数理解析研究所講究録
22巻 1967年 1-9

Uniqueness in Cauchy Problem

京大数研　林田和也

§1. 微分作用素 L が elliptic のとき $Lu=0$ の解が Cauchy 問題の一意性をみたしているかどうかは，今までいろいろと研究されてきた。ここで Cauchy 問題の一意性とは主に次の意味においてであった。

(A) 初期曲面 Γ 上の部分超曲面（如何に小さくてもよい）上で u の Cauchy data が 0 ならば $u\equiv 0$。

(B) ある一点のまわりから，u がその点で急激に 0 に減少すれば $u\equiv 0$。

Cauchy 問題の立場からみれば性質 (A) がいえていれば妥当なわけであるが，性質 (B) はむしろ解の内部における一つの局所的性質を示しているものとみてよい。例えば，1958年に Calderón [2] が特性根が distinct のとき性質 (A) の意味で Cauchy 問題の一意性を示したとき，更に同じ場合に 1961年 I. S. Bernstein [1] は性質 (B) をも証明した。

他方 Cauchy 問題の一意性の研究がさかんになり始めた頃（1956～）ロシアの数学者達 Mergeljan [9] Landis [7]

並びにLavrentev [8] はLが2階 elliptic の場合に性質(A),(B)よりももっと精密な結果を得ていた。すなわち，

(C) 初期曲面Γ上の一点で u の Cauchy data がΓに沿ってその点のまわりから，その点で急激に0に減少するならば $u \equiv 0$。

ここで後者の結果は2階でのみしか適用されない本質的な性質(例えば比較原理，Harnackの不等式など)を用いている。そこで当然次の疑問が生じる；

Lが高階 elliptic の場合にも性質(C)は成立するか？

我々は2次元空間でL(単独又は system)の特性根が distinct の場合肯定的な結果を得た[5]。この事実は Carleman [3]の結果の拡張にほかならない。我々の証明の中心は(B)における仮定"ある一点のまわりから"を"その点を通る超曲面の片側で"という弱い仮定におきかえることである。

さてそれでは2次元空間でLの特性根が double の場合にはどうか。このとき A. Douglis は1960年に性質(A)を示している[4]。そこで我々は彼の結果を性質(C)まで拡張しよう。特にLの特性根が double の場合には S. Mizohata [10]の idea によるところ大である。

§2. (x, y) 平面の原点の近傍で次の一階 elliptic system を考える。

(1) $$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_x + B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_y = H \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

但し B は Jordan 標準型で

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_s \end{pmatrix}.$$

とかいた場合，各 block b_k は $b_k = (\lambda_k)$ (simple) 又は $b_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \mu_k \\ 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$ (multiple) とする。

そして λ_k, μ_k は C^1 で H の element は有界可測函数，更に $\mathrm{Im}\,\lambda_k \neq 0$ を仮定する。さて十分小さな $d>0$ に対して中心 $(d/2, 0)$ 半径 $d/2$ の開円板を S_d で表わす。我々の当面の目標は次の定理である。

Theorem 1. (1)の行列 B のみに依存する正数 δ が存在していて，$\overline{S_d}$ で C^1 なる (1) の解 u が S_d で次の条件をみたすならば $u \equiv 0$,

$$u_i = o(\exp(-r^{-\delta})) \quad (r \to 0,\ 1 \leq i \leq n).$$

この仮定をもっと弱くして

$$u_i = o(\exp(-(\tfrac{r^2}{x})^{-\delta})) \quad (\tfrac{r^2}{x} \to 0,\ 1 \leq i \leq n)$$

でおきかえてもよい。

この定理を証明するために少し準備を必要とする。(x, y) 平面から (θ, ρ) 平面への次の変換を考える。

(2) $$\theta = \tan^{-1}(y/x), \quad \rho = r^2/x.$$

R_d を (θ, ρ) 平面内の $|\theta| < \pi/2$, $0 < \rho < d$ なる開矩形とすれば，変換 (2) によって S_d と R_d は 1 対 1 に対応する。変換の模様

をみれば

$$x=\rho\cos^2\theta,\qquad y=\frac{1}{2}\rho\sin 2\theta$$

$$\begin{pmatrix}\theta_x & \theta_y\\ \rho_x & \rho_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\rho}\tan\theta & 1/\rho\\ 1-\tan^2\theta & 2\tan\theta\end{pmatrix}$$

今度は $\bar{S}_d$ で次の単独方程式を考える。

(3) $$u_x+\lambda u_y\equiv F.$$

ここで $\lambda\in C^1(\bar{S}_d)$ で $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$ in $\bar{S}_d$。そのとき (3) 式は変換 (2) によって次の式に変換される。

(4) $$u_\rho+\frac{1}{\rho}(Q+iP)u_\theta\equiv G.$$

但し, $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$ とおけば

$$P(\theta,\rho)=\lambda_2 f^{-1}\cos^2\theta,$$

(5) $$Q(\theta,\rho)=f^{-1}\cos\theta\{\sin\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+\lambda_1(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+2|\lambda|^2\cos^2\theta\sin\theta\},$$

$$f=|\rho_x+\lambda\rho_y|^2\cos^4\theta.$$

更に (4) の右辺は

(6) $$G=f^{-1}\cos^4\theta(\rho_x+\bar{\lambda}\rho_y)F.$$

この f について $\lambda_2\neq 0$ より次の事実が容易に分る。「$f\in C^1(\bar{R}_d)$ で $\bar{R}_d$ で $f>m$ なる正の常数 m が存在する。」

さて次の命題を準備しておく。その証明は [5] をみられたい。

Proposition 1. (3) の u について次の条件を仮定する。

(7) $$u=o(\exp(-r^{-\delta-\varepsilon}))\qquad(r\to 0)\quad\text{in } S_d.$$

あるいはもっと弱い仮定で

(7') $$u=o\left(\exp\left(-\left(\frac{r^2}{x}\right)^{-\delta-\varepsilon}\right)\right)\qquad\left(\frac{r^2}{x}\to 0\right)\quad\text{in } S_d.$$

但しδはλにのみ依存する正数で，εはどんなに小さくてもよい正数。そのとき$\phi_n(\rho)=\exp(n\rho^{-\delta})$とおけば

$$\int_0^R \phi_n^2 \| u_\rho + \frac{1}{\rho}(Q+iP)u_\theta \|^2 d\rho$$

(8)
$$\geqq n\delta(\delta+1-M)\int_0^R \frac{\phi_n^2}{\rho^{\delta+2}}\|u\|^2 d\rho$$
$$- c_1 n\delta \int_0^R \frac{\phi_n^2}{\rho^{\delta+1}}\|u\|^2 d\rho - \frac{c_2}{R}\phi_n^2(R)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^R \| \frac{1}{\rho}\phi_n i P u_\theta - \phi_n' u \|^2 d\rho.$$

$c_1, c_2 \cdots$はnに依存しない正の常数で特に

(9)
$$M = \max |Q_\theta + 1 - \frac{P_\theta Q}{P}|.$$

Remark 1. このような評価式を導くに際して，従来$P \neq 0$すなわち$1/P$が有界であるということが本質的であった。ここでは(5)から分るように$|\theta|=\pi/2$で$P=0$になるから今までの方法は用いることは出来ない。しかし少し工夫すれば，$1/P$がboundedでなくともQP_θ/Pがそうであることによって困難をさけることが出来るのである。

Remark 2. uの原点における減少のorderの限界が(8)式の右辺における$\delta+1-M>0$である。特に2階ellipticの場合原点でλを$\pm i$に変換して(9)におけるMも計算すれば，$M=2+\varepsilon$（$|\varepsilon|$はいくらでも小さく出来る）で§4と合わせて考えればLavrentév [8]の結果とよく合致している。

さて$R(<1)$を充分小さくとって固定し$0 \leqq \rho \leqq R$で$u \neq 0$と仮定する。δを大きくとり固定すれば(8)式は次のように簡単になる。

(10)
$$\int_0^R \phi_n^2 \| u_\rho + \frac{1}{\rho}(Q+iP)u_\theta \|^2 d\rho$$
$$\geqq \frac{1}{2} n\delta^2 \int_0^R \frac{\phi_n^2}{\rho^{\delta+2}}\|u\|^2 d\rho$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^h \left\| \frac{1}{\rho}\Phi_n iPu_\theta - \Phi_n' u \right\|^2 d\rho .$$

この式は(1)における matrix B が simple block のみからなる場合に相当する評価式なのであってこれから multiple の場合に対しても適用されるような式を導かなければならない。

そのために[10]の結果を参考にしながら進んでゆくことにする。

§3. (10)式右辺第2項を $\frac{1}{2}\int_0^h \| \rho^{\frac{\delta}{2}-1}\Phi_n iPu_\theta - \rho^{\frac{\delta}{2}}\Phi_n' u\|^2 d\rho$ でおきかえ基準量として

$$I_n^2 = \int_0^h \|\rho^{\frac{\delta}{2}}\Phi_n' u\|^2 d\rho ,$$

$$p_n^2 I_n^2 = \int_0^h \|\rho^{\frac{\delta}{2}-1}\Phi_n iPu_\theta\|^2 d\rho .$$

とおけば

(11)
$$\int_0^h \Phi_n^2 \left\| u_\rho + \frac{1}{\rho}(Q+iP)u_\theta \right\|^2 d\rho \geqq \frac{1}{4n}\left(p_n^2 I_n^2 + I_n^2\right).$$

が得られる。今度は $\overline{S}_d$ で次の system を考える。

(12)
$$u_{1x} + \lambda u_{1y} + \mu u_{2y} \equiv F_1 .$$

(13)
$$u_{2x} + \lambda u_{2y} \equiv F_2 .$$

u_1, u_2 について Proposition 1の条件(7)あるいは(7')を仮定しておく。(θ,ρ) 変数で(12)をかきかえ両辺に $\rho^{\frac{\delta}{2}}$ を掛ければ

$$|\rho_x+\lambda\rho_y|^2(\rho^{\frac{\delta}{2}}u_1)_\rho + (\theta_x+\lambda\theta_y)(\rho_x+\overline{\lambda}\rho_y)(\rho^{\frac{\delta}{2}}u_1)_\theta$$
$$= (\rho_x+\overline{\lambda}\rho_y)\rho^{\frac{\delta}{2}}F_1 - \mu(\rho_x+\overline{\lambda}\rho_y)\rho^{\frac{\delta}{2}}(u_{2\rho}\rho_y + u_{2\theta}\theta_y)$$
$$+ \frac{\delta}{2}|\rho_x+\lambda\rho_y|^2\rho^{\frac{\delta}{2}-1}u_1 .$$

故に（4）より

$$|(\rho^{\frac{\delta}{2}} u_1)_\rho + \frac{1}{\rho}(\Theta + iP)(\rho^{\frac{\delta}{2}} u_1)_\theta|$$
$$\leqq C_3 (\delta |u_1| + |F_1| + \rho^{\frac{\delta}{2}} \cos^2\theta (\frac{1}{\rho}|u_{2\theta}| + |\tan\theta||u_{2\rho}|)).$$

この式と (10) より又（5）における P の形より

(14)
$$C_4 \int_0^h \Phi_n^2 (\delta^2 \|u_1\|^2 + \|F_1\|^2 + \|\rho^{\frac{\delta}{2}-1}\cos^2\theta\, u_{2\theta}\|^2 + \|\rho^{\frac{\delta}{2}}\sin\theta\cos\theta\, u_{2\rho}\|^2)\, d\rho$$
$$\geqq n\delta^2 \int_0^h \frac{1}{\rho^2}\Phi_n^2 \|u_1\|^2 d\rho.$$

同じく (11), (13) より

(15)
$$\int_0^h \Phi_n^2 \|F_2\|^2 d\rho \geqq \frac{1}{4n}\left(\int_0^h \|\rho^{\frac{\delta}{2}-1}\Phi_n iPu_{2\theta}\|^2 d\rho + \int_0^h \|\rho^{\frac{\delta}{2}}\Phi_n' u_2\|^2 d\rho\right).$$

他方 $|u_{2\rho} + \frac{1}{\rho}(Q + iP)u_{2\theta}| \leqq |F_2|$ より

$$|u_{2\rho}| \leqq C_5 (|F_2| + \frac{1}{\rho}\cos\theta\, |u_{2\theta}|).$$

すなわち

$$\rho^{\frac{\delta}{2}} |\sin\theta\cos\theta| |u_{2\rho}| \leqq C_6 (|F_2| + \rho^{\frac{\delta}{2}-1}|P||u_{2\theta}|).$$

この不等式を (14) 式の左辺第 3 項に代入したものと (15) を組み合わせれば

$$C_7 (\delta^2 + n\delta) \int_0^h \Phi_n^2 (\|F_1\|^2 + \|F_2\|^2)\, d\rho$$
$$\geqq n\delta^2 \int_0^h \Phi_n^2 (\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2)\, d\rho.$$

この最后の評価式を始めの system（1）の各 block 毎に適用して組み合わせれば Theorem 1 が証明される。

§4.（1）の解はその Cauchy data によって如何に影響されるかをみてみよう。

$\Omega_a = S_1 \cap \{0 < x < a\}$ とおく。$\partial\Omega_a$ の弧状部分を Γ_a 線状部分を l_h とかくことにする。

Theorem 2. u は Ω_a で system (1) の解とする。そのとき Γ_a 上で $u_i = o(\exp(-r^{-2\delta-\varepsilon}))$ $(r \to 0,\ \varepsilon, \delta > 0)$ を仮定すれば $S_{1/2} \cap \Omega_a$ 内で

$$u_i = o(\exp(-r^{-\delta})) \quad (r \to 0,\ 1 \leq i \leq n).$$

がなりたつ。

この定理の証明は特性根が distinct の場合に [5] で示されている。double の場合も同じ方針で進めばよいので、証明は略しておく。しかしこの定理への過程を明らかにするため 2つの命題を挙げておこう。

Proposition 2. u は原点の近傍で system (1) の解とする。そのとき $1 < p < 2$ ならば

$$|u_i(0)| \leq C \sum_{j=1}^{n} R^{-1} \left(\iint_{r \leq R} |u_j|^2 dx\,dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \quad (1 \leq i \leq n)$$

がなりたつ。但し C は u, p に依存するかもしれないが R に依存しない数である。

証明の方針は (1) の左辺の微分作用素に対する原点における接しょく作用素の基本解を作り，それによって u の原点における積分表示をし，その積分に Hölder の不等式を適用する。

Proposition 3. Ω_a で u は (1) の解とする。Γ_a に沿って $u_i = o(\exp(-r^{-2\delta-\varepsilon}))$ $(r \to 0,\ \delta > 1,\ \varepsilon > 0)$ ならば

$$\int_{\Omega_h} |u_i|^2 dx\,dy = o(\exp(-h^{-\delta})) \quad (h \to 0,\ 1 \leq i \leq n).$$

が成りたつ。

この命題を証明するには Γ_a 上で $v = u$ なる v を適当にとり

$w = u - v$ に対して 従来の Cauchy 問題の一意性の証明 ([2], [6], [10]) をくり返せばよい。ここで $\delta > 1$ なる事が重要である。命題3の仮定のもとに $S_{1/2}$ で命題3を適用すれば定理2が得られ定理1と定理2を合わせれば我々の目標の定理が得られる。

Theorem 3. $u \in C^1(\bar{\Omega}_a)$ そして Ω_a で system (1) の解とする。そのとき matrix B のみに依存する正数 δ が存在して Γ_a で

$$u_i = o(\exp(-r^{-\delta})) \quad (r \to 0,\ 1 \leqq i \leqq n)$$

ならば $u \equiv 0$

References

[1] I.S. Bernstein, J. Math. & Mech. 10 (1961), 579-606.
[2] A.P. Calderón, Amer. J. Math. 80 (1958), 16-36.
[3] T. Carleman, Arkiv Mat. 26B (1938), 1-9.
[4] A. Douglis, Comm. Pure Appl. Math (1960), 593-607.
[5] K. Hayashida Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Ser. A, 2 (1967), 429-449.
[6] H. Kumano-go, Osaka Math. Jour. 14 (1962), 181-212.
[7] E.M. Landis, Dokl. Akad. Nauk SSSR 107 (1956), 640-643.
[8] M.M. Lavrentév, Dokl. Akad. Nauk SSSR 112 (1957), 195-197.
[9] S.N. Mergelyan, Dokl. Akad. Nauk SSSR 107 (1956), 644-647.
[10] S. Mizohata, Proc. Japan Acad. 34 (1958), 687-692.