

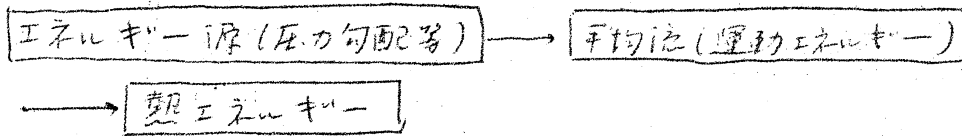
# 非線形不安定性

東下 宇宙砂 桑原 真二

## §1. はじめ

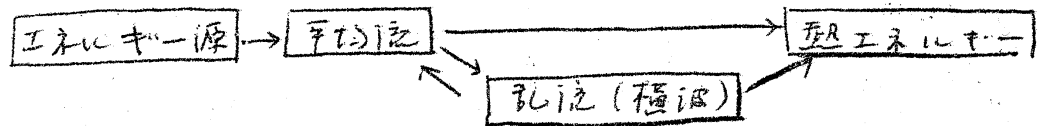
ここでは、熱および電気伝導性のない、縮まない粘性流体 あるいは連続の方程式と Navier-Stokes の方程式で記述される流体の議論に限るものとする。これらの方程式によって記述される力学系を Navier-Stokes 系 (N-S 系) と呼ぶことにする。

一般の流体運動においては、層流と乱流という二種類の運動状態がある。N-S 系の一例として Hagen-Poiseuille 流 (H-P 流) の場合を考えよう。圧力勾配が十分小さい場合には流れは層流である。これをエネルギーの観点から見れば、圧力勾配によって起された流れ (平均流) が内部摩擦によって散逸され、圧力勾配によって供給されるエネルギーと摩擦によって失われるエネルギーがバランスしていると考えられる。H-P 流に限らず層流の N-S 系では



というエネルギー変遷の図式が成立つ。さて、圧力勾配が十分と大きく取りある値を  $\epsilon$  とし、流れは乱流に遷移する。この場合には、エネルギーの供給が大きいまま、平均流によるエネルギー散逸は  $\epsilon$  のほかに

されず、もっと小さい運動(乱流)にエネルギーを分配させているものと考えられる。乱流状態は(平均流)+(極波の集り)として記述する事ができる。この場合、エネルギー変遷の図式は



となる。一般に、平均流と乱流との間には、一方向のエネルギーの流れだけでなく、エネルギーの授受が考えられる。

乱流状態が起るためには、まずエネルギーの供給が十分大きくなければならぬ。この条件は、流れを特徴づける Reynolds 数  $R$  がこの流れに特有な臨界 Reynolds 数  $R_{cr}$  を超えなければならないという形で表わされる。 $N$ - $\beta$  系ほどのような  $R$  についても定常解があると考えられるから、始めに流れを乱すものがなければ乱流は起らない。乱流を起す原因を初期擾乱(initial disturbance)とよんでおく。臨界 Reynolds 数と、初期擾乱とか、乱流発生を特徴づけるパラメーターである。

乱流の機構は次の三段階に分けて考えるのが、実験的にも、理論的にも考えやすい。可成り

- 1) 初期段階(initial stage) 実験的には、線スペクトルの擾乱が観察された。
- 2) 遷移領域(transition regime) 擾乱が線スペクトルから連続スペクトルに変化する。
- 3) 十分に発達した乱流(fully developed turbulence) 連続スペクトル

ル。

初期段階における理論は如何なる条件のもとに層流中の初期擾乱が増大するか、又或る層流の不安定性の問題である。これについて、線形および非線形理論がある。前者では、平面波の協会、Squireの定理と線形方程式の結合合せの原理から、初期擾乱として二次元擾乱のFourier成分をとり出し、それについての不安定の条件をしらべられる。非線形理論では、事情はもっと複雑で、次の三つの非線形作用が考えられる。

- a) 平均流と擾乱との相互作用: 方程式の平均をとった時に、一般に自乗平均の値が0になる。非線形理論ではこれらの値と0との差で擾乱の平均流への反作用が現れる。
- b) 三次元性: 非線形理論ではSquireの定理が成立せず、三次元性を考慮する必要がある。実験的に三次元的擾乱が存在する。
- c) 波と波との間の相互作用:  $N-S$  方程式の波数空間表示において、非線形項は波と波との間の相互作用を意味している。

a) については Meksyn-Stuart の理論があり、この論文では、そのほかの非線形性を論ずる。b) については Benny & Lin の理論がある。著者の意見では、三次元性は乱流エネルギーの平等分配と考えられる。すなわち、まず二次元擾乱が生じ、第三成分は乱流エネルギーの分配が生ずる。これは非常に不平等なエネルギー分配なので、その平均流に特有な乱流エネルギー分配を生ずるまで第三成分へ、他の二成分から乱流エネルギーが供給される考えなのである。c) は Meksyn-

Stuart の理論において展開されている。

## §2. 基礎方程式

我々は半次元の流れ、つまり  $S$ 、空間座標が  $\alpha$  軸の方向のベクトル成分は二成分以下の場合について考えよ。座標が  $\alpha$  のベクトル成分を

	二次元	軸対称
座標	$(x, y, z)$	$(x, r, \phi) \quad (r \equiv y)$
速度ベクトル	$(u, v, 0)$	$(u, v, 0)$
渦度ベクトル	$(0, 0, \omega)$	$(0, 0, \omega)$

と表わす。連続の方程式、渦度の方程式 (N-S 方程式に対応) が  $\alpha$  の渦度の式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y^{-s} \frac{\partial}{\partial y} y^s v = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v y^s \frac{\partial}{\partial y} (y^{-s} \omega) = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^{-s} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \omega \quad (2.2)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.3)$$

但し

$$\partial = y^s \frac{\partial}{\partial y} y^{-s} \frac{\partial}{\partial y}$$

ここで二次元流に対し  $s=0$ 、軸対称流に対し  $s=1$  である。 $(x, y)$ ,  $(u, v)$  はそれぞれ小代表長さ  $L$ , 速度  $U$  で、時間  $\tau$ ,  $\omega$  は  $L/U$ ,  $U/L$  でそれぞれ小規格化してある。 $R = UL/\nu$  ( $\nu$  動粘性率) は Reynolds 数である。

我々は平行流の不安定性のみを考え、 $x$  軸と平均流 (平行流) の方向に  $\alpha$  とす。厚度と渦度をまず平均流 ( $\alpha$  軸) と乱流成分 ( $\beta$  軸) に分ける。

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u}(y) + \tilde{u}(x, y, t), & v &= \tilde{v}(x, y, t) \\ \omega &= \bar{\omega}(y) + \tilde{\omega}(x, y, t) \end{aligned} \right\} (2.4)$$

(2.1) - (2.3) を時間平均したものと、それらと差したものを平均したものとして

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + y^{-s} \frac{\partial}{\partial y} (y^s \tilde{v}) = 0 \quad (2.1')$$

$$\nabla \cdot \{ y^s (\bar{u}' - \kappa \tilde{u} \tilde{v}) \} = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{\omega} - (\tilde{v} \bar{\omega})' - \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^{-s} \nabla^2 y^s \right) \tilde{\omega} \quad (2.2a)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} \tilde{\omega}) - \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{v} \tilde{\omega} - \tilde{v} \bar{\omega}) \quad (2.2b)$$

$$\bar{\omega} = -\bar{u}'(y), \quad \tilde{\omega} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad (2.3')$$

と存る。非線形性は (2.2a), (2.2b) に現れている。 (2.2a) は Reynolds 応力による平均流に対する擾乱の反作用を表わす式である。(2.2b) において、左辺は擾乱を表わす量について線形、右辺は二次である。左辺は初値から値は、渦度の平均流による対流、渦度と平均流との相互作用、および渦度の散逸を表わす項から出来ており、右辺は二つの級の相互作用を表わすと考えられる。

そこで擾乱に対する流れの関数  $\psi(x, y, t)$  :

$$\tilde{u} = y^{-s} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tilde{v} = -y^{-s} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.5)$$

を導入する。Meksyn-Stuart に従って、 $\psi$  を Fourier 級数に展開する。これは一つの近似である。

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \phi_1(y) e^{i\alpha(x-ct)} + \phi_2(y) e^{2i\alpha(x-ct)} + \dots + c.c. \\ \tilde{u} &= y^{-s} [\phi_1' e^{i\alpha(x-ct)} + 2\phi_2' e^{2i\alpha(x-ct)} + \dots + c.c.] \\ \tilde{v} &= -i\alpha y^{-s} [\phi_1 e^{i\alpha(x-ct)} + 2\phi_2 e^{2i\alpha(x-ct)} + \dots - c.c.] \end{aligned} \right\} (2.6)$$

$$\tilde{\omega} = -y^{-5} [e^{i\alpha(x-ct)} (\partial - \alpha^2) \phi_1 + e^{2i\alpha(x-ct)} (\partial - 4\alpha^2) \phi_2 + \dots + c.c.]$$

ここで  $\alpha$ ,  $c$  は Fourier の基本波の波数, 位相速度, c.c. はそれより前  
にある式の複素共役を表わす。これを (2.26) に代入すると

$$\begin{aligned} (\bar{u} - c) (\partial - \alpha^2) \phi_1 - (\partial \bar{u}) \phi_1 - \frac{1}{i\alpha R} (\partial - \alpha^2)^2 \phi_1 &= -y^{-5} \{ \phi_1'^* \\ (\partial^2 - 4\alpha^2) \phi_2 + \phi_2' (\partial - \alpha^2) \phi_1'^* \} + \frac{\partial}{\partial y} y^{-5} \{ \phi_1'^* (\partial - 4\alpha^2) \phi_2 \\ - 2 \phi_2 (\partial - \alpha^2) \phi_1 \} + \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} (\bar{u} - c) (\partial - 4\alpha^2) \phi_2 - (\partial \bar{u}) \phi_2 - \frac{1}{2i\alpha R} (\partial - 4\alpha^2)^2 \phi_2 \\ = -y^{-5} \{ \phi_1 (\partial - \alpha^2) \phi_1 + \dots \} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \{ \phi_1 (\partial - \alpha^2) \phi_1 + \dots \} + \end{aligned} \quad (2.8)$$

等がえられる。

さて、(2.7) で非線形項をすべて落して (2.7), (2.8)

は

$$\partial (y^5 \bar{u}') = 0 \quad (2.9)$$

$$(\bar{u} - c) (\partial - \alpha^2) \phi - (\partial \bar{u}) \phi = \frac{1}{i\alpha R} (\partial - \alpha^2)^2 \phi \quad (2.10)$$

となる。(2.7), (2.8) 等は同形の方程式となる。(2.9) を解いて

$\bar{u}$  を求め、(2.10) に代入すると、いわゆる Orr-Sommerfeld の方程式を

うる。(2.10) の左辺第一項は平均流による乱流項であり、左辺は粘性に

よる散逸項であり、これを一般的に考えれば、両者は乱流は増大させる

作用は強いと考えられる。左辺第二項は平均流と擾乱との相互作用を表

わし、不安定性に并し重大な効果をもつと考えられる。この項の係数

$\partial \bar{u}$  はついでに、三例についてしらべてみる。

i) 平面 Couette 流  $\bar{u} = y \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad \partial \bar{u} = 1$

ii) 平面 Poiseuille 流  $\bar{u} = 1 - y^2 \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad \partial \bar{u} = -2y$

iii) Rayleigh 流  $\bar{u} = \operatorname{erfc} y \quad (y \geq 0) \quad \delta \bar{u} = \frac{4y}{\sqrt{y}} e^{-y^2}$

iv) H-P 流  $\bar{u} = 1 - 2z \quad (0 \leq z \leq 1) \quad \delta \bar{u} = 0$

v) 軸対称下置シフト  $\bar{u} = \frac{1}{(1+z^2)^2} \quad (z \geq 0) \quad \delta \bar{u} = \frac{24z^2}{(1+z^2)^4}$

平面 Couette 流と、H-P 流については、線形不安定理論では不安定解がえられることがわかっていり。この二つの流れの場合に丁度二の項が 0 になることは、二の項の不安定性に対する重要性を暗示しているように思われる。そこで、この二つの流れに対しては、平均流に対する擾乱の非線形反作用が本質的重要性をもっていると考えられる。

さて、準二次元の流れでは、非線形性は前に述べたように、平均流に対する擾乱の反作用と、higher harmonics の発生とが一つである。

十分初期の段階では、第一高調波のみが存在し、又上に強調したように、平均流に対する擾乱の反作用が重要であることはより、第一高調波以上を省略する近似を考慮してみよう。ここで

$$\varphi = \sqrt{\alpha R} \phi,$$

とおく。このように近似では、(2.2a), (2.7) より

$$\bar{u} = A_2 y^2 + A_1 \delta_{30} y + A_0 - \int y^{-5} (\varphi, \varphi') dy \quad (2.12)$$

$$(\bar{u} - c)(\partial - \alpha^2) \phi - (\partial \bar{u}) \phi = \frac{1}{\sqrt{\alpha R}} (\partial - \alpha^2)^2 \phi \quad (2.13)$$

をうる。ここで

$$(\varphi, \varphi') = \varphi \varphi'^* - \varphi^* \varphi'$$

である。これは  $\bar{u}, \varphi$  に対する連立の非線形常微分方程式である。

境界条件は次のようにする。固体壁面においては無限遠で

$$\varphi = \varphi' = 0, \quad u = U_0 \quad (2.14)$$

→  $\tau$  は固体壁あるいは無限遠での速度である。軸対称流では、中心での条件が必要の場合あり

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \varphi = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} (\varphi'' - \frac{1}{z} \varphi') = 0 \quad (2.15)$$

となり。前者は  $v$  が、後者は保持力  $\tau_{22}$  が 0 になることである。

§3. 平面 Couette 流と Hagen-Poiseuille 流に対する非線形不安定性

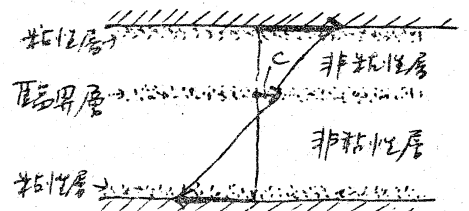
線形理論によれば、不安定解のない平面 Couette 流 (C-流) と H-P 流に対しては §2 で考察したように、擾乱の平均流への反作用が重大な影を及ぼすと考えられる。 Meksyn-Stuart が行ったような線形理論の擾動として、非線形性があるかという方法は、その中立解が存在しないから、この場合適用できない。

つまり、 $\alpha R$  が大きいとして、うまい臨界層あるいは粘性層とよぶ非粘性層に分けられると仮定しよう (第1図)。 この場合には、二種の

領域に各々粘性層の解と漸近解をとり、これらの解をつなぎ合わせて境界条件を合わせよう方法が考えられる。

C-流はつて、この方法では必要な境界条件を満足する中立解はとられな

い。非粘性解による平均流への反作用を計算すると、直線の速度分布がとられ、反作用がないのと同じであり、粘性層においてのみ直線分布からはずれることになり。上の方法においては、平均流への反作用、したがって不安定を起す要因がうまい粘性



第1図 平面 Couette 流における一つのモデル



層にのみ限らぬため、十分不安定を起すは、いかなるものと考えらる。

以上の考察から我々は、全中にわたって非性の効果が見わかってい  
ると考えてよかろう。このように非性のもとでは、 $\psi$ が局所的に急激に  
変化するものであると十分なめらかな関数とみなしてよい。そこで、これ  
の全域 (C-位に対しては  $[-1, 1]$ , H-P 位に対しては  $[0, 1]$ ) を関  
数領域にその適当な直交関数系をとりあげ、 $\psi$ は十分よく近似できるもの  
と考えらる。我々は

$$\psi = \sum a_n \varphi_n(y) \quad (3.1)$$

とおく。  $a_n$  は複素数の定数、  $\varphi_n$  は実関数である。さて、我々は、  
各関数  $\varphi_n$  に対して次のような条件をつけよう。

1) 境界条件を満足する

$$\left. \begin{aligned} s=0 : \quad \varphi_n(\pm 1) = \varphi_n'(\pm 1) = 0 \\ s=1 : \quad \varphi_n(1) = \varphi_n'(1) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \varphi_n(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} (\varphi_n'' - \frac{1}{z} \varphi_n') = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2a)$$

2) 壁における撓動切線応力  $\tau_{xy}$  は 0 にならざる。

$$\left. \begin{aligned} s=0 : \quad \varphi_n''(\pm 1) \neq 0 \\ s=1 : \quad \varphi_n''(1) \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2b)$$

3) H-P 位の場合には、中心で撓動軸速度は 0 にならざる。

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \varphi_n'(z) \neq 0 \quad (3.2c)$$

このように条件を満足する直交関数は、C-位では Legendre の陪関  
項式  $P_{n+1/2}(y)$ , あるいは

$\varphi_0 = (1-y^2)^2$ ,  $\varphi_1 = (1-y^2)^2 y$ ,  $\varphi_2 = (1-y^2)^2 (11y^2-1)$  etc (3.4)  
 H-P 流に対しては Jacob の各項式  $G_n(2, 3, 2^2)$ , ちちちち ( $y = 1-2^2$  とおく)

$$\varphi_0 = 2^2(1-2^2)^2 = y^2(1-y), \quad \varphi_1 = 2^2(1-2^2)(3-8 \cdot 2^2) = -y^2(1-y)(15-8y)$$

$$\varphi_2 = 2^2(1-2^2)^2(1-6 \cdot 2^2 + \frac{15}{2} 2^4) = \frac{1}{2} y^2(1-y)(15-8y+15y^2) \text{ etc.} \quad (3.5)$$

とてらべはまゝ。

とてらべはまゝ。

次に中立安定の解をおめよう。  $\varphi$  を上のようにしてとてらべた直交関数で展開すれば、境界条件はすべて満足されている。 次は基礎方程式を満足するように展開係数を定めるければならない。 それらを定めるのに二つの方法がある。 一つは方程式をその領域の一部で局所的に満足させる方法であり、他は領域全体にわたって、平均的に満足させる方法である。

まず平均値を計算しよう。 我々は  $\varphi$  が十分おめうかとし、展開の中 = 項までとす。 そうすると、C-流 ( $s=0$ ), H-P 流 ( $s=1$ ) はついでおめう。

$$\bar{u} = y + a f(y), \quad a = 2(a_0, a_1)$$

$$\left. \begin{aligned} f &= -\left(\frac{187}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{4}{3} y^2 + \frac{6}{5} y^4 - \frac{4}{7} y^6 + \frac{1}{9} y^8\right) \quad s=0 \\ f &= \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} [4 - 7(6-5y)y^4] y \quad (y=1-2^2) \quad s=1 \end{aligned} \right\} (3.6)$$

とてらべ。

$\varphi$  を展開中 = 項までとり、(3.6) を代入すると (2.13) は次のようになる。

$$\mathcal{L}\varphi = a_0 \mathcal{L}\varphi_0 + a_1 \mathcal{L}\varphi_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L} \equiv (y + af - c)(\mathcal{D} - x^2) - a_1 f - \frac{1}{\alpha R} (\mathcal{D}^2 - 2x^2 \mathcal{D} + \alpha^2) \quad (3.8)$$

ここで、 $S=1$ において  $y=1-r^2$  の変換を  $\mathcal{D}$  に与えることは

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{d^2}{dy^2} & S=0 \\ \mathcal{D} &= 4(1-y) \frac{d^2}{dy^2} & S=1 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

の意味である。

我々は  $\langle f \rangle$  を

$$\left. \begin{aligned} \langle f \rangle &= \int_{-1}^1 f dy & S=0 \\ \langle f \rangle &= \int_0^1 f dy & S=1 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

のように定義する。Galerkin の方法によつて、係数を求めることは

しよう。(3.7) に  $\varphi_0$  および  $\varphi_1$  をから、各を全域にわたつて積分する

と

$$\left. \begin{aligned} \langle \varphi_0, \mathcal{L}\varphi_0 \rangle a_0 + \langle \varphi_0, \mathcal{L}\varphi_1 \rangle a_1 &= 0 \\ \langle \varphi_1, \mathcal{L}\varphi_0 \rangle a_0 + \langle \varphi_1, \mathcal{L}\varphi_1 \rangle a_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

をうる。これらの方程式は  $\mathcal{D}$  の中に  $a_0, a_1$  をふくむため、一次方程式ではないが、上の式に現れる  $a_0, a_1$  をまず消去し

$$\begin{vmatrix} \langle \varphi_0, \mathcal{L}\varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \mathcal{L}\varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \mathcal{L}\varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \mathcal{L}\varphi_1 \rangle \end{vmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

をうる。ここで

$$\langle \varphi_k, \mathcal{L}\varphi_j \rangle = a_{jk} - c_{jk} + c_{jk} - \frac{1}{\alpha R} d_{jk} \quad j, k = 0, 1 \quad (3.13)$$

とすれば、

$$\left. \begin{aligned} a_{jk} &= \langle \varphi_j | \mathcal{D}^2 \varphi_k \rangle - \langle \varphi_j | (\mathcal{D}^2) \varphi_k \rangle - \alpha^2 \langle \varphi_j | \varphi_k \rangle \\ b_{jk} &= \langle \varphi_j | \mathcal{D} \varphi_k \rangle - \alpha^2 \langle \varphi_j | \varphi_k \rangle \\ c_{jk} &= \langle \varphi_j | \mathcal{D} \varphi_k \rangle - \alpha^2 \langle \varphi_j | \varphi_k \rangle \\ d_{jk} &= \langle \varphi_j | \mathcal{D}^2 \varphi_k \rangle - 2\alpha^2 \langle \varphi_j | \mathcal{D} \varphi_k \rangle + \alpha^4 \langle \varphi_j | \varphi_k \rangle \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

である。  $a_{ij}, \dots, d_{jk}$  に現れる  $\langle \rangle$  は実定数であり、1 次  $\alpha^2$  まで  
 $\alpha^2$  以下の関数である。

(3.12) を線形理論の場合と同じく、特性方程式とよぶ。線形理論  
との違いは、その中に擾乱の振幅  $\alpha$  をよく入れておくことである。そこで  
(3.12) は

$$F(\alpha, R, a, c) = 0 \quad (3.15)$$

の形にかける。もっと具体的に、実数部と虚数部に分けて書けば

$$Aa - Bc + C = 0 \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\{a, a\} B^2 - 2\{a, b\} AB + \{b, b\} A^2] a^2 - [\{a, b\} BC - \{b, b\} CA \\ & + \{b, c\} AB - \{c, a\} B^2] a + \frac{1}{2} [\{c, c\} B^2 - \{b, c\} BC + \frac{1}{2} \{b, b\} c^2 \\ & - \frac{1}{(\alpha R)^2} B^2 D] = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} \{a, a\}(\alpha) &= \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} \\ a_{10} & b_{11} \end{vmatrix} = a_{00} b_{11} + a_{11} b_{00} - a_{01} b_{10} - a_{10} b_{01} \\ & \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (3.18) \\ A(\alpha) = \{a, d\}, \quad B(\alpha) = \{b, d\}, \quad C(\alpha) = \{c, d\}, \quad D(\alpha) = \{d, d\} \end{aligned}$$

で  $\{a, a\}, \dots, A, B, C, D$  は  $\alpha^2$  以下の関数である。(3.16), (3.17)

より  $c$  を消去すれば、一般に  $\alpha, R, a$  の関数  $G$

$$G(\alpha, R, a) = 0 \quad (3.18)$$

える。  $\alpha$  はその式の形から実数でなければならぬ。(3.19) は  $\alpha$  についての二次方程式であり、 $(\alpha, R)$  とした場合その二つ因子の一方の实根が中立解を表すものと考へらる。今  $(\alpha, R, a)$  の三次空間を考へれば中立解は一つの曲面でなければならぬ。一つの实根は、中立解があるか否かを示す  $(\alpha, R)$  面における境界である。我々は二の曲面を“中立曲面”、この曲線を“中立曲线”と呼ぶ。中立曲线は(3.19)の实根、すなわち判別式  $\Delta = 0$  とおいて置られ。C-1 区 ( $S=0$ ) H-P 区 ( $S=1$ ) について各々

$$R = \frac{7.02997 \sqrt{(\alpha^2 + 0.719043)(\alpha^2 - 9.33739)(\alpha^4 + 6\alpha^2 + 31.5)(\alpha^4 + 22\alpha^2 + 247.5)}}{\alpha(\alpha^2 - 108.854107)} \quad (S=0) \quad (3.19)$$

$$R = 211.8798 \sqrt{J_1 J_2 / (\bar{\alpha}^2 J_0)} \quad \bar{\alpha} = \alpha/10$$

$$J_0 = -\bar{\alpha}^{20} - 2.3946666\bar{\alpha}^{18} - 2.2124444\bar{\alpha}^{16} - 0.53979591\bar{\alpha}^{14} \\ + 0.68868710\bar{\alpha}^{12} + 0.57925386\bar{\alpha}^{10} + 0.14376370\bar{\alpha}^8 \\ - 0.011912878\bar{\alpha}^6 - 0.0084071719\bar{\alpha}^4 - 0.00021999407\bar{\alpha}^2 \\ + 0.00014294409$$

$$J_1 = \bar{\alpha}^{16} + 2.3016486\bar{\alpha}^{14} + 2.7028169\bar{\alpha}^{12} + 1.8445491\bar{\alpha}^{10} \\ + 0.77288948\bar{\alpha}^8 + 0.17438359\bar{\alpha}^6 + 0.013477614\bar{\alpha}^4 \\ - 0.0016373684\bar{\alpha}^2 - 0.00024585671$$

$$J_2 = \bar{\alpha}^8 + 1.408\bar{\alpha}^6 + 1.1904\bar{\alpha}^4 + 0.3096576\bar{\alpha}^2 \\ + 0.037158912$$

(S=1)

(3.20)

がえらる。二からそれぞれ3, 4個にそれぞれあり。

中立曲面を

$$\left. \begin{aligned}
 G(\alpha, R, E) &= 0 \\
 E &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) dy & s=0 \\
 E &= \pi \int_0^1 (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) r dr & s=1
 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

の形に書き直すが、もっと物理的にわかり易い形である。ここで  $E$  は擾乱のエネルギーの空間平均である。中立曲面は  $C$ -流について大抵 2 回のみをとり、その  $R = \text{const.}$  における断面は第 5 図に示されている。  $H$ -流についてはまだ計算が完了していない。

臨界 Reynolds 数  $R_{cr}$ 、その状態での波数  $\alpha_{cr}$  は次のように定め。

$$\left. \begin{aligned}
 R_{cr} &= 45, 212 \\
 \alpha_{cr} &= 13, 565
 \end{aligned} \right\} \quad s=0 \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 R_{cr} &= 655 \\
 \alpha_{cr} &= 5.8
 \end{aligned} \right\} \quad s=1 \quad (3.23)$$

ここで  $C$ -流については、半巾、相対速度の半巾、  $H$ - $P$  流については直径と平均速度によって Reynolds 数がつけられている。

#### § 4. おまけ

この論文では、流体力学における不安定性の非線形問題については述べないが、著者のあつかる場合に限られている。 Meksyn & Stuart,<sup>7)</sup> Stuart,<sup>9)</sup> Watson,<sup>11)</sup> Gotch<sup>4)</sup> Benny & Lin<sup>1-3)</sup> 等のあつこを附記しておく。

ここで行われる近似法において省略される項は、higher harmonics

higher modes  $\varphi_2, \varphi_3, \dots$  であり。前者は層中の大きいところ  
で、後者は  $R$  が大きい所で起こると思われる。

この解析では  $\alpha R$  が非常に大きいという結果がでた。それ故  
ううな粘性層と仮定する方がよさそうに思われる。しかし、この場合  
は、 $d^4\varphi/dy^4$  が大きいことが仮定されている。我々の場合には、 $\alpha$  が  
10 程度になり、 $d^4/dx^4$  の項から出てくる  $\alpha^4$  の項が  $d^4\varphi/dy^4$  の項にく  
らべてずっと大きい効果をもたらし、事情はとらわっている。線形理論の場  
合に  $\alpha$  が小さいことは、平均流の方向の長い渦の存在を表し、我々の場合  
に  $\alpha$  が大きいことは、流れに垂直な方向の長い渦の存在を表す。つまり  
後者では、流れに垂直な方向の mixing が変わらなっていることを示して  
いる。

H-P 流について、 $e^{i\theta}$  に比例する ( $\theta$  は方位角) 軸対称である擾乱  
が軸対称の擾乱より不安定である可能性がある。これに対する解析も後  
事、やる必要があると思われる。

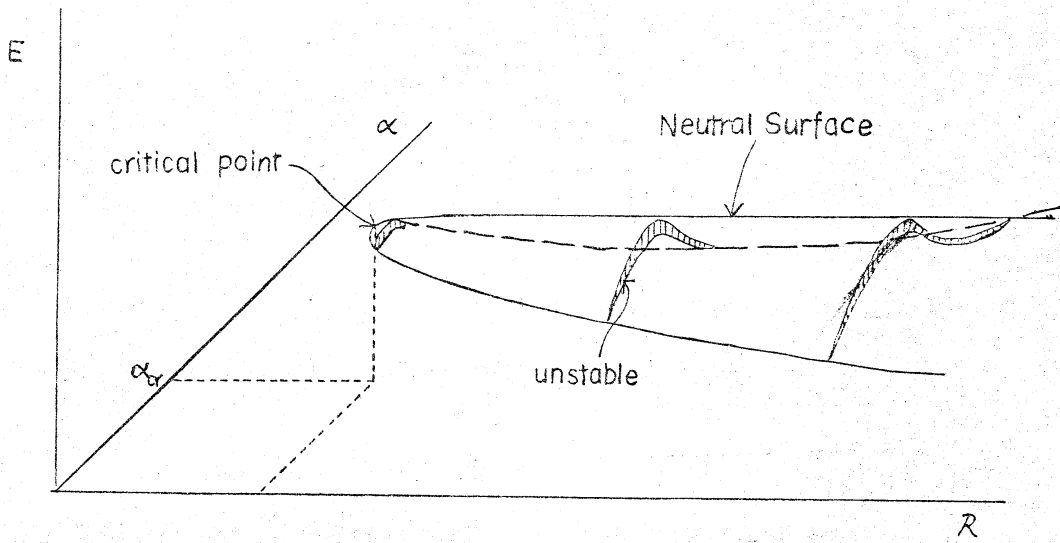
C-流、H-P 流においては、擾乱の平均流に対する反作用が不安定性  
に重大な効果をもたらし、以上の解析がその本質を十分つかんでいると考  
えられる。

#### 参考文献:

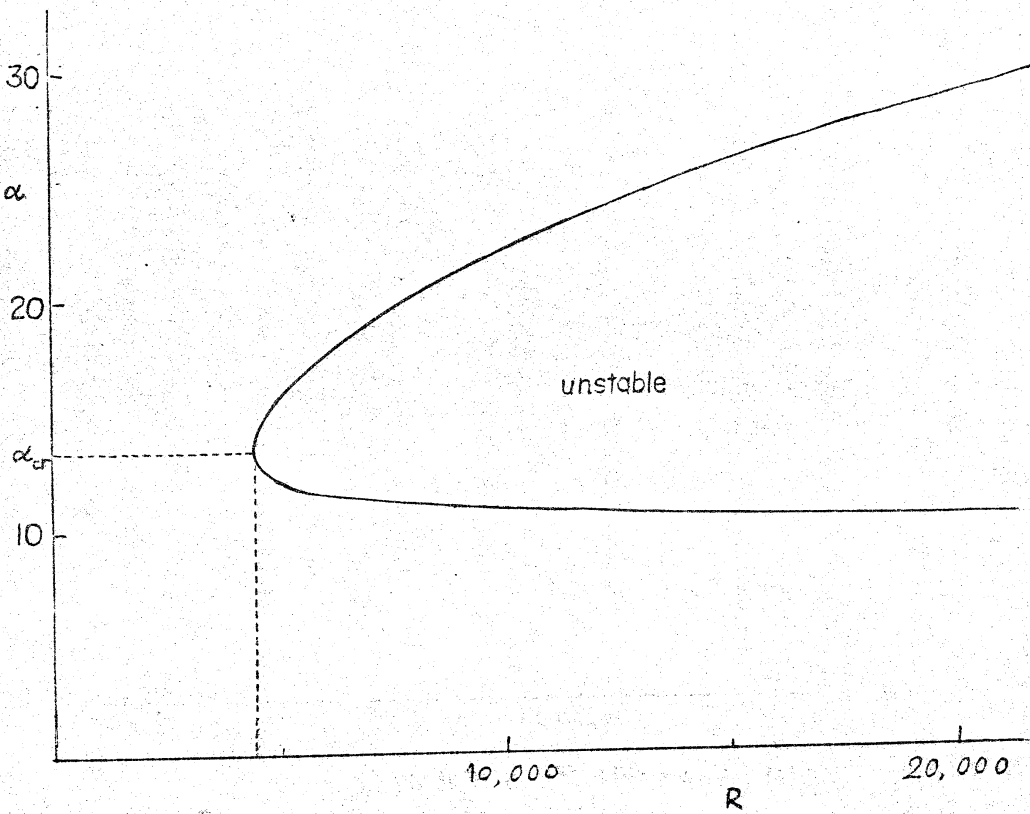
- 1) Benny, D. J. = JFM 10 (1961) 209
- 2) Benny, D. J. = Phys FL. 7 (1964) 319.
- 3) Benny, D. J. & C.C. Lin. Phys FL. 3 (1960) 656.

- 4) Gotoh, K. : 物理学分科会 (応用力学) 予稿集 (1963)
- 5) Lin, C. C. : Hydrodynamic stability, Cambr. Univ. Press
- 6) Lin, C. C. : Boundary Layer Res. Symp. (1957, Freiburg)  
ed. by H. Görtler, 144-60.
- 7) Meksyn, D. & J. T. Stuart : Proc. Roy. Soc. A 208  
(1951) 517-26.
- 8) Schada, H. : Phys. FL. 7 (1964) 623.
- 9) Stuart, J. T. : JFM 9 (1960) 353.
- 0) Stuart, J. T. : Applied Mechanics, Proc. 10th Congr.  
of Appl. Mech. (1960, Stresa) ed. by Rella, F. &  
W. T. Koiter, 63
- 1) Watson, J. : JFM 9 (1960) 371.

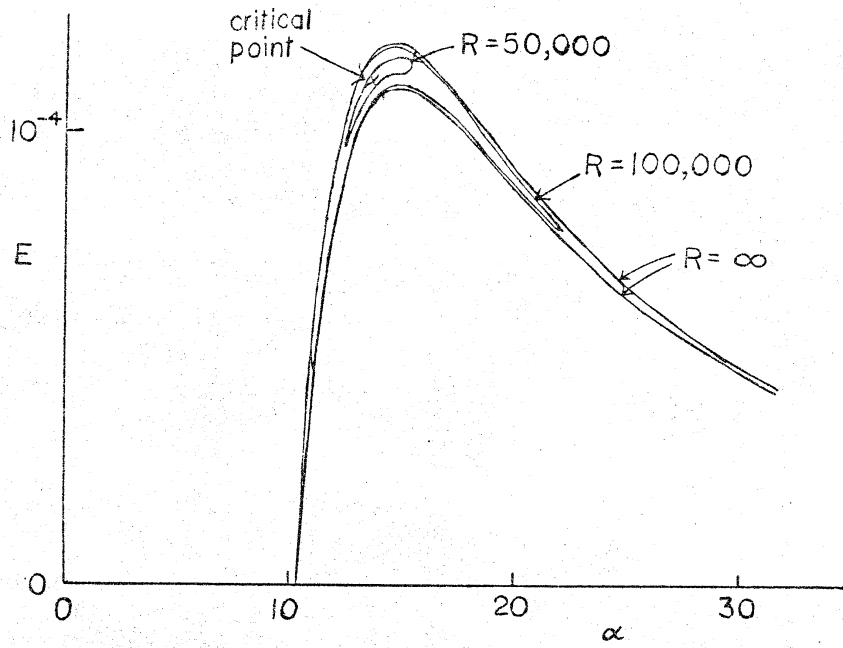




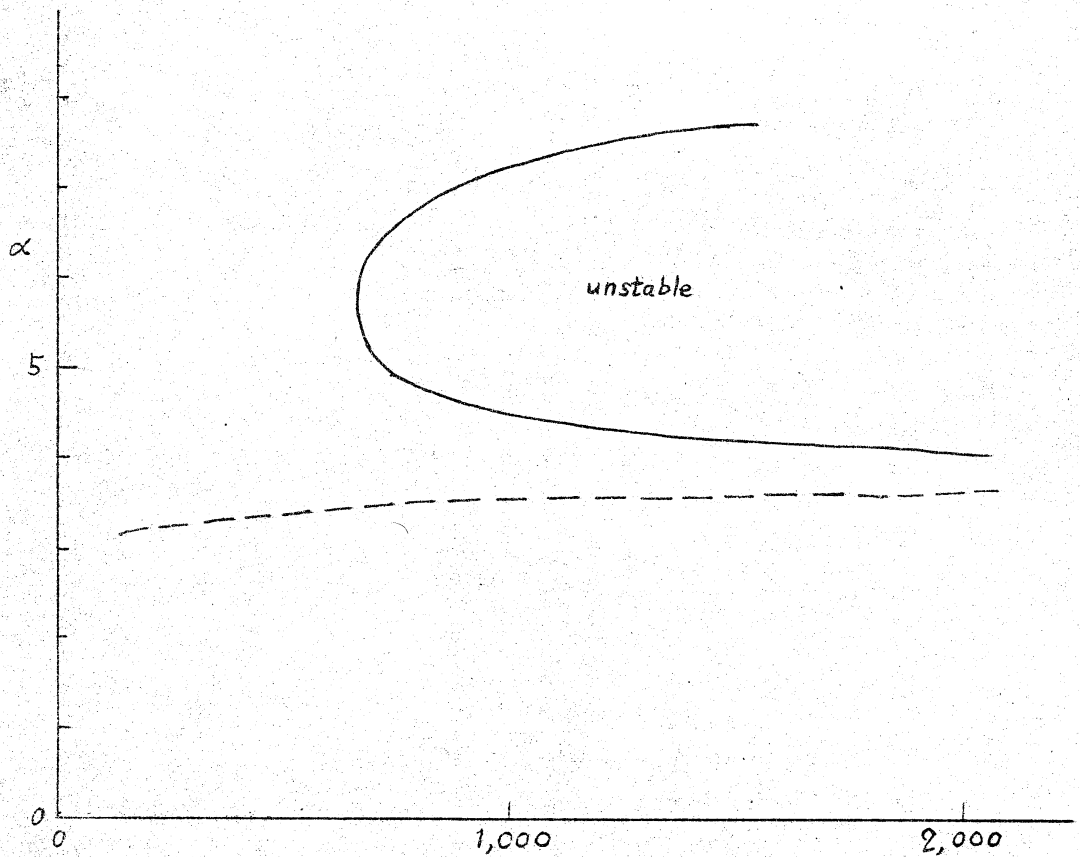
※2図 中立曲面 (平面 Couette 流)



※3図 平面 Couette 流の中立曲線



才5図 中立曲面の断面 (平面 Couette 流)



才4图 Hagen-Poiseuille 流の中立曲线  $R$