数理解析研究所講究録
22 巻 1967 年 104-126

場の理論における散乱理論

荒木 不二洋 (京大 数理解析研)

ページ

§1 理論の枠

次のような枠が与えられている場合について、粒子の散乱をどのように記述し、どのような定理が証明されているか、を説明する。

$\mathfrak{H}$: 複素ヒルベルト空間。[云うまでもなく量子論の基本的 ingredient である。] 内積 (Φ, Ψ) は、物理学者の習慣に従い、Ψ について線形、Φ について反線形である: $(i\Phi, \Psi) = -i(\Phi, \Psi)$。

M: ミンコフスキー空間。$x \in M$ は (x^0, x^1, x^2, x^3) または $(x^0, \vec{x})$ のように書くこともあり、その内積は $(x, y) = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$ とする。

$\mathcal{P}$：非斉次ローレンツ群。[云うまでもなく相対論の基本的ingredientである。] 以下ではその部分群としてのtranslation group [$x \in M \longrightarrow x+a \in M$ for $a \in M$] しか本質的な役割をはたさない。

(a, Λ)：$\mathcal{P}$の元。$x \to \Lambda x + a$ という変換。

$U(a, \Lambda)$ $\mathfrak{H}$上の$\mathcal{P}$の連続ユニタリ表現。とくに$U(a, 1)$は

$$U(a, 1) = \int_M e^{i(a,p)} E(dp) \tag{1.1}$$

のように、スペクトル射影演算子$E(\Delta)$, $\Delta \subset M$を用いて表せるが、Eの台について次の仮定を採用する。

<u>スペクトル条件</u>

(S1) 点スペクトルは$p=0$のみであり[これは$\mathcal{P}$の表現であることから証明される。]，その多重度は1である。$p=0$の固有空間を$\mathfrak{H}_0$と書く。

(S2) ある$m>0$に対し

$$\Delta_1 \equiv \{p \in M; (p, p) = m^2, p^0 > 0\} \tag{1.2}$$

$$\mathfrak{H}_1 \equiv E(\Delta_1)\mathfrak{H} \tag{1.3}$$

$$d\Omega_m(p) \equiv d^3\vec{p}/(2p^0), \quad p^0 = (m^2 + \vec{p}^2)^{1/2} \tag{1.4}$$

とおくと，$E|\mathfrak{H}_1$は各点$p \in \Delta_1$で多重度1，$d\Omega_m(p)$の測度類に属する。[$d\Omega_m$はΔ_1上の変換$p \to \Lambda p$に対して不変な測度である。]

(S3) $E|\mathfrak{H}_1^{\perp}$の台はΔ_1と離れている。

(S4) Eの台は0と$\{p \in M; (p,p) \geq m^2, p^0 > 0\}$の和集合に含まれる。

Ω：$\mathfrak{H}_0$の単位ベクトルを一つ固定して真空ベクトルと呼びΩで表す。文献によってはΨ_0と書かれる場合もある。$U(a, \Lambda)\Omega = \Omega$。

B：M内の有界開領域を一般にBと書く。

$\mathcal{O}(B)$：作用素の集合。領域Bで測定できる物理量の全体と考え，次の性質を仮定する。

(O1) Isotony ： $B_1 \supset B_2 \Rightarrow \mathcal{O}(B_1) \supset \mathcal{O}(B_2)$

(O2) Covariance ： $Q \in \mathcal{O}(B) \Longleftrightarrow U(a,\Lambda) Q U(a,\Lambda)^{-1} \in \mathcal{O}((a,\Lambda)B)$

ただし　$(a,\Lambda)B \equiv \{\Lambda x + a\,;\ x \in B\}$

(O3) Locality ： $B_1' \supset B_2 \Rightarrow \mathcal{O}(B_1)' \supset \mathcal{O}(B_2)$

ただし　$B' = \{y \in M\,;\ x \in B \Rightarrow (x-y, x-y) < 0\}$

$\mathcal{O}(B)' = \{Q \in L(\mathfrak{H})\,;\ S \in \mathcal{O}(B) \Rightarrow [Q, S] = 0\}$

[B'はBに空間的な点の全体，$B_1' \supset B_2$ はB_1とB_2が互に空間的ということ，$\mathcal{O}(B_1)' \supset \mathcal{O}(B_2)$ は$\mathcal{O}(B_1)$と$\mathcal{O}(B_2)$がelementwiseに可換ということ。]

(O4) Irreducibility ： $(\bigcup_B \mathcal{O}(B))'$ は単位作用素の定数倍からなる。

[これはある意味でもっと物理的な仮定から導出できる。]

以上の枠の中での散乱理論とは，$\mathfrak{H}_1$で記述される粒子が多数互に散乱している状態を$\mathfrak{H}$の中で記述する為の理論である。上記で$\mathcal{P}$をガリレー群で置き換え，$U(a,\Lambda)$をその射影ユニタリ表現で置き換え，スペクトル条件と$\mathcal{O}(B)$に対する仮定を少々変更することにより，多体ポテンシャル散乱も，実はこのような枠に含ませることもできる筈である。

§2　一粒子状態

(S2)により，$\mathfrak{H}_1$は$L_2(\triangle_1, d\Omega_m)$とidentifyされる：

$$\Phi \in \mathfrak{h}_1 \sim \Phi(p) \in L_2(C_1, d\Omega_m) \tag{2.1}$$

$$(\Phi, \Psi) = \int \Phi(p)^* \Psi(p)\, d\Omega_m(p) \tag{2.2}$$

$$[U(a, \Lambda)\Phi](p) = e^{i(a,p)} \Phi(\Lambda^{-1} p) \tag{2.3}$$

今 $f(\vec{p}) \in \mathcal{S}(R^3)$ とし

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-i(x,p)} f(\vec{p})\, d^3\vec{p}/(2p^0) \tag{2.4}$$

とおくと $\hat{f}(x)$ は Klein Gordon 方程式

$$(\Box + m^2)\hat{f}(x) = 0 \tag{2.5}$$

の解であるが，次の性質を証明することができる。［ $\Phi(p)$, $\Psi(p) \in \mathcal{S}$ のとき $(U(x, 1)\Phi, \Psi)$ は $\hat{f}(x)$ のようにふるまう。］

<u>*Lemma 1*</u>　$x = (t, \vec{v}t)$ に対し，$t, \vec{v}$ に無関係な定数 A が存在し，

$$|\hat{f}(x) - |t|^{-3/2} f(\vec{p}_{\vec{v}})(\sqrt{m}/2)(1-\vec{v}^2)^{-3/4} \exp -i[(p_{\vec{v}}, x) + (3\pi/4)[t/|t|]]| < A|t|^{-5/2} \tag{2.6}$$

ただし　$\vec{p}_{\vec{v}} = m\vec{v}/\sqrt{1-\vec{v}^2}$，　$p^0_{\vec{v}} = m/\sqrt{1-\vec{v}^2}$。 (2.7)

また $|\vec{v}| \geq 1$ に対しては $f(\vec{p}_{\vec{v}}) = 0$ と定義する。

さらに $\vec{p} \to \vec{v}(\vec{p}) = \vec{p}/p^0$ $[p^0 = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}]$ による f の台の像を K，K の任意の近傍を N，$|\vec{v}| \geq 1$ のような $\vec{v}$ の集合と N の補集合の和を G とすると，$\vec{v} \in G$ に対して一様に定数 A_N が存在して

$$|\hat{f}(x)| < |t|^{-N} A_N (1 + |\vec{x}|)^{-N}, \qquad N: 任意。 \tag{2.8}$$

この補題の物理的意味は次のとおり：$\hat{f}(x)$ は x という点での粒子の確率振巾に比例すると解釈すれば，$x = (t, \vec{v}t)$ で t を動かすと，対応する $\hat{f}(x)$ のふるまいは，速度 $\vec{v}$ で動いている部分に対応した確率振巾が，$t \to \pm\infty$ の極限で残ってくる部分をあらわすと考えられる。(2.7)式で与えられる $p_{\vec{v}}$ は速度 $\vec{v}$，質量

m の粒子のエネルギー運動量である。したがって $f(\vec p)$ は粒子のエネルギー運動量が p である確率振巾を表すという波動関数の解釈［これは別の面から支持される。］と一致する。時間がたつと，異る速度に対応する粒子の位置は相互に t に比例して遠ざかるから，粒子の各点での確率密度は t^{-3} に比例して小さくなることが期待され，したがって確率振巾はその平方根に比例して小さくなることが期待される。これは (2.6) 式右辺第二項の $t^{-3/2}$ という係数である。$\exp -i(p_{\vec v}, x)$ は粒子が $p_{\vec v}$ というエネルギー運動量を持つための振動因子であり，$\exp -i3\pi/4$ は単なる定数位相，残りの $(\sqrt{m}/2)(1-\vec v^2)^{-3/4}$ は正規化因子である。［Klein Gordon 方程式では $i\int \hat f(x)^* \overleftrightarrow{\partial_0} f(x)\, d^3\vec x$ が x^0 に独立になる。ただし $A\overleftrightarrow{\partial_0}B \equiv A(\partial B/\partial x^0) - (\partial A/\partial x^0)B$。これを確率と解釈できるが，(2.4) を代入すると，丁度 $\int |f(\vec p)|^2 d\Omega_m(\vec p)$ になっている。一方変数を (2.7) によって $\vec p$ から $\vec v$ に変換すると，$d\Omega_m(p) = (m^2/2)(1-\vec v^2)^{-2} d\vec v$。他方 (2.6) による $\hat f(x)$ の大きな t に対する評価を $i\int \hat f(x)^* \overleftrightarrow{\partial_0} f(x)\, d^3\vec x$ に代入し，積分変数を $\vec x = t\vec v$ により $\vec x$ から $\vec v$ にかえると $\int |f(\vec p_{\vec v})|^2 (m^2/2)(1-\vec v^2)^{-2} d\vec v$ となって一致する。］なお $t^{-3/2}$ と $(1-\vec v^2)^{-3/4}$ はまとめて $(x,x)^{-3/2}$ とも書ける。また $|\vec v| \to 1$ で $f(\vec p_{\vec v})$ は非常に速く 0 に近ずくことに注意。

上記と全く同じ様な評価式および物理的解釈は，自由粒子のシュレディンガー波動関数についても成立する。すなわち

<u>Lemma 2</u>　$f(\vec p) \in \mathcal{S}(R^3)$，$x = (t, \vec v t)$

$$\hat f(x) = (2\pi)^{-3/2} \int f(\vec p) \exp -i[(\vec p^2/2m)x^0 - \vec p\cdot\vec x]\, d^3\vec p \quad (2.9)$$

に対して，t, $\vec v$ に無関係な定数 A が存在して

$$|\hat{f}(x) - |t|^{-3/2} f(\vec{p}_{\vec{v}})\, m^{3/2} \exp -i[(p_{\vec{v}}, x) + (3\pi/4)(t/|t|)]| < A|t|^{-5/2} \tag{2.10}$$

ただし

$$\vec{p}_{\vec{v}} = m\vec{v},\quad p^0_{\vec{v}} = m\vec{v}^2/2,\quad (p_{\vec{v}}, x) = -m\vec{v}^2 t/2 \tag{2.11}$$

特に $m\vec{v}$ が f の台の近傍に属さないときは任意の N に対し、$\vec{v}$ について一様に

$$|\hat{f}(x)| < A_N |t|^{-N}. \tag{2.12}$$

Lemma 2 の方の証明の要領を説明する。まずガリレー変換により、評価しやすい形に変える。

$$(2\pi)^{3/2}\hat{f}(x) = \int f(\vec{p}_{\vec{v}} + \vec{p}) \exp -i(\vec{p}^2/2m)t\, d^3\vec{p}\ \ \exp -i(p_{\vec{v}}, x) \tag{2.13}$$

今

$$F(\lambda) \equiv (2m)^{3/2} \int_{|\vec{\omega}|=1} f(\vec{p}_{\vec{v}} + \sqrt{2m}\,\lambda\,\vec{\omega})\, d\omega(\vec{\omega}) \tag{2.14}$$

とおく。ただし $d\omega(\vec{\omega})$ は通常の球面上の不変測度。このとき(2.13)式は $\exp -i(p_{\vec{v}}, x)$ を除いて

$$\int_0^\infty F(\lambda) e^{-i\lambda^2 t} \lambda^2\, d\lambda \tag{2.15}$$

となる。$F(\lambda)$ が λ について偶関数であり、任意回連続微分可能であることは容易にわかるので、$t \to \pm\infty$ で

$$(2\pi)^{3/2}\hat{f}(x) = F(0)\, e^{-i3\pi/4} (\sqrt{\pi}/4) |t|^{-3/2} \exp -i(p_{\vec{v}}, x) + O(t^{-5/2}) \tag{2.16}$$

がでる。$O(t^{-5/2})$ の部分は $\vec{v}$ について一様に評価できる。

Lemma 1 の証明もこれと原理的に同じだが、評価の計算が少々複雑になるので省略する。

以下の議論で Lemma 1 を用いるときには、次の形で用いる。

Corollary

(i) $|x^0|^{3/2} \sup_{\vec{x}} |f(x)| < A$, (2.17)

(ii) $\int |f(x)| d^3\vec{x} < A' |x^0|^{3/2} + A''$. (2.18)

粒子の確率振巾が $t \to \pm\infty$ で空間的に $|t|^3$ に比例して拡がり，各点で $|t|^{-3/2}$ のように減少するという，このLemmaの解釈に従うと，二粒子がある特定の点に(同時に)見つかる確率振巾は t^{-3} に比例し，三粒子の場合は $t^{-9/2}$ に比例するという具合になる筈である。その為に $t \to \pm\infty$ の極限では，各安定粒子は確率1をもって互に無限大の距離にあり，相互作用が無限遠方で0になる場合には独立にふるまうことになる。[このような解釈をする場合，ポテンシャル散乱においては，n体の束ばく状態(n体重心系ハミルトニアンの離散的固有空間)も安定一粒子として取扱うことが必要である。]

粒子の相互距離が無限大のとき，それらが独立にふるまうという性質は，実は§1の仮定から導出できる。次節でこれを説明する。

§3 空間方向の漸近的ふるまい

まずLocalityの仮定(C3)を少しゆるめたものを考える。$\mathfrak{H}$上の有界線型作用素の集合$\mathfrak{A}$がquasilocal of order N $(N \geq 0)$ とは，任意の $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{A}$ が与えられたとき定数 A が存在して

$$\| [Q_1, Q_2(x)] \| \, d(x)^N < A \tag{3.1}$$

となることである。ここに

$$Q(x) = U(x,1)\, Q\, U(x,1)^{-1} \tag{3.2}$$

$$d(x) = \max\{0, |\vec{x}| - |x^0|\} \tag{3.3}$$

Nが任意ならば quasilocal of order ∞ という。[AはNにdepend.]

Locality の仮定のもとで，$\bigcup_B \mathcal{O}(B)$ は明らかに quasilocal of order ∞ であるが，$Q \in \mathcal{O}(B)$ に対して

$$Q(f) \equiv \int Q(x) f(x) dx \qquad (3.4)$$

も $f \in \mathcal{S}$ ならば quasilocal of order ∞ である。

空間方向の無限遠で，局所観測量の期待値が独立事象のようにふるまうことは，次の補題の形で証明できる。[(S4) と (O3) が証明に使われる。]

<u>Lemma 3</u> スペクトル条件 (S1), (S4) のもとで，Q_1, Q_2 が quasilocal of order N かつ $(\partial Q_2(x)/\partial x^\mu)$ または $(\partial Q_1(x)/\partial x^\mu)$ が有界作用素として (weakに) 存在すれば 定数Aが存在して

$$d(x)^N |(\Omega, Q_1 Q_2(x)\Omega) - (\Omega, Q_1\Omega)(\Omega, Q_2\Omega)| < A \qquad (3.5)$$

Q_1 か Q_2 が local operator [(O3) をみたす] ならば $\partial Q/\partial x$ の存在は不必要。

Q の個数が3以上の場合を記述するのには，truncation という操作を導入するのが便利である。truncation $(\quad)_T$ は

$$(Q_1 \cdots Q_m)_T \equiv \sum_{l=1}^{m} (-1)^{l-1}(l-1)! \sum_{\{I_\nu\}} \prod_{\nu=1}^{l} (\Omega, \prod_{k \in I_\nu} Q_k \Omega) \qquad (3.6)$$

で定義する。ここに $\{I_\nu\}_{\nu=1\cdots l}$ は $(1 \cdots m)$ の l 個の nonempty sets への (unordered) partition で $\sum$ はすべてのそのような partition $\{I_\nu\}$ および $l=1 \cdots m$ について行う。$(\prod Q_k)$ の中の作用素の順序は k の増える順に左から右へ並べる（左辺と同じ）ものとする。例えば

$$(Q_1 Q_2)_T = (\Omega, Q_1 Q_2 \Omega) - (\Omega, Q_1 \Omega)(\Omega, Q_2 \Omega)$$

$(Q_1 \cdots Q_m)_T$ を $(\Omega, Q_1 \cdots Q_m \Omega)$ の truncated part ともいうが，後者は前者で次のように展開できる。

$$(\Omega, Q_1 \cdots Q_m \Omega) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{\{I_\nu\}} \prod_{\nu=1}^{l} \left(\prod_{k \in I_\nu} Q_k\right)_T \qquad (3.7)$$

記号は (3.6) と同じである。次の Lemma と (3.7) を合わせると，$(\Omega, Q_1 \cdots Q_m \Omega)$ で $Q_1 \cdots Q_m$ の相互距離がいろいろな仕方で (cluster を作って) 大きくなった

とそのふるまいがわかる。(3.7) を cluster expansion とも呼ぶ。

Lemma 4　スペクトル條件 (S1), (S4) のもとで，$Q_1 \cdots Q_m$ が quasi-local of order ∞ かつ $(\partial Q_j(x)/\partial x^\mu)$ が存在すれば任意の定められた定数 G 以下 $|x_1^0| \cdots |x_m^0|$ がすべて小さい限り，定数 A が存在して

$$|(Q_1(x_1)\cdots Q_m(x_m))_T|\, d(\vec{x}_1\cdots\vec{x}_m)^N < \text{const} \tag{3.8}$$

ここに $d(\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_m) = \max_{i,j} |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$. (3.9)

Q_j が local なら $\partial Q_j/\partial x$ の存在は仮定しなくてよい。Lemma 4 の結論が成立するような $Q_1 \cdots Q_m$ は almost local と呼ばれる。

§4 時間無限大での漸近的独立性

Lemma 5　$Q_1 \cdots Q_m$ が almost local であるとし，$k=1\ldots m$ に対し

$$\hat{f}_k(x) = (2\pi)^{-3/2}\int\{e^{-i(x,p)}f_k^+(\vec{p}) + e^{i(x,p)}f_k^-(\vec{p})\}\,d^3\vec{p}/(2p^0) \tag{4.1}$$
$$f_k^+,\ f_k^- \in \mathcal{S}$$

$$Q_k(f_k, t) = \int Q_k(t,\vec{x})\, f_k(t,\vec{x})\, d^3\vec{x} \tag{4.2}$$

とする。ただし $m \geq 2$. このとき定数 A が存在して

$$|\langle Q_1(f_1,t)\cdots Q_m(f_m,t)\rangle_T|\,|t|^{3(m-2)/2} < A \tag{4.3}$$

また $m=2$ に対し，

$$|\langle Q_1(f_1,t)Q_2(f_2,t)\rangle_T - \langle f_1, \rho_{12} f_2\rangle|\, t^{3/2} < A \tag{4.4}$$

ここに

$$\langle f_1, \rho_{12} f_2\rangle = \int\{f_1^-(\vec{p})f_2^+(\vec{p})\rho_{12}(\vec{p}) + f_1^+(\vec{p})f_2^-(\vec{p})\rho_{12}(-\vec{p})\}\,d^3\vec{p}/(2p^0) \tag{4.5}$$

$$\rho_{12}(\vec{p}) = (2p^0)^{-1}\int\langle Q_1 Q_2(0,\vec{x})\rangle_T\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,d^3\vec{x} \tag{4.6}$$

(4.3) 式の証明は次のようである。(4.3) の $\langle\ \rangle_T$ に定義式 (4.2) を代入して

得られる積分表式の絶対値を評価する。$k=2\cdots m$ に対し、Lemma 1 から $|\hat{f}_k(x)|$ を $\max_{\vec{x}}|\hat{f}_k(t,\vec{x})|\leq|t|^{-3/2}A_k$ でおさえる。(Corollary (i).)

また $\langle Q_1(t,\vec{x}_1)\cdots Q_m(t,\vec{x}_m)\rangle_T=\langle Q_1(0,\vec{x}_1)\cdots Q_m(0,\vec{x}_m)\rangle_T$ が $\vec{x}_j-\vec{x}_{j-1}$ だけの関数で、そのどれかが無限大になるときに任意の巾乗より早く 0 になる (almost local property) ことを使って

$$\int|\langle Q_1(0,\vec{x}_1)\cdots Q_m(0,\vec{x}_m)\rangle_T|\,d^3\vec{x}_2\cdots d^3\vec{x}_m=A_0$$

が x_k に無関係に得られる。最後にまた Lemma 1 (Corollary (ii)) から

$$\int|f_1(t,\vec{x})|\,d\vec{x}<|t|^{3/2}A_1$$

のように評価できるので、全体が $A_0A_1\cdots A_m|t|^{-3(m-2)/2}$ でおさえられることがわかる。

(4.4)式の方は、almost local property から $P_{12}(\vec{p})$ が $\vec{p}$ について任意回連続微分可能で、$\vec{p}\to\infty$ で slow increase であることに注意すると、straightforward な計算で答えが出る。

このLemmaより

<u>Corollary</u> もし $(\Omega,Q_k\Omega)=0$ ならば

$$\lim_{|t|\to\infty}(\Omega,Q_1(f_1t)\cdots Q_m(f_m,t)\Omega)$$
$$=\begin{cases}0 & \text{if } m \text{ is odd}\\ \displaystyle\sum_P\prod_{\nu=1}^{m/2}(f_{P(\nu)},P_{P(\nu)P(\nu+m/2)}f_{P(\nu+m/2)}) & \text{if } m \text{ is even.}\end{cases}\qquad(4.7)$$

ここに和は $P(\nu)<P(\nu+m/2)$, $P(1)<\cdots<P(m/2)$, をみたす $(1\cdots m)$ の順列 P すべてにわたって行う。

以上で漸近状態の議論に対する準備ができた。

§5 漸近状態

$\mathscr{H}$上の任意の有界線形作用素Qに対し

$$Q_1 = Q(\hat{f}) \equiv \int Q(x)\hat{f}(x)\,d^4x \tag{5.1}$$

$$\hat{f}(x) \equiv (2\pi)^{-4}\int f(p)\,e^{-i(p,x)}\,d^4p \tag{5.2}$$

のようにしてQ_1を作る。このとき$f(p)\in\mathscr{S}(R^4)$がEの台からΔ_1を除いたところで0ならば、$Q_1\Omega\in H_1$となることは明らかである。また$\Psi\in H_1$が与えられており$(\Psi, E(\ )\Psi)$の台一仮りにKとよぶ一がコンパクトで、$(\Psi, Q\Omega)\neq 0$ならば、スペクトル條件(S3)によって、上記のfとしてK上で1となるものを取ることができ、そのとき$(\Psi, Q_1\Omega)=(\Psi, Q\Omega)\neq 0$となる。

とくに、$Q\in\mathcal{O}(B)$の場合を考える。既約性の仮定(O4)により、任意の$\Psi\in H_1$に対し、適当なBと$Q\in\mathcal{O}(B)$があって$(\Psi, Q\Omega)\neq 0$。したがって、上記の議論から、Bと$Q\in\mathcal{O}(B)$を自由に動かしたとき、$Q_1\Omega$の全体はH_1で稠密であることがわかる。[実は、一つの$Q\in R(B)$だけで、fをいろいろ変えることにより、$Q_1\Omega$がH_1で稠密になる。]

Qがlocality (O3)をみたし、$f\in\mathscr{S}$だから、Q_1はquasilocal of order ∞であることがただちにわかる。したがって§3によりQ_1はalmost localである。同様にして、$Q_2\cdots Q_m$を作ると、$Q_1\cdots Q_m$の全体はalmost localである。

また、(4.2)式で$f_k^- = 0$であるような$f_1\cdots f_m$を用意して、

$$\Psi_t \equiv Q_1(f_1,t)\cdots Q_m(f_m,t)\,\Omega \tag{5.3}$$

を考える。(2.1)により$Q_k\Omega$に対応する波動関数を$g_k(\vec{p})$とし、

$$h_k(\vec{p}) = (2\pi)^{3/2} f_k^*(\vec{p})\, g_k(\vec{p}) \,/\, (2p^0) \tag{5.4}$$

とおく。このとき次の定理が成立する。

定理 1

$$\Psi^{out}[h_1 \cdots h_m] = \underset{t\to+\infty}{\text{strong lim}}\ \Psi_t \tag{5.5}$$

が存在し，$h_1 \cdots h_m$ のみに depend する。[$Q_1 \cdots Q_m$，$f_1 \cdots f_m$ のえらび方には $h_1 \cdots h_m$ を通してのみ depend.] さらに

$$(\Psi^{out}[h_1' \cdots h_l'], \Psi^{out}[h_1 \cdots h_m]) = \delta_{lm} \sum_P \prod_{\nu=1}^{m} (h_\nu', h_{P(\nu)}) \tag{5.6}$$

$$(h_\nu', h_{P(\nu)}) = \int h_\nu'(\vec{p})^* h_{P(\nu)}(\vec{p})\, d^3\vec{p}/(2p^0)$$

$$U(a,\Lambda)\, \Psi^{out}[h_1 \cdots h_m] = \Psi^{out}[(a,\Lambda)h_1 \cdots (a,\Lambda)h_m] \tag{5.7}$$

ここに，(5.6)の和はすべての順列 P にわたり，(5.7)式で

$$[(a,\Lambda)h](\vec{p}) = e^{i(p,a)} h(\overrightarrow{\Lambda^{-1}p}) \tag{5.8}$$

さらに

$$\Psi^{in}[h_1 \cdots h_m] = \underset{t\to-\infty}{\text{strong lim}}\ \Psi_t \tag{5.9}$$

についても全く同様のことが成立する。

(5.5) の存在の証明は次のようにする。$Q_k\Omega \in H_1$ から容易に

$$\frac{d}{dt} Q_k(f_k, t)\Omega = 0 \tag{5.10}$$

がわかる。また (5.1) 式を使って

$$Q_1(x) = U(x,1) \int Q(y) \hat{f}(y)\, dy\ U(x,1)^{-1}$$

$$= \int Q(y+x) \hat{f}(y)\, dy = \int Q(y) \hat{f}(y-x)\, dy$$

という計算から，$Q_k(x)$ がノルムの意味で 任意回連続微分可能 であることがわかる。そこで

$$\left\| \frac{d\Psi_t}{dt} \right\|^2 = \left\| \sum_k Q_1(f_1,t) \cdots \left(\frac{d}{dt} Q_k(f_k,t)\right) \cdots \Omega \right\|^2 \tag{5.11}$$

を考える。(3.7)式を用いて $(\Omega, \cdots \Omega)$ を $(\cdots)_T$ で展開し，$(\Omega Q_k \Omega)=0$，$\frac{d}{dt}Q_k(f_k, t)\Omega = 0$ を用いると，次のいずれかを factor として含む項だけが残る。① 4つまたはそれ以上の Q の $(\cdots)_T$ を含む。② 3つの Q の $(\ )_T$ を2つ含む［ここで①，②では $\frac{dQ}{dt}$ も Q の仲間に入れて考える。］③ 二つの Q の $(\ )_T$ ばかりの積で，$\left(\frac{dQ_k}{dt}Q_\ell\right)_T \cdot \left(Q_j^* \frac{dQ_i^*}{dt}\right)_T$ を含む。Lemma 5 の (4.3) により，①，② の各項は $|t|^{-3}$ でおさえられる。また同じく Lemma 5 の (4.4) により，③ もまた $|t|^{-3}$ でおさえられる。したがってある定数Aがあって

$$\left\|\frac{d\Psi_t}{dt}\right\|^2 < |t|^{-3}A \tag{5.12}$$

故に，$t_2 > t_1 > T > 0$ に対し，

$$\|\Psi_{t_2} - \Psi_{t_1}\| \leq \int_{t_1}^{t_2}\left\|\frac{d\Psi_t}{dt}\right\| dt < (t_1^{-1/2} - t_2^{-1/2})2A \leq 4A\ T^{-1/2} \tag{5.13}$$

すなわち，Ψ_t は $t \to +\infty$ で Cauchy の條件をみたし，強極限を持つ。

極限ベクトルの内積は，Lemma 5 の Corollary から (5.6) 式で与えられることがわかり，それより Ψ^{out} は $h_1 \cdots h_m$ のみに depend することがわかる。

(5.8) 式のうち a が任意で Λ が空間回転の部分は (5.5) 式よりただちに導かれる。Λ が一般のローレンツ変換の場合の証明は省略する。（証明終）

$m, h_1 \cdots h_m$ をいろいろ変えて得られる $\Psi^{out}[h_1 \cdots h_m]$ で張られる $\mathfrak{H}$ の部分空間を $\mathfrak{H}^{out}$，同じく $\Psi^{in}[h_1 \cdots h_m]$ で張られる部分空間を $\mathfrak{H}^{in}$ と名ずける。$\mathfrak{H}^{out}$ の構造は次のとおりである。m を fix した時に $\Psi^{out}[h_1 \cdots h_m]$ で張られる部分空間を $\mathfrak{H}_m^{out}$ とおくと $\ell \neq m$ で $\mathfrak{H}_m^{out} \perp \mathfrak{H}_\ell^{out}$ だから

$$\mathfrak{H}^{out} = \sum_{m=0}^{\infty}{}^{\oplus}\, \mathfrak{H}_m^{out} \tag{5.14}$$

ここで，$\mathfrak{H}_0^{out}$ は $\mathfrak{H}_0$ であり，また $Q_1\Omega$ が $\mathfrak{H}_1$ で稠密であることがこの節の始でわかっているので，$\mathfrak{H}_1^{out}$ は $\mathfrak{H}_1$ と一致する。一般の m に対しては，(5.6)式から，$\mathfrak{H}_m^{out}$ が m 個の $\mathfrak{H}_1$ の対称テンソル積と次の対応によりユニタリ同値である。

$$\Psi^{out}[h_1 \cdots h_m] \in \mathfrak{H}_m^{out} \sim m!^{-1/2} \sum_P h_{P(1)} \otimes \cdots \otimes h_{P(m)} \in Sym\, \mathfrak{H}_1^{\otimes m} \tag{5.15}$$

ここに和はすべての順列 P にわたってとる。(5.5)で得られる Ψ^{out} については h_k に制限があるが，この対応により，任意の $h_k \in \mathfrak{H}_1$ に対して $\Psi^{out}[h_1 \cdots h_m]$ を定義することができる。さらにあとで使う都合上，

$$(a_{out}^{\dagger}, h)\, \Psi^{out}[h_1 \cdots h_m] = \Psi^{out}[h, h_1 \cdots h_m] \tag{5.16}$$

$$(h, a_{out})\, \Psi^{out}[h_1 \cdots h_m] = 0 \quad \text{for } m=0$$
$$= \sum_{\ell=1}^{m} (h, h_\ell)\, \Psi^{out}[h_1 \cdots \widehat{h_\ell} \cdots h_m] \quad \text{for } m>0 \tag{5.17}$$

により，非有界線形作用素 $(a_{out}^{\dagger}, h)$，(h, a_{out}) を定義する。$(h, a_{out})^{\dagger} \supset (a_{out}^{\dagger}, h)$ である。$h_1, \cdots h_m, h$ を $\mathcal{S}$ に制限したとき，distribution の意味で，次の記号を使う。

$$\Psi^{out}[h_1 \cdots h_m] = \int |\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m\rangle_{out}\, h_1(\vec{p}_1) \cdots h_m(\vec{p}_m) [d^3\vec{p}_1/(2p_1^0)] \cdots [d^3\vec{p}_m/2p_m^0] \tag{5.18}$$

$$(a^{+}_{out}, h) = \int a^{+}_{out}(\vec{p})\, h(\vec{p}) (d^3\vec{p}/(2p^0)) \tag{5.19}$$

$$(h, a_{out}) = \int h(\vec{p})^* a_{out}(p) (d^3\vec{p}/(2p^0)) \tag{5.20}$$

そのとき

$${}_{out}\langle \vec{p}_\ell{}' \cdots \vec{p}_1{}' | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m \rangle_{out} = \delta_{\ell m} \sum_P \prod_{\nu=1}^{m} (2p_\nu^0)\, \delta^3(\vec{p}_\nu - \vec{p}_{P(\nu)}{}') \tag{5.21}$$

$$[a_{out}(\vec{p}'), a_{out}^{\dagger}(\vec{p})] = (2p^0)\, \delta(\vec{p} - \vec{p}') \tag{5.22}$$

$$|\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m\rangle = a_1^{\dagger}(\vec{p}_1) \cdots a_m^{\dagger}(\vec{p}_m) |1\rangle \quad \text{ただし } |1\rangle \equiv \Omega \tag{5.23}$$

が成立する。

全く同様なことを$\mathcal{H}^{in}$についても行う。

さて，$\Psi^{out}[h_1\cdots h_m]$ の物理的解釈については，この状態を無限の未来 $(t=+\infty)$ で眺めたとき，丁度 m 個の粒子がそれぞれ $h_1\cdots h_m$ の波動関数で走っている状態という解釈ができることを，次節で示す。[ここで，我々はハイゼンベルク表示を使っていることを注意しておく。一つの状態は時間の如何にかかわらず一つのベクトルで表される。違う時間でどのように変っていくかは，その異る時間での物理量を測定して見て判断する。従って同一の機械で測定しても，測定する時間が違うと違う作用素によって表され，それらは $U(a,1)$，$a=(t,\vec{0})$ によるユニタリ変換でつながる。一粒子が h_k という状態にあるというときにもやはりハイゼンベルク表示で考えている。]
同じ様にして，$\Psi^{in}(h_1\cdots h_m)$ は，無限の過去 $(t=-\infty)$ で眺めたとき，丁度 m 個の粒子がそれぞれ $h_1,\cdots h_m$ で表される状態で走っているように見えると解釈する。

散乱で問題になるのは，$t=-\infty$ で状態を与えたとき，$t=+\infty$ である状態になる確率はいくらかということである。すなわち

$$|(\Psi^{out}[h_1'\cdots h_\ell'],\ \Psi^{in}[h_1\cdots h_m])|^2 \qquad (5.24)$$

が問題になる。そこで

$$S\ \Psi^{out}[h_1\cdots h_m] = \Psi^{in}[h_1\cdots h_m] \qquad (5.25)$$

によりS作用素を定義する。Sは $\mathcal{H}^{out}$ から $\mathcal{H}^{in}$ へのユニタリ写像である。[$(\mathcal{H}^{out})^2$ では定義しない。] また

$$S(h_1'\cdots h_\ell';h_1,\cdots h_m) \equiv (\Psi^{out}[h_1'\cdots h_\ell'],\ \Psi^{in}[h_1,\cdots h_m]) \qquad (5.26)$$

$$= (\Phi^{out}[h_1' \cdots h_\ell'],\ S\,\Phi^{out}[h_1 \cdots h_m])$$

$$= (\Phi^{in}[h_1' \cdots h_\ell'],\ S\,\Phi^{in}[h_1 \cdots h_m])$$

をS行列要素という。また h_k', $h_j \in \mathcal{S}$ のとき

$$S(h_1' \cdots h_\ell' ; h_1 \cdots h_m) = \int S(\vec{p}_1{}' \cdots \vec{p}_\ell{}' ; \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m)$$

$$h_1'(\vec{p}_1{}')^* \cdots h_\ell'(\vec{p}_\ell{}')^* h_1(\vec{p}_1) \cdots h_m(\vec{p}_m) \frac{d^3\vec{p}_1{}'}{(2p_1'^0)} \cdots \frac{d^3\vec{p}_m}{(2p_m^0)} \quad (5.27)$$

により distribution S を定義する。次のようにも書く。

$$S(\vec{p}_1{}' \cdots \vec{p}_\ell{}' ; \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m) = \langle \vec{p}_\ell{}' \cdots \vec{p}_1{}' | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m \rangle \quad (5.28)$$

例えば $S=1$ なら，(5.28) は (5.21) で与えられる。

§6 漸近状態のガイガー計数管的解釈

定理2 $\Phi_1 = \Phi^{out}[h_1' \cdots h_\ell']$, $\Phi_2 = \Phi^{out}[h_1 \cdots h_m]$ を定理1で得られた状態とし，$\mathrm{supp}\, h_i' \cap \mathrm{supp}\, h_j'$, $\mathrm{supp}\, h_i \cap \mathrm{supp}\, h_j$ がともに $i \neq j$ で empty とする。また $\vec{v}_i \neq \vec{v}_j$ for $i \neq j$ のような $\vec{v}_j$, $j=1 \cdots k$ が与えられたとする。さらに $Q_1 \cdots Q_k$ が almost local（Φ_1, Φ_2 の construction に使った Q も含めて）とする。このとき

$$(\Phi_1,\ Q_1(t, t\vec{v}_1) \cdots Q_k(t, t\vec{v}_k)\, \Phi_2) \quad (6.1)$$

において，次の置換えが許される。$Q = Q_j(t, t\vec{v}_j)$, $j=1 \cdots k$ に対し

$$Q = (\Omega, Q\Omega)1 + (a_{out}^+, \{E(\Delta_1) Q \Omega\}) + (\{E(\Delta_1) Q^* \Omega\}, a_{out})$$

$$+ (a_{out}^+, \{E(\Delta_1) Q E(\Delta_1)\} a_{out}) + O(t^{-N}) \quad (6.2)$$

ここに N は任意，$t \to +\infty$ の極限を考えるものとし，$\mathfrak{H}_1$ 上の作用素 C に対して $(a_{out}^+, C a_{out})$ を次式で定義する。

$$(a_{out}^+, C\, a_{out})\, \Phi^{out}[h_1 \cdots h_m]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \Phi^{out}[h_1 \cdots h_{j-1}\, C h_j\, h_{j+1} \cdots h_m] \qquad (6.3)$$

全く同じことが，out → in と変えたものの $t \to -\infty$ の極限で成立する。

証明の要領は定理1と同じだが，長くなるので省略する。

(6.2)式の右辺の各項の $t \to +\infty$ でのふるまいを考えると，第一項は t について定数，第2，第3項は Lemma 1 より評価できて，$t^{-3/2}$ で小さくなり，第4項は次の定理より t^{-3} で小さくなる。

<u>定理 3</u>　Q が局所観測量に関して almost local とし，$C \equiv E(\Delta_1) Q E(\Delta_1)$ を $\mathfrak{H}_1$ 上の作用素として考え，$\Psi, \Phi \in \mathfrak{H}_1$，$\Psi(\vec{p}), \Phi(\vec{p}) \in \mathcal{S}$ に対して

$$(\Psi, C\, \Phi) = \int C(\vec{p}, \vec{p}')\, \Psi(\vec{p})^* \Phi(\vec{p}')(d^3\vec{p}/2p^0)(d^3\vec{p}'/2p'^0) \qquad (6.4)$$

により distribution $C(\vec{p}, \vec{p}')$ を定義すると，$C(\vec{p}, \vec{p}')$ は $\vec{p}, \vec{p}'$ について任意回連続微分可能な有界関数である。さらに，$\Psi, \Phi \in \mathfrak{H}_1$，$\Psi(\vec{p}), \Phi(\vec{p}) \in \mathcal{S}$ に対し

$$\lim_{t \to \infty} t^3 (\Psi, E(\Delta_1) Q(t, t\vec{v}) E(\Delta_1) \Phi) = \Gamma(\vec{p}_{\vec{v}})\, \Psi(\vec{p}_{\vec{v}})^* \Phi(\vec{p}_{\vec{v}}) \qquad (6.5)$$

$$\Gamma(\vec{p}) = \frac{2(\pi p^0)^3}{m^2} C(\vec{p}, \vec{p}) \qquad (6.6)$$

$$\vec{p}_{\vec{v}} = m\vec{v}(1 - \vec{v}^2)^{-1/2} \qquad (6.7)$$

(6.4)式の $C(p, p')$ の微分可能であることは，Lemma 4 の $n = 3$ の場合の Fourier 変換を考えることにより得られる。また (6.5)式は Lemma 1 と同じ証明で得られる。

今特にガイガー計数管に相当する局所観測量を考える。まず真空に対しては何も反応を示さないはずなので $Q\Omega = 0$（固有値は任意だから0にとった。）また一粒子に対しては数を数えてくれないと困るので，$E(\Delta_1) Q E(\Delta_1) \neq 0$。この二つの性質をみたす almost local な作用素を考えることにする。（そのような Q が存在することは §5 の始めの議論と同じようにして

わかる。） このとき、(6.2)式の始めの3項は0になり、第4項から

$$\lim_{t\to+\infty} t^3 Q_j(t, t\vec{v}_j) = (a_{out}^+ \Gamma_j a_{out}) \qquad (6.8)$$

のようなおきかえが(6.1)式で許される。ただし、Γ_jは作用素でなく、

$$(\Psi, \Gamma_j \Phi) = \Gamma(\vec{p}_{\vec{v}_j}) \Psi(\vec{p}_{\vec{v}_j})^* \Phi(\vec{p}_{\vec{v}_j}) \quad \text{for } \Psi, \Phi \in \mathcal{S} \qquad (6.9)$$

で定義されるhermitian formである。[$\vec{v}_j$について、bounded operatorを値に持つdistributionと考えることもできる。]

(6.8)式の左辺を考える物理的背景は次のとおりである。Qがあるガイガー計数管（実は真空に対して反応せず、粒子が通れば何か反応を示すものなら何でもよい）に対応しているとすれば、$Q(t, \vec{v}t)$はそれを時間t、空間位置$\vec{v}t$だけずらしたものに対応している。従って$Q(t, \vec{v}t)$に対し$t\to+\infty$まで反応を示すものがあれば、それは$\vec{v}$で走っている何ものか真空とは異るものであるということになる。t^3をかけてあるので、粒子の波束のtに比例した拡がりの為確率密度がt^{-3}に比例して小さくなるのを丁度補ってくれる。したがって、$\vec{v}_i \neq \vec{v}_j$ for $i \neq j$のとき

$$t^{3k}(\Psi, Q_1(t, t\vec{v}_1) \cdots Q_k(t, t\vec{v}_k) \Psi) \qquad (6.9)$$

はΨという状態で、粒子が少くともk個、それぞれ$\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_k$という速度で走っている確率密度に比例することになる。ここに粒子といったのは真空とは異る、時間と共にtに比例した領域に拡がる何ものかという程度の意味である。比例定数は、粒子が通った時に、Q_jに対応する機械がどういう確率で反応し、どういう値を登録するか【後者は人為的なもの】による。それを見つけるには、Ψとして一粒子状態【$\mathfrak{H}$の中で$\mathfrak{H}_0$と異り、$t\to+\infty$の$(\Psi Q(t, \vec{v}t)\Psi)t^3$の漸近極限が$\neq 0$なのは$\mathfrak{H}_1$のvectorだけであることが示

されるので，$\mathfrak{H}_1$と考えてよい］をとり，$k=1$の極限を計算すればよい。その結果は，定理3から$P(\vec{p}_1)$である。そこで他のΨについて，(6.9)の極限を$\prod_{i=1}^{k} P(\vec{p}_i)$で割ったものを考えることにより，与えられた状態ベクトルΨを$t\to+\infty$で眺めたときに，少くともk個の粒子が$\vec{v}_1\cdots\vec{v}_k$という速度で走っている確率密度は何かがわかる。［確率密度は$\prod_{i=1}^{k}\{d^3\vec{p}_i/dp_i^0\}$という測度に関して密度をとったもの。］$k+1$のものと$k$のものとを比較することにより，丁度$k$個が走っている確率密度を計算できる。この処法を$\Psi=\Psi^{out}[f_1\cdots f_m]$に適用すると，定理2より，この状態を$t=+\infty$で眺めれば，$f_1\cdots f_m$という波動関数で走っている粒子が$m$個あるように見えることがわかる。

$f_1\cdots f_m\in\mathcal{S}$，($f_i$の台)$\cap$($f_j$の台)$=$空 for $i\neq j$ のような$\{f_j\}$に対応する$\Psi^{out}[f_1\cdots f_m]$は$\mathfrak{H}_m^{out}$で total であるから，$\mathfrak{H}^{out}$のベクトルの物理的解釈にはこれで十分である。

$\mathfrak{H}^{in}$についても全く同じことが言える。

§7 ポテンシャル散乱との比較

二体ポテンシャルによるn体の散乱問題では，n個の変数$x_k\in R^3$，$k=1\cdots n$のL_2関数の作るヒルベルト空間$\mathfrak{H}_n=L_2(R^3)^{\otimes n}$の上で，ハミルトン作用素

$$H_n=\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{n}(\partial/\partial\vec{x}_k)^2+\sum_{k>\ell}^{n}V(\vec{x}_k-\vec{x}_\ell) \qquad (7.1)$$

を考える。変換$\vec{x}_k\to\vec{x}_k+\vec{a}$，$k=1\cdots n$は$\mathfrak{H}_n$の上のユニタリ作用素$T_n(\vec{a})$：$(T(\vec{a})\Psi)(\vec{x}_1,\cdots\vec{x}_n)=\Psi(\vec{x}_1-\vec{a},\cdots\vec{x}_n-\vec{a})$で誘起されるが，$H_n$は$T_n(\vec{a})$と可換で，しかも$T_n(\vec{a})$のスペクトル分解：$\mathfrak{H}_n=\int^{\oplus}\mathfrak{H}_n(\vec{p})\,d^3\vec{p}$，$T_n(\vec{a})=\int^{\oplus}e^{i(\vec{p},\vec{a})}d^3\vec{p}$に関して，

$H_n = \int^{\oplus} H_n(\vec{p})\, d^3\vec{p}$, $H_n(\vec{p}) = H_n(\vec{0}) + \frac{1}{2m_n}\vec{p}^2$ となることが、(7.1) で変数変換を行うことにより（または H_n のガリレー不変性より）わかるので、$H_n(0)$ を $\mathfrak{H}_n(0)$ の上で考えてもよい。

§1 の枠のような形をこの場合に考えるには、$\mathfrak{H}$ として $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{\oplus} \mathfrak{H}_n$（ただし $\mathfrak{H}_0 = C$ は便宜上加える）を考え、$U(a,1)$ としては $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{\oplus} \exp(ia^0 H_n) T_n(\vec{a})$ を考える。［$U(a,\Lambda)$ の代りにはガリレー変換の射影表現を考える。］ また $\mathfrak{A}(B)$ としては、$B = I \times \underset{\sim}{B}$, $I = (t_1, t_2)$, $\underset{\sim}{B} \subset R^3$ に対して、多分

$$\{ e^{itH_n} f_n f_m^* e^{-itH_m} ;\ n, m = 0, 1, 2, \dots,\quad t \in I,\ f_n \in \mathfrak{H}_n,$$
$$f_m \in \mathfrak{H}_m,\quad \operatorname{supp} f_n \in \underset{\sim}{B}^{\times n},\quad \operatorname{supp} f_m \in \underset{\sim}{B}^{\times m},\quad f_n, f_m \in \mathfrak{D} \} \qquad (7.2)$$

で生成される作用素の代数を考えればよい。ここに $A = fg^*$ とは x に対し

$Ax = (g, x) f$ で定義される線形作用素 A である。また $\mathfrak{D}$ は f_n, f_m に対応する波動関数が class $\mathfrak{D}$ であることを表わすものとする。

一粒子状態とは、$H_n(\vec{0})$ の離散的固有値に属する固有ベクトル $(n=1,2,\cdots)$ を指す。$n=1$ の場合はもともと与えられた粒子だが、$n>1$ はもともと与えられた粒子 n 個の束縛状態と呼ばれるものである。今 $n = n_1, \cdots, n_k$ のような粒子があったとして、［$n_j = 1$ であってもよい］ それらが散乱している状態に対応した Ψ^{out} をどのようにして作るかを、§5の処法に従って考えてみよう。

各粒子に対応するベクトルを $f_1 \cdots f_k$ とすると、$f_j \in \mathfrak{H}_{n_j}$ であるが、$\mathfrak{H}_{n_1+n_2} \supset \mathfrak{H}_{n_1} \otimes \mathfrak{H}_{n_2}$ のような natural な identification があるので、§5 の Ψ_t に相当するベクトルは、今の場合

$$\Psi_t = e^{iHt}\{ (e^{-iHt} f_1) \otimes (e^{-iHt} f_2) \otimes \cdots \otimes (e^{-iHt} f_k) \} \qquad (7.3)$$

である。ここに H が $f_j \in \mathfrak{H}_{n_j}$ に働くときは H_{n_j} とおなじであり，$\{\ \}$ に働くときは $\mathfrak{H}_{n_1+\cdots+n_k}$ に働く $H_{n_1+\cdots+n_k}$ とおなじである。§5 と同様の議論で $V(x) \in L_2 \cap L_1$ の場合，$\lim \Psi_t$ の存在を証明することができる。ただし f_j の微分可能性等が技術上必要になる。

特に (7.3) で $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$ の場合，$(H_0)_n = \sum_{j=1}^{n} (\partial/\partial\vec{x}_j)^2/2m$ を導入すると，(7.3) は

$$\Psi_t = e^{iH_k t} e^{-i(H_0)_k t} f_1 \otimes \cdots \otimes f_k \tag{7.4}$$

となり，$t \to +\infty$ の強極限の存在は wave matrix

$$W_k^+ = \lim_{t\to+\infty} e^{iH_k t} e^{-i(H_0)_k t} \tag{7.5}$$

の存在と同値であり，よく知られた結果となる。

§8 未解決の問題

重要な未解決の問題を二つあげておく。ポテンシャル散乱で (7.5) の存在の証明は非常に簡単だが，$W_k^+ \mathfrak{H}_k$ が $\mathfrak{H}_k$ と一致するかどうか等の問題は非常にむずかしい。物理的に予想されるのは次のような結論である。

$\{n_j\}_{j=1\cdots k}$ を固定した時，(7.3) の $t \to +\infty$ での極限で得られる space を $\mathfrak{H}^{out}(\{n\}_k)$ と書くことにすると $\mathfrak{H}_n = \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n \\ k=1\cdots n}} \mathfrak{H}^{out}(\{n\}_k)$ ただし $\mathfrak{H}^{out}(\{n\})$ は $H_n^{(i)}$ の離散的固有値に属する固有空間に対応するものである。§1 の公理系では，簡単の為離散的固有状態（一粒子状態）を一種類に限ってあるので $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{out} = \mathfrak{H}^{in}$ が物理的に望まれる。しかし §1 の枠では反例が存在する。そこで問題は物理的に意味のある公理を追加して望ましい結論が出るようにできないかということである。

これに関して次のような興味ある公理が提案されている。すなわち，コンパクトな任意のΔと，有界領域B（および $r>0$）を固定したとき，ベクトルの集合

$$\{\Psi=E(\Delta)Q\Omega;\ Q\in\mathcal{O}(B)'',\ \|Q\Omega\|\geqq e^{-mr}\|Q\|,\ \|\Psi\|\leqq 1\} \tag{8.1}$$

がコンパクトであるという條件である。ここに$\mathcal{O}(B)''$は$\mathcal{O}(B)$で生成されるW*代数である。実はこの條件だけでも不十分のようだが，これにC*代数的なある條件を加えると，知られている反例は皆排除することができる。

第二の問題はS行列の性質に関するものである。二体のポテンシャル散乱で次のことが知られている：二体の場合，$\mathfrak{h}_2(0)$はx_1-x_2のL_2関数の作るヒルベルト空間と考えることができて，そこですべて話をすればよい。また§5で導入したS作用素は必ずしも$\mathfrak{h}$全部で定義されないが，ポテンシャル散乱では，漸近状態を記述する$h_1\cdots h_m$の空間から$\Psi^{out}[h_1\cdots h_m]$の空間$\mathfrak{h}$へ$h_1\otimes\cdots\otimes h_m$を作ることによって移れるので，S行列$S_0$を$(S_0)=(W_2^+)^*W_2^-$で定義すると$S(h_1'h_2';h_1h_2)=(h_1'\otimes h_2', S_0\, h_1\otimes h_2)$となる。［S作用素の方は$W_2^-W_2^{+*}$である。］この$S_0$を$\mathfrak{h}_2(0)$に制限して考える。そのときガウス波束

$$\varphi(x)=e^{-(\vec{x}-\vec{x}_0)^2/2b^2+i(\vec{p}_0,\vec{x})} \qquad b=[(|\vec{x}_0|-a)/|\vec{p}_0|]^{1/2},\ |\vec{x}_0|>a \tag{8.2}$$

に対して

$$\|(S-1)\varphi\|<\mathrm{const}\ e^{-(|\vec{x}_0|-a)|\vec{p}_0|/2} \tag{8.3}$$

のような評価が成立する。ここにポテンシャル$V(r)$は$r>a$で0とする。この物理的意味は次のとおりである。$|\vec{x}_0|$が大きくすることは衝突する粒子がそのまま真直走ったときの最短距離（impact parameterとよばれる）が大きくなることを意味する。ポテンシャルのrangeがaならば$|\vec{x}_0|$がa

を越えて大きくなるとき、二粒子の散乱の起る確率は小さくなるべきである。ガウス波束を取ったのは、波束の大きさの影響を小さくするためである。(5.3)式は散乱の起る確率が、$|x|$ と共に指数的に小さくなることを示している。(5.3)式を得る際にガウス波束の拡がりの parameter σ も考えているが、実はこれは φ のフーリエ変換で $\vec{p}=0$ での値を小さくするためである。波束 φ のフーリエ変換は、運動量の確率分布を表すが、$\vec{p}=0$ の部分は、速度 0 の粒子に相当し、この部分は時間がたっても相互に離れないので物理的にいって散乱を起しやすいのである。実際 $\vec{p}$ は運動量の平均値で、その大きさが exponent の係数に入っているのもこの効果を表していると考えられる。

この様な結果を §1 の枠の中で証明することが第二の問題である。この際ポテンシャルが a より外で 0 になるという仮定の代りに使えるのは、(3.1) の $(Q_1, Q_2(x))_T$ が $\exp -md(x)$ で小さくなるということで、これは $Q_1, Q_2 \in \mathcal{O}(B)$ に対し §1 の枠の中で証明できる。(同様のことは (3.8) でも証明できる。)

参考文献 一般的には

R. Jost, The General Theory of Quantized fields, American Mathematical Soc. の Chapter VI を参照。ただし $\mathcal{O}(B)$ の代りに fields が用いられてある。

§8 の第1の問題については

R. Haag and J. A. Swieca, Commun. Math. Phys. 1 (1965), 308–320.

§8 の第2の問題については

W. Brenig and R. Haag; Fortshritte der Physik 7 (1959), 183–242.