数理解析研究所講究録
22巻 1967年 18-26

Kowalewski 系に対する Cauchy 問題について

阪大 教養 山本 稔

1 序 m次元 Euclid 空間 R^m の元を $x=(x_1,\cdots,x_m)$ で, m次元複素空間 C^m の元を $z=x+iy=(x_1+iy_1,\cdots,x_m+iy_m)$, $(i=\sqrt{-1})$ で表わす 又正数 T,γ に対し次のように定義する:

$$D(T)=\{(t,x);\ 0\leqq t\leqq T,\ x\in R^m\}$$

$$\mathcal{D}_\gamma(T)=\{(t,z);\ 0\leqq t\leqq T,\ z=x+iy\in C^m,\ |y_j|<\gamma,\ j=1,2,\cdots,m\}.$$

$f(t,z)\in \mathbb{C}^{\ell}_{(t,z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$ は関数 $f(t,z)$ が領域 $\mathcal{D}_\gamma(T)$ で (t,z) に関して ℓ 回連続的微分可能であることを, $f(t,z)\in A_{(z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$ は関数 $f(t,z)$ が各 $t\in[0,T]$ に対し, z の関数として複素解析的正則なることを表わす. 又上の *Notation* で z を x に, $\mathcal{D}_\gamma(T)$ を $D(T)$ におきかえたものは z のところを *real* x とおいて, 夫々 (t,x) について ℓ 回連続微分可能 ($D(T)$ で), x の関数として実解析的正則なることを表わすことにする.

正数 a,b に対し関数族 $\mathfrak{F}(a,b)$ を次のように定義しよう:

$$\mathfrak{F}(a,b)=\{f(t,x)\in \mathbb{C}^1_{(t,x)}[D(T)]\ \big|\ {}^{\exists}M>0;\ |f(t,x)|\leqq M e^{ae^{b|x|}}\ \text{on}\ D(T)\}.$$

小論では, 次の *Kowalewski* 系の偏微分方程式:

$$(1.1)\qquad \frac{\partial u_\mu}{\partial t}=\sum_{\nu=1}^{k}\Big\{\sum_{j=1}^{m}A_{\mu\nu j}(t,x)\frac{\partial u_\nu}{\partial x_j}+B_{\mu\nu}(t,x)u_\nu\Big\}+f_\mu(t,x)$$

の初期条件:

$$(1.2)\qquad u_\mu(0,x)=\varphi_\mu(x)\qquad \mu=1,2,\cdots,k.$$

をみたす，大局的解の存在を，係数にたいする或る条件の下で（定理1），解の属する class を $\mathfrak{F}(a,b)$ に限ったときの一意性を，係数にたいする或る条件のもとに（定理2）示すのが目的である。

解の存在については M. Nagumo [3] の方法による．尚 このような大局的解の，解の growth order を制限しての一意性問題は すでに S. Mizohata [2]， I. M. Gelfand - G. E. Schilov [1] においてあつかわれたが，更に最近 T. Yamanaka [6] においても I. M. Gelfand - G. E. Schilov の方法を用いて論ぜられた。
こゝでは M. Yamamoto [4] の証明を修正した形でのべよう．

2. 仮定と定理

仮定

(I) $A_{\mu\nu j}(t,z)$, $B_{\mu\nu}(t,z)$, $f_\mu(t,z) \in \mathbb{C}_{(t,z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$.

(II). $A_{\mu\nu j}(t,z)$, $B_{\mu\nu}(t,z) \in A_{(z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$ 且

$\mathcal{D}_\gamma(T)$ で $|A_{\mu\nu j}(t,z)| \leqq A$, $|B_{\mu\nu}(t,z)| \leqq B$ である．

(III) $f_\mu(t,z) \in A_{(z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$ かつ $\varphi_\mu(z) \in A_{(z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$.

定理 1 （解の存在）

仮定 (I), (II), (III) のもとで，正数 T_1 $(0 < T_1 \leqq T)$ および正数 γ_1 $(0 < \gamma_1 < \gamma)$ が存在して，初期条件 (1.2) をみたす、方程式 (1.1) の解 $u(t,z) = (u_1(t,z), \cdots, u_k(t,z))$ が $\mathbb{C}^1_{(t,z)}[\mathcal{D}_{\gamma_1}(T_1)] \cap A_{(z)}[\mathcal{D}_{\gamma_1}(T_1)]$ の中に存在する.

定理 2.（解の一意性）

仮定(I),(II)のもとで，$u_\mu(t,x)$, $v_\mu(t,x)$ $(\mu=1,2,\cdots,k)$ を，同じ初期条件 (1.2) をみたす (1.1) の解とし且 $u_\mu, v_\mu \in \bigcup_b \mathcal{F}(a,b)$ ならば $D(T)$ で $u_\mu(t,x) \equiv v_\mu(t,x)$ $(\mu=1,2,\cdots k)$ である。

3. 証明の準備

補題 1 $G(\delta)=\{z=x+iy \in C^m;\ |z_j|<\delta,\ j=1,2,\cdots,m\}$ とし関数 $f(z)=f(z_1,\cdots,z_m)$ は $G(\delta)$ で複素解析的で，更に正数 M, α が存在して，$(\ \rho=\delta-\max_{1\le j\le m}|z_j|$ とするとき$)$ 不等式：

(3.1) $\quad |f(x_1+iy_1,\cdots,x_m+iy_m)| \leqq M\cdot\rho^{-\alpha}$

をみたすならば，$f(z)$ は次の不等式をみたす：

(3.2) $\quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1+iy_1,\cdots,x_m+iy_m)\right| \leqq \dfrac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^\alpha}M\cdot\rho^{-\alpha-1}$

証明 $G(\delta)$ の任意の点 z° と，j $(1\leqq j\leqq m)$ に対し，z_j-平面に円 C_j を $C_j=\{z_j;\ |z_j-z_j^\circ|=\dfrac{\rho}{1+\alpha}\}$ $(\rho=\delta-\max|z_j^\circ|)$ 描く。

$z_j\in C_j$ ならば $\delta-|z_j|\geqq\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\rho$ であるから

$$|f(z)|\leqq M\left(\rho-\frac{\alpha}{1+\alpha}\rho\right)^{-\alpha}=\frac{(1+\alpha)^\alpha}{\alpha^\alpha}M\cdot\rho^{-\alpha}.$$

したがって Cauchy の積分表示式によって

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(z^\circ)\right| \leqq \frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^\alpha}\cdot M\cdot\rho^{-\alpha-1}$$ を得る。

定理 1，定理 2 の証明で，我々は $\varphi_\mu(x)\equiv 0$ と仮定しても一般性を失なわない。従って今後 $\varphi_\mu(x)\equiv 0$ と仮定する。このとき (1, 1), (1.2) は次の微分積分方程式 (3.3) と同等になる：

(3.3) $\qquad u_\mu(t,x)=\Phi_\mu[u(t,x)]$

こゝで $\Phi_\mu[u]$ は次の式で定義される.

$$\Phi_\mu[u]=\sum_{\nu=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{m}\int_0^t A_{\mu\nu j}(\tau,x)\frac{\partial u_\nu}{\partial x_j}(\tau,x)d\tau+\int_0^t B_{\mu\nu}(\tau,x)u_\nu(\tau,x)d\tau\right\}$$
$$+\int_0^t f_\mu(\tau,x)\,d\tau.$$

このとき次の局所存在定理が成立する.(M. Nagumo [3] 参照).

<u>補題 4</u>　仮定 (I), (II), (III) のもとに, 任意の $x^0\in R^m$ に対して $\Delta(x^0)$ の任意の閉領域で $\mathbb{C}^1_{(t,z)}\cap A_{(z)}$ に属する (3,3) の解が存在する. こゝに $\Delta(x^0)=\{(t,z)\,;\,0\leq t\leq T_1,\ |z_j-x_j^0|<R_1-L_1t\}$,

$$0<R_1<\mathrm{Min}\left\{1,\ \gamma,\ \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{1+\alpha}(1-\alpha)\cdot\frac{mA}{B}\right\},$$

$$L_1=\frac{mkA}{\kappa}\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{1+\alpha},\qquad T_1=\mathrm{Min.}\{T,\ R_1/L_1\}$$ である.

ただし α,κ は $0<\alpha<1$, $0<\kappa<1$ をみたす任意に与えられた数である。

<u>証明</u>　まず $g_\mu(t,z)\in\mathbb{C}^1_{(t,z)}\cap A_{(z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$ ならば $\Phi_\mu[g(t,z)]\in\mathbb{C}^1_{(t,z)}\cap A_{(z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$ であることに注意する.

次に解の存在を逐次近似法で証明するため, 関数列 $\{u_\mu^{(n)}(t,z)\}$ を次のように定義しよう:

$$(3.4)\quad\begin{cases}u_\mu^{(0)}(t,z)\ \equiv\ 0\\ u_\mu^{(n+1)}(t,z)\ =\ \Phi_\mu[u^{(n)}(t,z)]\ ,\quad n=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

$u_\mu^{(0)}(t,z)\in\mathbb{C}^1_{(t,z)}\cap A_{(z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$ であるから $u_\mu^{(n+1)}(t,z)\in\mathbb{C}^1_{(t,z)}\cap A_{(z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$ が $n=0,1,2,\cdots$ に対してなりたつ.

こゝで簡単のために $\Psi_\mu[u]=\Phi_\mu[u]-\int_0^t f_\mu(\tau,z)\,d\tau$ とおくと $u_\mu^{(\ell+1)}-u_\mu^{(\ell)}=\Psi_\mu[u^{(\ell)}-u^{(\ell-1)}]$ と表わせるから

$$u_\mu^{(n+1)}(t,z)=\sum_{\ell=1}^{n}\{u_\mu^{(\ell+1)}(t,z)-u_\mu^{(\ell)}(t,z)\}+u_\mu^{(1)}(t,z)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \Psi_\mu [u^{(\ell)} - u^{(\ell-1)}] + u_\mu^{(1)}(t,z) .$$

一方 与えられた正数 α $(0<\alpha<1)$ に対して，正数 M が存在して

$$|u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(0)}| \leqq \int_0^t |f_\mu(\tau, z)|\, d\tau \leqq M\cdot \rho^{-\alpha}$$ が $\Delta(x^0)$ でなりたす。

ここに $\rho = R_1 - L_1 t - \operatorname{Max}_j \{|z_j - x_j^0|\}$ である。

故に $\Delta(x^0)$ で次式が成立する：

$$\int_0^t |u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(0)}|\, d\tau \leqq \frac{M}{(1-\alpha)L_1} \cdot R_1^{1-\alpha}$$

従って補題1より

$$\left| \int_0^t \frac{\partial(u_\nu^{(1)} - u_\nu^{(0)})}{\partial x_j} d\tau \right| \leqq \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{1+\alpha} \frac{M}{L_1} (\rho^{-\alpha} - R_1^{-\alpha}) .$$

を得。これから次式をえる：

$$|u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(1)}| \leqq mkA \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{1+\alpha} \frac{M}{L_1} (\rho^{-\alpha} - R_1^{-\alpha}) + \frac{kBM}{(1-\alpha)L_1} \cdot R_1^{1-\alpha}$$

R_1, L_1 に対する補題の仮定より，この式から $\Delta(x^0)$ で評価：

$$|u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(1)}| \leqq \kappa M \cdot \rho^{-\alpha}$$ がなりたつ。

この評価より帰納的に，すべての n（自然数）に対し $\Delta(x^0)$ で

$$(3.5) \qquad |u_\mu^{(n+1)} - u_\mu^{(n)}| \leqq \kappa^n M \rho^{-\alpha}$$

がなりたち，従って $u_\mu^{(n)}(t,z)$ は或る関数 $u_\mu(t,z)$ に $\Delta(x^0)$ の任意の閉領域で一様に収束する。と $u_\mu(t,z) (\in \mathbb{C}^1_{(t,z)} \cap A_{(z)})$ は (3.3) を満足する求める解である。

<u>系 1</u>　$u_\mu(t,z)$ $(\mu=1,2,\cdots,k)$ を補題2で得られた解とすると

$$(3.6) \qquad |u_\mu(t,z)| \leqq \frac{M}{1-\kappa} \rho^{-\alpha} \qquad (\text{in } \Delta(x^0)) \quad \mu=1,\cdots,k$$

をみたす。ここに $M = \sup_{\substack{(t,z)\in\Delta(x^0)\\ 1\leqq\mu\leqq k}} \{\rho^\alpha T_1 \cdot |f_\mu(t,z)|\}$

<u>証明</u>　補題2の証明より明らか。

補題2で得られた $\Delta(x^0)$ での (3.3) の解を $u_\mu(t,z,x^0)$ で表わす事にする。

4. 定理の証明.

<u>定理1の証明</u>　補題2で局所的に得られた解を，接続することによって $\mathcal{D}_\gamma(T)$ での解が得られることを示そう．そのためには z を $\Delta(x^0)\cap\Delta(x^1)$　($x^0, x^1 \in R^m$)　の任意の元としたとき　$u_\mu(t,z,x^0)=u_\mu(t,z,x^1)$ となることを示せばよい．

$$v_\mu(t,z) = u_\mu(t,z,x^0) - u_\mu(t,z,x^1)$$ とおくと $v_\mu(0,z)=0$

且　$$v_\mu(t,z) = \Psi_\mu[v(t,z)].$$

ここで $\tilde{R}$ として　$\Delta' = \{(t,z)\ ;\ 0\leq t\leq T_2,\ |z_j - \frac{x_j^0+x_j^1}{2}| < \tilde{R}-L_1 t\}$ としたとき　$\Delta' \subset \Delta(x^0)\cap\Delta(x^1)$　となるようにとり，

$$\tilde{\rho} = (\tilde{R}-L_1 t - \max_j |z_j - \frac{x_j^0+x_j^1}{2}|),\quad \tilde{M} = \sup_{\substack{\Delta' \\ \mu=1,\cdots,k}} \{\tilde{\rho}^{\alpha}|v_\mu(t,z)|\}$$

とおくと，補題2の証明と同様にして，

$$|v_\mu(t,z)| = |\Psi_\mu[v(t,z)]| \leq \kappa \tilde{M}\tilde{\rho}^{-\alpha} \qquad (\Delta'で)$$

を得，これから　$\tilde{M}\tilde{\rho}^{-\alpha} \leq \kappa\tilde{M}\tilde{\rho}^{-\alpha}$　$(0<\kappa<1)$　が従がい，

結局　$v_\mu(t,z)\equiv 0$　$(\Delta'で)$　$(\mu=1,\cdots,k)$　を得る。

<u>注意</u>　系1と定理1より　$\mathcal{D}_\gamma(T)$ で，正数 M, a, b に対して

$$|f_\mu(t,z)| \leq M\exp(-ae^{b|x|}) \qquad \mu=1,2,\cdots,k$$

ならば，任意の a' $(<a)$ に対し　正数 M', T_1 が存在して (3.3) の解 $u_\mu(t,x)$ は $D(T)$ で

$$|u_\mu(t,x)| \leq M'\exp(-a'e^{b|x|})$$ をみたすことがわかる。

<u>補題3</u>　任意に与えられた正数 ε と，定められた正数 a, b に対し，正数 a', b' と γ (>0) が存在して　$\mathcal{D}_\gamma(T)$ で

$$\exp(-(a+\varepsilon)e^{b|x|}) \geq \exp(-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'z_\nu))$$ がなりたつ。

証明 $|\exp(-a'\cosh(b'z_\nu))| = \exp\{-a' \mathrm{Re}\cosh(b'z_\nu)\}$

$$\leqq \exp\left(-\frac{a'\cos(b'y_\nu)}{2} e^{b'|x_\nu|}\right)$$

ここで $|y_\nu| \leqq \frac{\theta}{b'}$ （θ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で fixed）なら $\cos(b'y_\nu) \geqq \cos\theta$.

したがって

$$|\exp(-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'z_\nu))| \leqq \exp\{-\frac{a'\cos\theta}{2}\sum_{\nu=1}^{k} e^{b'|x_\nu|}\}$$

$$\leqq \exp\{-\frac{a'\cos\theta}{2} e^{\frac{b'}{\sqrt{k}}|x|}\}.$$

よって $b'=\sqrt{k}\,b$, $a'=\frac{2(a+\varepsilon)}{\cos\theta}$ とおき $|y_\nu| \leqq \frac{\theta}{\sqrt{k}\,b} = \gamma$ $(\nu=1,2,\cdots,k)$

とすれば $\exp\{-(a+\varepsilon)e^{b|x|}\} \geqq \exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'z_\nu)\}$ を得る.

<u>定理2の証明</u>

$$L_\mu[u] = \frac{\partial u_\mu}{\partial t} - \sum_{\nu=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{m} A_{\mu\nu j}(t,x)\frac{\partial u_\nu}{\partial x_j} + B_{\mu\nu}(t,x)u_\nu\right\}$$

とおき，任意の σ $(\sigma=1,2,\cdots,k)$ に対して

$$\tilde{L}^{\sigma}_{\mu}[u] = -\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}[A_{\nu\mu j}(t,x)u_\nu] - B_{\nu\mu}(t,x)u_\nu\right\}$$
$$- e^{-ix\cdot\xi}\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'x_\nu)\}\cdot\delta_{\mu\sigma}$$

とおく．こゝに a', b', γ は任意に与えられた $\varepsilon\,(>0)$ に対して補題3で定まった正数であり，したがって $\mathcal{D}_\gamma(T)$ で

$$\exp\{-(a+\varepsilon)e^{b|x|}\} \geqq \exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'z_\nu)\}$$

をみたすものとし，$\delta_{\mu\sigma}$ は Kronecker の delta とする.

$\tilde{L}^{\sigma}_{\mu}[u]=0$ は定理1で考察された方程式と同じ形で，同じ条件をみたす方程式であるから，t を逆向きに考えることによって，定理1より正数 T_0 $(\leqq T_1)$ が存在して，任意の $T\in[0,T_0]$ に対し $\tilde{L}^{\sigma}_{\mu}[w]=0$ の，初期条件：$w(T,x)=0$ をみたす解が $D(T)$ において存在する。系1 より この解 $w(t,x)$ は，適当な定数 M' が存在して不等式：

(4.1) $\quad |w_\mu(t,x)| \leqq M' \exp\{-(a+\frac{\varepsilon}{2})e^{b|x|}\}$

を $D(T)$ においてみたす。

さて、$u(t,x)$, $v(t,x)$ を (1.2) をみたす (1.1) の解で $u, v \in \mathfrak{F}(a,b)$ をみたすものとすると、$L_\mu[u-v]=0$, $[u_\mu - v_\mu](0,x)=0$

(4.2) $\quad |u_\mu(t,x) - v_\mu(t,x)| \leqq K \exp(a e^{b|x|}) \qquad \mu=1,2,\cdots,k$

を $D(T)$ でみたす。こゝに T は $[0,T_0]$ の任意の数，K は定数。

$$\sum_{\mu=1}^{k}\int_{D(T)}\int \{w_\mu L_\mu[u-v] - (u_\mu - v_\mu)\tilde{L}_\mu^\sigma[w]\}\,dx\,dt = 0$$

であるから，任意の $\xi \in R^m$ に対して

$$\int_0^t dt \int_{R^m} e^{-ix\cdot\xi}[(u_\sigma - v_\sigma)\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'|x_\nu|)\}]\,dx = 0 .$$

したがって，任意の $\xi \in R^m$ と任意の $t \in [0,T_0]$ に対し

(4.3) $\quad \int_{R^m} e^{-ix\cdot\xi}[(u_\sigma - v_\sigma)\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'|x_\nu|)\}]\,dx = 0 .$

一方 $|(u_\sigma - v_\sigma)\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'|x_\nu|)\}| \leqq \exp\{-\frac{\varepsilon}{2}e^{b|x|}\}$

であるから，(4.3) は可積分関数 $(u_\sigma - v_\sigma)\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'|x_\nu|)\}$ の Fourier 変換が任意の $t \in [0,T_0]$ に対し R^m で恒等的に零になることを意味する。$\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'|x_\nu|)\} \neq 0$ in R^m である故

$u_\sigma(t,x) - v_\sigma(t,x) \equiv 0$ が $D(T_0)$ でなりたつ。

σ は何でもよかったから $u_\sigma(t,x) \equiv v_\sigma(t,x)$:($D(T_0)$ で) $\sigma=1,\cdots,k$

がなりたつ。

今，もし $T' \in [0,T]$ が存在して，或る μ に対して $u_\mu(T',x) \neq v_\mu(T',x)$ がなりたったとする。そのような T' の下限を T_2 とすると $u_\mu(t_1',x) \equiv v_\mu(t_1,x)$ が $D(T_2)$ でみたされる。このとき T_2', T_3 を $T_3 - T_2' \leqq T_0$, $T_2' < T_2 < T_3$ となるようにとり，上での

べたと同じ議論を，区間 $[T_2', T_3]$ に関して繰り返せば，任意の $(t,x) \in \{(t,x);\ T_2' < t \leqq T_3,\ x \in R^m\}$ に対し $u_\mu(t,x) = v_\mu(t,x)$.
これは仮定：T' の存在 に矛盾する。したがって結論：

$$u_\mu(t,x) = v_\mu(t,x) \quad \text{on } D(T'), \quad \mu = 1, 2, \cdots, k$$

を得る。

参考文献

[1] I.M. Gelfand – G.E. Schilov: "Verallgemeinerte Funktionen" III. (1964) pp. 89 – 94.

[2] S. Mizohata, "Systèmes Kowalewskiens" Annales de L'institute Fourier. Tome VII (1957) pp. 283 – 292.

[3] M. Nagumo, "Über das Anfangswertproblem Partieller Differentialgleichungen" Japanes Journal of Math. vol. 18. (1942) pp. 41 – 47.

[4] M. Yamamoto, "On Cauchy's Problem for a Linear System of Partial Differential Equations of First Order". Proc. of the Japan Acad. Vol. 42 (1966) pp 555 – 559.

[5] M. Yamamoto, "On Cauchy Problem for Kowalewski Systems." to appear.

[6] T. Yamanaka, "On the Cauchy Problem for Kowalevskaja Systems of Partial Differential Equations."