数理解析研究所講究録
22巻 1967年 65-76

散乱の理論における定常的方法について

浅野 潔 (京大数研)

§1. 問題と結果.

我々が考察する問題は，自己共役作用素の絶対連続スペクトルの摂動論，およびいわゆる散乱理論の抽象的取扱いに関するものである。ここでは，文献 [1]－[4] において，Birman 等により述べられた結果（の1部）について解説する。

Hilbert space $\mathfrak{H}$ における2つの自己共役作用素 H_0, H_1 を考える。H_j $(j=0,1)$ の spectre 分解を $\int \lambda dE_\lambda^j$ とし，また $R_z^j = (H_j - zI)^{-1}$ とかく。E_λ^j から作られる spectral measure を $E^j(\Delta)$（Δ は，R の Lebesgue 可測集合）とし，$\mathfrak{G}_j = \{ f \in \mathfrak{H} ;\ (E^j(\Delta)f, f)$ が R 上の絶対連続測度$\}$ とする。$\mathfrak{G}_j$ は H_j を reduce する $\mathfrak{H}$ の閉部分空間である。$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{G}_j$ への正射影を P_j とかく。

我々の目的は，H_0 と H_1 とが適当な意味で‘近い’ときに，

(I) H_0 と H_1 の絶対連続な部分（i.e. H_0P_0 と H_1P_1）の unitary equivalence を示す。

(II) Wave operator $W_\pm = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0} P_0$ の存在を示す。

(III) Scattering operator $S = W_+^* W_-$ の性質を調べる

などである。

$\mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{H}_\beta$ を任意の Hilbert space とするとき，$\mathfrak{H}_\alpha$ から $\mathfrak{H}_\beta$ への nuclear operator の全体を $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\beta)$，Hilbert-Schmidt operator の全体を $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\beta)$ とかくことにする。$\mathfrak{C}_p(\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\alpha)$ を，たんに $\mathfrak{C}_p(\mathfrak{H}_\alpha)$ とかく。また $\mathfrak{H}_\alpha$ における bounded operator の全体を，$\mathcal{B}(\mathfrak{H}_\alpha)$ で表わす。問題 (i) および (ii) に関して，次の定理が成立つ。

定理 1. 次の条件：

(I) $\quad H_1 - H_0 = V \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$

を仮定する。このとき，次の条件をみたす $W_\pm \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ が存在する：

1) $\quad W_\pm E_0(\Delta) = E_1(\Delta) W_\pm, \qquad W_\pm P_0 = P_1 W_\pm = W_\pm,$

$W_\pm^* W_\pm = P_0, \qquad W_\pm W_\pm^* = P_1 \qquad \&$

$W_\pm H_0 P_0 = H_1 P_1 W_\pm.$

2) $\quad W_\pm = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0} P_0 \qquad \&$

$W_\pm^* = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_0} e^{-itH_1} P_1.$

上の定理の内容自体は，よく知られた結果である。証明には，大別して，“時間を含む方法”と“時間を含まない方法（定常的方法）”とがある（文献 [5]，[7] − [10] 参照）。ここでは，[3] においてスケッチされた方法で証明を与えよう。

簡単な考察により，条件 (I) のもとでは，$\mathfrak{H}$ を separable と仮定しても一般性を失わないことがわかる。従って，$\mathfrak{H}_j$ をいわゆる “direct integral” の形で表わすことにより，$H_j P_j$ を“対角化”することができる。$\mathfrak{H}_j = \int_{\Lambda_j} \oplus \mathfrak{H}^j_\lambda \, d\lambda$ としよう。定理 1 により，$\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda$．かつ，$\mathfrak{H}^0_\lambda$ から $\mathfrak{H}^1_\lambda$ への unitary (i.e. isometric & onto) operator

$W_\pm(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ が存在して，$f(\lambda)\in\mathfrak{g}_0$ に対して $(W_\pm f)(\lambda)=W_\pm(\lambda)f(\lambda)$ $\in\mathfrak{g}_1$ が a.e. $\lambda\in\Lambda$ に対して成立つ。

$S=W_+^* W_-$ により *scattering operator* S を定義しよう。S は $\mathfrak{g}_0$ における *unitary operator* となり，かつ，$\mathfrak{h}_\lambda^0$ における *unitary operator* S_λ が存在して，$f(\lambda)\in\mathfrak{g}_0$ に対して $(Sf)(\lambda)=S_\lambda f(\lambda)$ が a.e. $\lambda\in\Lambda$ に対して成立つ。S_λ を *S-matrix* とよぶ。

条件 (I) の下で，$T_z=P_0(I-VR_z)VP_0\in\mathfrak{C}_1(\mathfrak{g}_0)$。故に，$\mathfrak{g}_0=\int_\Lambda\oplus\mathfrak{h}_\lambda^0\,d\lambda$ において，T_z は"核表示"をもつ，すなわち $T_z(\lambda,\mu)\in\mathfrak{C}_1(\mathfrak{h}_\mu^0,\mathfrak{h}_\lambda^0)$ $(\lambda,\mu\in\Lambda)$ が存在して，$f(\lambda)\in\mathfrak{g}_0$ に対して $(T_zf)(\lambda)=\int_\Lambda T_z(\lambda,\mu)f(\mu)\,d\mu$ (a.e. $\lambda\in\Lambda$)。$T_z(\lambda,\mu)$ は，(λ,μ) の（強）可測函数であり，さらに $T_z(\lambda,\lambda)$ も λ の（強）可測函数である。S_λ に関して，次の定理が成立つ。

定理2.　条件 (I) のもとで，

1)　$t\text{-}\lim_{z\to\nu\pm i0}T_z(\lambda,\mu)\equiv T_{\nu\pm i0}(\lambda,\mu)$ が，a.e. $\nu\in R$，a.e. $\lambda\in\Lambda$，a.e. $\mu\in\Lambda$ に対して存在する（$t\text{-}\lim$ は，$\mathfrak{C}_1(\mathfrak{h}_\mu^0,\mathfrak{h}_\lambda^0)$ の位相に関する収束の意），

2)　$S_\lambda=I_\lambda-2\pi i\,T_{\lambda+i0}(\lambda,\lambda)$　(a.e. $\lambda\in\Lambda$)，

3)　$K(\lambda)\in\mathfrak{C}_1(\mathfrak{h}_\lambda^0)$ (a.e. $\lambda\in\Lambda$) が存在して，$S_\lambda=e^{-2\pi iK(\lambda)}$，かつ $\int_\Lambda|K(\lambda)|_1\,d\lambda\le\|V\|_1$。ただし，$|K(\lambda)|_1$ は $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{h}_\lambda^0)$ における *trace norm*，$\|V\|_1$ は，$\mathfrak{C}_1(\mathfrak{h})$ における *trace norm* とする。

条件 (I) のもとで，$VR_z^0\in\mathfrak{C}_1(\mathfrak{h})$ $(\mathrm{Im}\,z\neq0)$。従って，*matrix* の

determinant の拡張として，$\Delta(z) = \det(I + VR^0_z)$ なる函数が定義される。$\Delta(z)$ は，$\mathrm{Im}\, z \neq 0$ で解析的であり，かつ $\Delta(\bar{z}) = \overline{\Delta(z)}$。$\Delta(z)$ と S_λ の間には，次の関係がある。

定理3. 条件 (I) のもとで，

1) $\Delta(z) = e^{\int_\Lambda \frac{\xi(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda}$，ここに $\xi(\lambda) = \mathrm{tr}\, K(\lambda)$。故に，$\lim_{z \to \lambda \pm i0} \Delta(z) \equiv \Delta(\lambda \pm i0)$ が a.e. $\lambda \in R$ に対して存在する，

2) $\det S_\lambda = e^{-2\pi i \xi(\lambda)} = \dfrac{\Delta(\lambda - i0)}{\Delta(\lambda + i0)}$ (a.e. $\lambda \in \Lambda$)。

定理2および3にどんな数理物理的な意味があるかは，筆者にはわからないが，たとえば H_0 と H_1 とが適当な固有函数展開をもつ場合には，これらの結果は，いわゆる *phase shift formula* や，S の相互作用表示などと関係がつくようである。また，条件 (I) は非常に強い制限なので，これをもっと緩い条件におきかえることが応用上望ましいが，この問題については，§3 でふれたい。応用上は，$\mathfrak{H} = L^2(R^n_x)$，$H_0 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$ であることが多いが，この場合 H_1 が固有函数展開をもつと，いろいろと好都合である。§3 にあげるたいていの条件のもとで，H_1 の絶対連続な部分は，一般化された固有函数をもつけれども，H_1 が特異連続な部分をもたないことを保証する条件は，別に課さなければならない（[9] 参照）。

§2. 定理1の証明.

[3] による証明では，次の補題が重要な役割を演ずる。

補題. A を $\mathfrak{H}$ における自己共役作用素 ($A = \int \lambda dF_\lambda$)，$\Gamma_z =$

$(A - zI)^{-1}$，$D \in \mathfrak{C}_2(\mathfrak{H})$ とする。このとき，

1)　任意の $f \in \mathfrak{H}$ に対して，$DF_\lambda f$ は λ の（強）有界変動函数であり，従って，a.e. λ に対して（強）微分 $\frac{d}{d\lambda}(DF_\lambda f)$ が存在する。$\frac{d}{d\lambda}(DF_\lambda f)$ は，λ の（強）可測函数である；

2)　任意の $f \in \mathfrak{H}$ に対して，$s\text{-}\lim_{z \to \mu \pm i0} D\Gamma_z f \equiv D\Gamma_{\mu \pm i0} f$ が a.e. μ で存在し，かつ $\text{p.v.}\int \frac{1}{\lambda - \mu} d(DF_\lambda f)$ も a.e. μ で存在して，a.e. μ で

$$D\Gamma_{\mu \pm i0} f = \text{p.v.}\int \frac{1}{\lambda - \mu} d(DF_\lambda f) \pm \pi i \frac{d}{d\mu}(DF_\mu f),$$

3)　$D^* F_\lambda D$ は $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$ の位相で（強）有界変動函数である。従って，a.e. λ で $\frac{d}{d\lambda}(D^* F_\lambda D) \equiv K_\lambda \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$ が存在し，（強）可測となる。

4)　$s\text{-}\lim_{z \to \mu \pm i0} D^* \Gamma_z D \equiv D^* \Gamma_{\mu \pm i0} D \in \mathfrak{C}_2(\mathfrak{H})$ が a.e. μ で存在し，かつ $\text{p.v.}\int \frac{1}{\lambda - \mu} d(D^* F_\lambda D)$ も a.e. μ で存在して，a.e. μ で

$$D^* \Gamma_{\mu \pm i0} D = \text{p.v.}\int \frac{1}{\lambda - \mu} d(D^* F_\lambda D) \pm \pi i \frac{d}{d\mu}(D^* F_\mu D),$$

ここに $s\text{-}\lim$ は $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{H})$ における収束を意味する。

定理1の証明にかかろう。$Q_z^0 = I + V R_z^0$，$Q_z^1 = I - V R_z^1$ とおく。簡単な計算により，

(1)　$Q_z^1 Q_z^0 = Q_z^0 Q_z^1 = I$，

(2)　$R_z^0 - R_{\bar{z}}^0 = Q_z^{0*}(R_z^1 - R_{\bar{z}}^1) Q_z^0$，

(3)　$Q_z^{1*}(R_z^0 - R_{\bar{z}}^0) = (R_z^1 - R_{\bar{z}}^1) Q_z^0$．

(2)，(3) より，任意の $f, g \in \mathfrak{H}$ に対して，

(4)　$((R_z^0 - R_{\bar{z}}^0) f, g) = ((R_z^1 - R_{\bar{z}}^1) Q_z^0 f, Q_z^0 g)$

(5)　$((R_z^0 - R_{\bar{z}}^0) f, Q_z^1 g) = ((R_z^1 - R_{\bar{z}}^1) Q_z^0 f, g)$．

(4), (5) において，$z \to \mu \pm i0$ として両辺の極限を考える。そのためにいくつかの記号を定義する： V が自己共役であることに注意すると，$B = |V|^{\frac{1}{2}}$, $\Theta = \mathrm{sgn}\, V$ とおいて，$V = B\Theta B$ とかくことができる，ここに，$B \in \mathbb{C}_2(\mathfrak{H})$, $\Theta \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$。 $f \in \mathfrak{H}$ に対して，$BR^j_{\mu\pm i0}f$ が存在して補題 2) の等式が成立する μ の全体を Λ^j_f で表わす。また，$BR^j_{\mu\pm i0}B$ が存在して補題 4) の等式が成立する μ の全体を Λ^j で表わす．最後に，f, $g \in \mathfrak{H}$ に対して，$\lim_{z\to\mu\pm i0}((R^j_z - R^j_{\bar{z}})f, g) = \pm 2\pi i \frac{d}{d\mu}(E^j_\mu f, g)$ となる μ の全体を $\Lambda^j_{f,g}$ で表わす。明らかに，Λ^j_f, Λ^j, $\Lambda^j_{f,g}$ 等の補集合は，測度 0 の集合である。$C \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ とすると $CB \in \mathbb{C}_2(\mathfrak{H})$ であるが，$(CB)R^j_{\mu\pm i0}f = C(BR^j_{\mu\pm i0}f)$ であるから，我々はこれを $CBR^j_{\mu\pm i0}f$ とかく。また，$s\text{-}\lim_{z\to\mu\pm i0} Q^j_z f = s\text{-}\lim_{z\to\mu\pm i0}(I + (-1)^j VR^j_z)f = f + (-1)^j \times VR^j_{\mu\pm i0}f = f + (-1)^j B\Theta BR^j_{\mu\pm i0}f$ を $Q^j_{\mu\pm i0}f$ とかく。

(4) において $z \to \mu \pm i0$ としよう。(4) の左辺は，$\mu \in \Lambda^0_{f,g}$ ならば $\pm 2\pi i \frac{d}{d\mu}(E^0_\mu f, g)$ に近ずく。次に

$$
\begin{aligned}
(4)\text{ の右辺} &= ((R^1_z - R^1_{\bar{z}})(I + VR^0_z)f, (I + VR^0_{\bar{z}})g) \\
&= ((R^1_z - R^1_{\bar{z}})f, g) + (\Theta BR^0_z f, B(R^1_{\bar{z}} - R^1_z)g) \\
&\quad + (B(R^1_z - R^1_{\bar{z}})f, \Theta BR^0_{\bar{z}} g) \\
&\quad + (B(R^1_z - R^1_{\bar{z}})B\cdot\Theta BR^0_z f, \Theta BR^0_{\bar{z}} g)
\end{aligned}
$$

より，次のことがわかる： $z \to \mu \pm i0$ のとき，

第 1 項 $\longrightarrow \frac{d}{d\mu}(E^1_\mu f, g) \qquad (\mu \in \Lambda^1_{f,g})$,

第 2 項 $\longrightarrow (\Theta BR^0_{\mu\pm i0}f, \mp 2\pi i \frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu g)) \qquad (\mu \in \Lambda^0_f \cap \Lambda^1_g)$,

第 3 項 $\longrightarrow (\pm 2\pi i \frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu f), \Theta BR^0_{\mu\pm i0} g) \qquad (\mu \in \Lambda^1_f \cap \Lambda^0_g)$,

第4項 → $\left(\pm 2\pi i \frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu B)\cdot \Theta B R^0_{\mu\pm i0} f,\ \Theta B R^0_{\mu\pm i0} g\right)$

$(\mu \in \Lambda^1 \cap \Lambda^0_f \cap \Lambda^0_g)$.

故に (4) の右辺は，$\mu \in \Lambda^0_f \cap \Lambda^1_f \cap \Lambda^0_g \cap \Lambda^1_g \cap \Lambda^1 \cap \Lambda^1_{f,g} = \Sigma^1_{f,g}$ ならば，

(6) $$\pm 2\pi i \left\{ \frac{d}{d\mu}(E^1_\mu f, g) + \left(\Theta B R^0_{\mu\pm i0} f, \frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu g)\right) + \left(\frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu f), \Theta B R^0_{\mu\pm i0} g\right) + \left(\frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu B)\cdot \Theta B R^0_{\mu\pm i0} f, \Theta B R^0_{\mu\pm i0} g\right)\right\}$$
$$= \pm 2\pi i \frac{d}{d\lambda}\Big[(E^1_\lambda f, g) + (\Theta B R^0_{\mu\pm i0} f, BE^1_\lambda g) + (BE^1_\lambda f, \Theta B R^0_{\mu\pm i0} g) + (BE^1_\lambda B\cdot \Theta B R^0_{\mu\pm i0} f, \Theta B R^0_{\mu\pm i0} g)\Big]_{\lambda=\mu}$$

に近ずく。一方 (6) の [ ] の中は ($\mu \in \Lambda^0_f \cap \Lambda^0_g$ ならば存在して)，$(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, Q^0_{\mu\pm i0} g)$ に等しい。(6) の [ ] 内の形から，$\lambda \in \Lambda^1_{f,g} \cap \Lambda^1_f \cap \Lambda^1_g \cap \Lambda^1$ ならば，$\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, Q^0_{\mu\pm i0} g) = \frac{d}{d\lambda}[\quad]$ が存在する。そして $\mu \in \Sigma^1_{f,g}$ ならば，$\frac{d}{d\lambda}[\quad]$ において $\lambda=\mu$ とおくことができ，(6) が得られる。結局，$\lambda, \mu \in \Sigma^1_{f,g}$ ならば $\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, Q^0_{\mu\pm i0} g)$ が存在し，$\lambda=\mu$ とおくと (6) が得られることがわかった。

以上のことから，

(7) $$\frac{d}{d\mu}(E^0_\mu f, g) = \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, Q^0_{\mu\pm i0} g)\Big|_{\lambda=\mu} \quad (\mu \in \Lambda^0_{f,g} \cap \Sigma^1_{f,g}).$$

(7) の右辺は明らかに μ の可測函数である ((6) の形にかけるから)。

同様に (5) において $z \to \mu \pm i0$ とすることにより，

(8) $$\frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda f, Q^1_{\mu\pm i0} g)\Big|_{\lambda=\mu} = \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, g)\Big|_{\lambda=\mu}$$
$$(\mu \in \Lambda^0_{f,g} \cap \Lambda^0_f \cap \Lambda^1_g \cap \Lambda^1_{f,g}).$$

(8) の両辺が μ の可測函数になることも，各辺を (6) のような形に分解してみればわかる。

$\lambda, \mu \in \Lambda^1_{f,g} \cap \Lambda^0_f \cap \Lambda^1_g \cap \Sigma^1_{f,f} \cap \Lambda^0_{f,f} \cap \Lambda^1_{g,g}$ とすると，

$$(9)\quad \left|\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ g)\right| \le \left\{\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ Q^0_{\mu\pm i0}f)\right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda g,\ g)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

が成立つ。(9) において $\lambda=\mu$ とおけば，(7) より

$$\left|\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ g)\Big|_{\lambda=\mu}\right| \le \left\{\frac{d}{d\mu}(E^0_\mu f,\ f)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{d}{d\mu}(E^1_\mu g,\ g)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

故に

$$(10)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ g)\Big|_{\lambda=\mu}\right| d\mu \le \|P_0 f\|\,\|P_1 g\|.$$

我々は次の式によって operator $W_\pm$ を定義しよう：

$$(11)\quad (W_\pm f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda f,\ Q^1_{\mu\pm i0}g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu .$$

(10) によって $W_\pm$ を定義する積分が収束し，$|(W_\pm f, g)| \le \|P_0 f\|\|P_1 g\|$ より $W_\pm \in B(\mathfrak{H})$ がわかる。$W_\pm$ の第2の表示式は (8) による。

$W_\pm P_0 = P_1 W_\pm = W_\pm$ は，(11) より明らか。$\Delta=(a,b]$ に対して，

$$\begin{aligned}
(W_\pm E^0(\Delta)f,\ g) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda E^0(\Delta)f,\ Q^1_{\mu\pm i0}g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int_{\Delta}\frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda f,\ Q^1_{\mu\pm i0}g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int_{\Delta}\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ E^1(\Delta)g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= (W_\pm f,\ E^1(\Delta)g) \\
&= (E^1(\Delta)W_\pm f,\ g).
\end{aligned}$$

故に $W_\pm E^0(\Delta) = E^1(\Delta)W_\pm$。これより $W_\pm H_0 P_0 = H_1 P_1 W_\pm$ も得られる。

最後に $W_\pm^* W_\pm = P_0$（複号同順）を示そう。やや形式的に計算すると

$$\begin{aligned}
(W_\pm f,\ W_\pm g) &= \int \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ W_\pm g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int d\mu\,\frac{d}{d\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d}{d\xi}(Q^0_{\mu\pm i0}f,\ E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0}g)\Big|_{\xi=\eta} d\eta\right]_{\lambda=\mu}
\end{aligned}$$

$$= \int d\mu \, \frac{d}{d\xi}(Q^0_{\mu\pm i0}f, E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0}g)\Big|_{\xi=\eta=\mu}$$
$$= \int \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f, Q^0_{\mu\pm i0}g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu$$
$$= \int \frac{d}{d\mu}(E^0_\mu f, g)\, d\mu$$
$$= (P_0 f, g)。$$

これより $W_\pm^* W_\pm = P_0$ を得る。ただし上の計算を合理化するためには，

$$(Q^0_{\mu\pm i0}f, E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0}g)$$
$$= (E^1_\xi f, g) + (\Theta B R^0_{\mu\pm i0}f, BE^1_\xi g)$$
$$+ (BE^1_\xi f, \Theta B R^0_{\eta\pm i0}g) + (BE^1_\xi B\ \Theta B R^0_{\mu\pm i0}f, \Theta B R^0_{\eta\pm i0}g)$$

より，ξ，η，$\mu \in \Sigma^1_{f,g}$ ならば $\frac{d}{d\xi}(Q^0_{\mu\pm i0}f, E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0}g)$ が存在し，かつ $\xi=\eta=\mu$ とおくことができることに注意すればよい。

同様の計算より $W_\pm W_\pm^* = P_1$ が得られる。これで 1) の証明は完了した。

2) は，Fourier 変換と Hilbert 変換を用いて簡単に証明される（[5] 参）。

§3. 補足.

我々は $S = W_+^* W_-$ によって S を定義した。$(Sf, g) = (W_- f, W_+ g)$ に，§2 の後半の計算を適用すると，S の表示式が得られる：

$$(12)\quad (Sf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu-i0}f, Q^0_{\mu+i0}g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda Q^1_{\mu+i0} Q^0_{\mu-i0}f, g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu .$$

ここで第1の表示式から第2の表示式を得るために (8) を用いた。定理2の 2) は，(12) の後半の式から証明できる。

定理2および3の証明は省略して，定理1の条件 (I) を緩めることを考えよう。'作用素の函数' なる概念を用いると，条件 (I) は次のように緩

められる（［7］参照）：

(II)　次の条件をみたす 'admissible' な函数の列 $\{\phi_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する：

1)　$\phi_n(\lambda)$ は $(-n, n)$ で univalent，

2)　$\phi_n(H_1) - \phi_n(H_0) \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$.

ここに $R=(-\infty,\infty)$ で定義された実数値函数 $\phi(\lambda)$ が 'admissible' とは，"有限個の開区間 I_k が存在して，① $R = \cup \bar{I}_k$，② 各 I_k 上で $\phi(\lambda)$ は狭義単調，連続微分可能，$\phi'(\lambda) \neq 0$ かつ $\phi(\lambda)$ は有界変動" なることをいう．

たとえば，次の条件 (II)′ から (II) が従う．

(II)′　ある整数 $k>0$ と z ($\mathrm{im}\, z \neq 0$) に対して $(R^1_z)^k - (R^0_z)^k \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$.

我々はまた，条件 (II) をやや異なる方向に緩めることができる．$\Delta = [a, b]$ に対して，次の条件 (III) は $H_0 P_0 E^0(\Delta)$ と $H_1 P_1 E^1(\Delta)$ との unitary equivalence を与える $W_\pm(\Delta)$ の存在を保証する（［2］参照）：

(III)　$E^1(\Delta) H_1 E^0(\Delta) - E^1(\Delta) H_0 E^0(\Delta) \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$，かつ $\Delta_n \subset \Delta$ が存在して $\Delta - \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は測度 0 の集合で $E^1(\Delta^c) E^0(\Delta_n)$，$E^0(\Delta^c) E^1(\Delta_n) \in \mathfrak{C}_\infty(\mathfrak{H})$. ここに $\mathfrak{C}_\infty(\mathfrak{H})$ は，$\mathfrak{H}$ の完全連続作用素の全体を表わす．

条件 (III) のもとで，定理1の結果は，P_0 を $P_0 E^0(\Delta)$ に P_1 を $P_1 E^1(\Delta)$ におきかえた形で 1)，2) とも成立する．特に $\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(H_1)$ なるときには，条件 (III) の後半は，"$E^1(\Delta^c \cap [-N, N]) E^0(\Delta_n)$，$E^0(\Delta^c \cap [-N, N]) E^1(\Delta_n) \in \mathfrak{C}_\infty(\mathfrak{H})$ (十分大きな N に対して)" と緩められる．このことから，たとえば次の条件 (III)′ が $W_\pm(\Delta)$ の存在を保証することがわかる

(III)′　$\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(H_1)$，かつ $(R^1_z)^k (H_1 - H_0)(R^0_z)^l \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$　($k, l > 0$).

文　献

[1] M. Š. Birman, Conditions for the existence of wave operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 143 (1962), 506–509; Soviet Math. Dokl. 3 (1962), 408–411.

[2] M. Š. Birman, A local criterion for the existence of wave operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 159 (1964), 485–488; Soviet Math. Dokl., 5 (1964), 1505–1509.

[3] M. Š. Birman and S. B. Entina, A stationary approach in the abstract theory of scattering, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 155 (1964), 506–508; Soviet Math. Dokl., 5 (1964), 432–435.

[4] M. Š. Birman and M. G. Kreĭn, On the theory of wave operators and scattering operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 144 (1962), 475–478; Soviet Math. Dokl., 3 (1962), 740–744.

[5] T. Kato, On finite dimensional perturbations of self-adjoint operators, J. Math. Soc. Japan, 9 (1957), 239–249.

[6] 加藤敏夫, 散乱演算子と連続スペクトルの摂動, 数学, 9 (1957), 75–84.

[7] T. Kato, Wave operators and unitary equivalence, Pac. J. Math., 15 (1965), 171–180.

[8] S. T. Kuroda, Stationary methods in the theory of scattering, Perturbation theory and its applications in quantum mechanics, 185–214, John Wiley & Sons, New York, 1966.

[9] S. T. Kuroda, An abstract stationary approach to perturbations of continuous spectra and scattering theory, to appear.

[10] 黒田成俊，散乱の定常論と固有函数展開，I，数学，18 (1966), 74-85, II, 18 (1966), 137-144.

付記.

散乱の問題を取扱う定常的方法には，他に黒田氏（[8], [9]）によって開発された興味深い方法がある．Birman 等の方法が direct integral 的であるのに対して，黒田氏の方法は Hellinger-Hahn 的であるという感じである．黒田氏の方法は，黒田氏自身が [10] で解説しておられるので，ここでは述べなかった。なお [10] の §1 は，定常的方法に対する入門的解説になっている。