966.

[4] G. Björck : Linear partial differential operators and generalized distributions, Ark. för Mat., <u>6</u> (1966), 351-407.

[5] C. C. Chou : Problème de regularité universelle, C. R. Acad. Sc. Paris <u>260</u> (1965), 4397-4399.

[6] L. Ehrenpreis : A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications, Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces, 161-174, Jerusalem, 1961.

[7] L. Ehrenpreis : Analytically uniform spaces and some applications, Trans. Amer. Math. Soc., <u>101</u> (1961), 52-74.

[8] R. Godement : Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

[9] A. Grothendieck : Local Cohomology, Seminar at Harvard Univ., 1961.

[10] R. Harvey : Hyperfunctions and partial differential equations, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., <u>55</u> (1966), 1042-1046.

[11] R. Harvey : Hyperfunctions and partial differential equations, Thesis, Stanford Univ., 1966.

[12] L. Hörmander : Differentiability properties of solutions of systems of differential equations, Ark. för Mat., <u>3</u> (1958), 527-535.

[13] L. Hörmander : Linear Partial Differential Operators, Springer, Berlin, 1963.

[14] L. Hörmander : An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[15] H. Komatsu : Resolution by hyperfunctions of sheaves of solutions of differential equations with constant coefficients, to appear in Math. Ann.

[16] B. Malgrange : Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, <u>6</u> (1955-56), 271-355.

[17] B. Malgrange : Faisceaux sur des variétés analytiques réelles, Bull. Soc. Math. France, <u>83</u> (1957), 231-237.

[18] B. Malgrange : Sur les système differentiels à

coefficients constants, Sém. Leray, Exposés 8 et 8a (1961-62), Collège de France.

[19] A. Martineau : Les hyperfonctions de M. Sato, Sém. Bourbaki, 13 (1960-61), No. 214.

[20] M. Sato : On a generalization of the concept of functions, Proc. Japan Acad., 34 (1958), 126-130 & 604-608.

[21] M. Sato : Theory of hyperfunctions, J. of Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 8 (1959-60), 139-193 & 387-436.

[22] J.-P. Serre : Une théorème de dualité, Comm. Math. Helv., 29 (1955), 9-26.

[23] J.-P. Serre : Algèbre Locale, Multiplicités, Lect. Notes in Math., 11 (1965), Springer, Berlin.

[印刷不鮮明な箇所]

P. 78 ℓ.4

と定め，$\ell = [\ell] + \sigma$,　$0 < \sigma < 1$ のときは，

P. 82 ℓ.2

$$\left| \int f(\Phi(x) + t\tilde{z} + t\tilde{\Phi}(x))\, d\tilde{z} \right|_{k,q,n-m,\Omega} \leqq C t^{-k-\frac{n+s}{p}+\frac{m}{q}} \|f\|_{L^p(\tilde{\Omega})} \quad \cdots (6)$$