数理解析研究所講究録
25巻 1967年 240-261

要因計画の模型と分散分析

広島大理　山本純恭
広島大理　藤越康祝

§0. 要約

母数型の多元配置計画において，主効果，2要因交互作用等，いわゆる効果の定義は特に各セルにおける繰返し数が一定でない場合必らずしも明確でない．分散分析において，模型に交互作用が仮定される場合，主効果の検定に適当な平方和は主効果がどのように定義されているかに関係してくる．我々は「定義ウエイト」の概念を導入して各効果の一般的な定義を与える．各効果が一意的に定まるためのウエイトのみたすべき条件，各効果の性質，分散分析等について述べる．§1と§2において2元配置計画について述べ，§3で3元配置計画を扱う．多元配置計画への拡張は容易である．

用いる記号を整理する．

I_s ：　$s \times s$の単位行列

G_s ：　要素がすべて1である$s \times s$行列

j_s ：　成分がすべて1であるs次の列ベクトル

A' ：　行列Aの転置行列

A^* ：　行列Aの一般化された逆行列，すなわち　$AA^*A=A$，$A^*AA^*=A^*$ をみたすものとする．

$A\ (n\times m)$: $n\times m$ 行列

$\mathrm{tr}A$: 行列 $A=(a_{ij})$ の対角線和, すなわち $\mathrm{tr}A=\sum a_{ii}$

$A\otimes B$: 行列 $A=(a_{ij})$ と B のクロネッカー積, すなわち $A\otimes B=(a_{ij}B)$

$\|\underline{x}\|$: ベクトル $\underline{x}'=(x_1, x_2, \cdots x_n)$ の長さ, すなわち $\|\underline{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

$A\oplus B$: 行列 A, B の直和

$\mathcal{R}[A]$: 行列 A の列ベクトルによってはられるベクトル空間

$\mathcal{P}[A]$: $\mathcal{R}[A]$ への射影子

§1. 2元配置計画

要因 A_1, A_2 の水準数をそれぞれ l_1, l_2 とする. A_1 の i_1 水準と A_2 の i_2 水準の処理の組合せとして定まる (i_1, i_2) セルにおける観測値の平均を $\eta(i_1, i_2)$ とする. $\eta(i_1, i_2)$ は一般効果 μ, A_1 の i_1 水準による主効果 $a_1(i_1)$, A_2 の i_2 水準による主効果 $a_2(i_2)$, および, 交互作用 $a_{12}(i_1, i_2)$ に分解される. すなわち,

$$\eta(i_1, i_2)=\mu+a_1(i_1)+a_2(i_2)+a_{12}(i_1, i_2) \qquad \cdots (1.1)$$

パラメーター μ, $a_1(i_1)$, $a_2(i_2)$, $a_{12}(i_1, i_2)$ を一意的に定義するため, 通常, 次の制約条件がおかれる.

$$\sum_{i_1=1}^{l_1} a_1(i_1)=0, \quad \sum_{i_2}^{l_2} a_2(i_2)=0, \quad \forall i_1, \sum_{i_2=1}^{l_2} a_{12}(i_1, i_2)=0, \quad \forall i_2, \sum_{i_1=1}^{l_1} a_{12}(i_1, i_2)=0 \qquad \cdots (1.2)$$

Scheffé (1959) は交互作用を一般的に定義するため非負の (l_1+l_2) 個のウエイト $\{u(i_1)\}$, $\{v(i_2)\}$ を用いた一般的な制約条件

$$\sum_{i_1=1}^{l_1} u(i_1)a_1(i_1)=\sum_{i_2=1}^{l_2} v(i_2)a_2(i_2)=0,\quad {}^{\forall}i_1,\ \sum_{i_2=1}^{l_2} v(i_2)a_{12}(i_1,i_2)=0,\quad {}^{\forall}i_2,\ \sum_{i_1=1}^{l_1} u(i_1)a_{12}(i_1,i_2)=0 \quad \cdots(1.3)$$

を与えている．(1.3)は(1.2)を含む一般的な制約条件である．しかし，このScheffé の一般的なウエイトづけを用いても，例えば，Rao の著書(1952)等にみられる分散分析(模型に関する記述はない)の妥当性，すなわち，例えば，列主効果を消去した行主効果の平方和の非心率が行主効果のパラメーターのみに関係すると云う結果が得られないことが分った．

我々は l_1l_2 個の非負のウエイト $\{W(i_1,i_2)\}$ を用いて，制約条件

$$\sum_{i_1=1}^{l_1} W(i_1,\cdot)a_1(i_1)=\sum_{i_2=1}^{l_2} W(\cdot,i_2)a_2(i_2)=0,\quad {}^{\forall}i_1,\ \sum_{i_2=1}^{l_2} W(i_1,i_2)a_{12}(i_1,i_2)=0,\quad {}^{\forall}i_2,\ \sum_{i_1=1}^{l_1} W(i_1,i_2)a_{12}(i_1,i_2)=0 \cdots(1.4)$$

をみたすものとして各パラメーターを定義する．ただし，

$$W(i_1,\cdot)=\sum_{i_2=1}^{l_2} W(i_1,i_2),\quad W(\cdot,i_2)=\sum_{i_1=1}^{l_1} W(i_1,i_2),\quad W(\cdot,\cdot)=\sum_{i_1=1}^{l_1}\sum_{i_2=1}^{l_2} W(i_1,i_2)\ .$$

以下の議論において，ウエイト $\{W(i_1,i_2)\}$ は任意の i_1, i_2 に対して，$W(i_1,\cdot)>0$，$W(\cdot,i_2)>0$ をみたすものとする．

定義

任意の $\{\eta(i_1,i_2)\}$ に対して，制約条件(1.4)が $\eta(i_1,i_2)$ の一意的分解(1.1)を与えるとき，ウエイト $\{W(i_1,i_2)\}$ を定義ウエイトと云う．

要因 A_p に関係する主効果のベクトルを $\mathbf{a}_p$，すなわち，

$$\mathbf{a}_p'=(a_p(1),\ a_p(2),\cdots,\ a_p(l_p)),\qquad p=1,2.$$

A_1, A_2 に関係する交互作用のベクトルを $\mathbf{a}_{12}$，すなわち，

$$\mathbf{a}_{12}'=(a_{12}(1,1),\ a_{12}(1,2),\cdots,a_{12}(1,l_2),\ a_{12}(2,1)\cdots\ a_{12}(l_1,l_2)).$$

とする．

$$\Psi = D_{\sqrt{W}}\, \mathbf{j}_{\ell_1} \otimes \mathbf{j}_{\ell_2},\quad \Psi_1 = D_{\sqrt{W}}\, I_{\ell_1} \otimes \mathbf{j}_{\ell_2},\quad \Psi_2 = D_{\sqrt{W}}\, \mathbf{j}_{\ell_1} \otimes I_{\ell_2},\quad \Psi_{12} = D_{\sqrt{W}}\, I_{\ell_1} \otimes I_{\ell_2}.$$

とおく．ただし，

$$D_{\sqrt{W}} = \mathrm{diag}\left(\sqrt{W(1,1)}, \sqrt{W(1,2)}, \cdots \sqrt{W(1,\ell_2)}, \sqrt{W(2,1)}, \cdots \sqrt{W(\ell_1,\ell_2)}\right).$$

このとき，制約条件(1.4)は次のように行列表示される．

$$\Psi' \Psi_p \underline{\alpha}_p = 0, \quad \Psi_p' \Psi_{12} \underline{\alpha}_{12} = 0, \quad p = 1, 2.$$

とくに $W(i_1, i_2)$ をすべて1にとると，通常の制約条件

$$\mathbf{j}_{\ell_p}' \underline{\alpha}_p = 0, \quad p = 1, 2. \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{\ell_1}' \otimes I_{\ell_2} \\ I_{\ell_1} \otimes \mathbf{j}_{\ell_2}' \end{bmatrix} \underline{\alpha}_{12} = 0 .$$

をうる．

(1.1)を行列表示し，$D_{\sqrt{W}}$ を左からかけて，

$$\Psi_{12} \underline{\eta} = \Psi \mu + \Psi_1 \underline{\alpha}_1 + \Psi_2 \underline{\alpha}_2 + \Psi_{12} \underline{\alpha}_{12} \qquad \cdots (1.5)$$

をうる．ただし，$\underline{\eta}' = (\eta(1,1), \eta(1,2) \cdots \eta(1,\ell_2), \eta(2,1) \cdots \eta(\ell_1,\ell_2))$．(1.5)に左から Ψ_p' をかけ，制約条件 $\Psi_p' \Psi_{12} \underline{\alpha}_{12} = 0$ を用いると，

$$\begin{bmatrix} \Psi_1' \\ \Psi_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi & \Psi_1 & \Psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{\alpha}_1 \\ \underline{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1' \\ \Psi_2' \end{bmatrix} \Psi_{12} \underline{\eta} \qquad \cdots (1.6)$$

をうる．(1.6)はパラメーター μ，$\alpha_1(i_1)$，$\alpha_2(i_2)$ がウエイトづきの平方和

$$\sum_{i_1=1}^{\ell_1} \sum_{i_2=1}^{\ell_2} W(i_1,i_2) \{\eta(i_1,i_2) - \mu - \alpha_1(i_1) - \alpha_2(i_2)\}^2 = \| \Psi_{12} \underline{\eta} - \Psi \mu - \Psi_1 \underline{\alpha}_1 - \Psi_2 \underline{\alpha}_2 \|^2$$

を最小にするように定義されていることを示している．

定理1

次の条件は互に同値である．

(i) $\{W(i_1,i_2)\}$ が定義ウエイトである．

(ii) $\mathrm{Rank}\, D_W A^{\#}_{10} D_W = \mathrm{Rank}\, A^{\#}_{10}$, $\mathrm{Rank}\, D_W A^{\#}_{01} D_W = \mathrm{Rank}\, A^{\#}_{01}$, $\mathrm{Rank}\, D_W A^{\#}_{00} D_W = \mathrm{Rank}\, A^{\#}_{00}$.

(iii) $\mathrm{Rank}\,[D_{\ell_1} - W D_{\ell_2}^{-1} W'] = \ell_1 - 1$

(iv) $[W D_{\ell_2}^{-1} W' D_{\ell_1}^{-1}]^{s}$ の各要素がすべて正となる自然数 s が存在する．

ただし．$A^{\#}_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = A^{\#}_{\varepsilon_1} \otimes A^{\#}_{\varepsilon_2}$, $A^{\#}_{\varepsilon_p} = \varepsilon_p (I_{\ell_p} - \frac{1}{\ell_p} G_{\ell_p}) + (1-\varepsilon_p)\frac{1}{\ell_p} G_{\ell_p}$, $\varepsilon_p = 0$ 又は 1

, $D_W = D^2_{\sqrt{W}}$, $D_{\ell_1} = \mathrm{diag}(W(1,\cdot), \cdots, W(\ell_1,\cdot))$, $D_{\ell_2} = \mathrm{diag}(W(\cdot,1), \cdots, W(\cdot,\ell_2))$, $W = (W(i_1,i_2))$

[証明]

(1.1)と(1.4)よりパラメーターの決定方程式

$$\begin{bmatrix} j_{\ell_1}\otimes j_{\ell_2} & I_{\ell_1}\otimes j_{\ell_2} & j_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2} & I_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2} \\ 0 & \Psi_1'\Psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_2'\Psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_1'\Psi_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_2'\Psi_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \underline{a}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix} \quad \cdots (1.7)$$

をうる．

(1.7)の左辺の係数行列の階数は

$$\mathrm{Rank}\,[j_{\ell_1}\otimes j_{\ell_2}, I_{\ell_1}\otimes j_{\ell_2}, j_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2}, I_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2}] + \mathrm{Rank}\,\Psi_1'\Psi_1 + \mathrm{Rank}\,\Psi_2'\Psi_2 + \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} \Psi_1'\Psi_{12} \\ \Psi_2'\Psi_{12} \end{bmatrix}$$

$$= \ell_1\ell_2 + 2 + \mathrm{Rank}\,\Psi_{12}'[\Psi_1, \Psi_2]$$

に等しい．従って．$\{W(i_1,i_2)\}$ が定義ウエイトであるための必要十分条件は

$$\mathrm{Rank}\,\Psi_{12}'[\Psi_1, \Psi_2] = \ell_1 + \ell_2 - 1$$

であることが分る.

$$\mathrm{Rank}\,\Psi_{12}'[\Psi_1,\Psi_2]=\mathrm{Rank}\,D_W[I_{\ell_1}\otimes\underline{j}_{\ell_2},\ \underline{j}_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2}]$$

$$=\mathrm{Rank}\,D_W[I_{\ell_1}\otimes\underline{j}_{\ell_2},\ \underline{j}_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2}][I_{\ell_1}\otimes\underline{j}_{\ell_2},\ \underline{j}_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2}]'D_W$$

$$=\mathrm{Rank}\,D_W(I_{\ell_1}\otimes G_{\ell_2}+G_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2})D_W=\mathrm{Rank}\,D_W(\ell_2A_{10}^{\#}+\ell_1A_{01}^{\#}+(\ell_1+\ell_2)A_{00}^{\#})D_W$$

$$=\mathrm{Rank}\,D_WA_{10}^{\#}D_W+\mathrm{Rank}\,D_WA_{01}^{\#}D_W+\mathrm{Rank}\,D_WA_{00}^{\#}D_W$$

$$\leqq\mathrm{Rank}\,A_{10}^{\#}+\mathrm{Rank}\,A_{01}^{\#}+\mathrm{Rank}\,A_{00}^{\#}=\ell_1+\ell_2-1$$

上の不等式において, 等号がなりたつのは(ii)がなりたつときに限るから, (i)と(ii)は同値である.

$$\mathrm{Rank}\,\Psi_{12}'[\Psi_1,\Psi_2]=\mathrm{Rank}\,[I_{\ell_1}\otimes\underline{j}_{\ell_2},\underline{j}_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2}]'D_{\sqrt{W}}^2[I_{\ell_1}\otimes\underline{j}_{\ell_2},\ \underline{j}_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2}]$$

$$=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}D_{\ell_1} & W\\ W' & D_{\ell_2}\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}I_{\ell_1} & -WD_{\ell_2}^{-1}\\ 0 & I_{\ell_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{\ell_1} & W\\ W' & D_{\ell_2}\end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}D_{\ell_1}-WD_{\ell_2}^{-1}W' & 0\\ W' & D_{\ell_2}\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\,[D_{\ell_1}-WD_{\ell_2}^{-1}W']+\ell_2$$

従って, (i)と(iii)は同値である.

(iii)と(iv)が同値であることを示す. (iv)は Peron の定理から, $WD_{\ell_2}^{-1}W'D_{\ell_1}^{-1}$ の最大固有値が単根であることと同値である. $WD_{\ell_2}^{-1}W'D_{\ell_1}^{-1}$ の固有根を ρ とすると,

$$|WD_{\ell_2}^{-1}W'D_{\ell_1}^{-1}-\rho I|=|D_{\ell_1}^{-\frac{1}{2}}||D_{\ell_1}^{\frac{1}{2}}WD_{\ell_2}^{-1}W'D_{\ell_1}^{-\frac{1}{2}}-\rho I||D_{\ell_1}^{-\frac{1}{2}}|$$

であるから, ρ は非負である. $WD_{\ell_2}^{-1}W'D_{\ell_1}^{-1}$ は各要素が非負で,

$$\underline{j}_{\ell_1}'WD_{\ell_2}^{-1}W'D_{\ell_1}^{-1}=\underline{j}_{\ell_1}'$$

をみたすから確率行列である. 従って, $0\leqq\rho\leqq1$ で $\rho=1$ の根を少くとも一つもっていることが分る. 一方, $D_{\ell_1}^{-\frac{1}{2}}(D_{\ell_1}-WD_{\ell_2}^{-1}W')D_{\ell_1}^{-\frac{1}{2}}$ の固有根は $1-\rho$

であり，零でない固有根の数は $D_{\ell_1}-WD_{\ell_2}^{-1}W'$ の零でない固有根の数と等しい．従って，(iii) と $WD_{\ell_2}^{-1}W'D_{\ell_1}^{-1}$ の最大固有根が単根であることは互に同値である．従って，(iii) と (iv) は同値となる．

定理2

ある定義ウエイトから定まる交互作用がすべて零であると，任意の定義ウエイトから定まる交互作用もすべて零になる．このとき，主効果 $\{a_1(i_1)\}$，又は $\{a_2(i_2)\}$ の対比は定義ウエイトに関係しない．

証明

ある定義ウエイト $\{W^{(0)}(i_1,i_2)\}$ から定まる μ，$a_1(i_1)$，$a_2(i_2)$，$a_{12}(i_1,i_2)$ を $\mu^{(0)}$，$a_1^{(0)}(i_1)$，$a_2^{(0)}(i_2)$，$a_{12}^{(0)}(i_1,i_2)$ で表わし，

任意の i_1，i_2 に対して，　$a_{12}^{(0)}(i_1,i_2)=0$

とする．このとき，

$$\eta(i_1,i_2)=\mu^{(0)}+a_1^{(0)}(i_1)+a_2^{(0)}(i_2) \qquad \cdots (1.8)$$

任意の定義ウエイト $\{W(i_1,i_2)\}$ に対して，(1.6) より，

$$\begin{bmatrix} \underline{W}_{\ell_1} & D_{\ell_1} & W \\ \underline{W}_{\ell_2} & W' & D_{\ell_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1' \\ \Psi_2' \end{bmatrix} \Psi_{12}\underline{\eta} \qquad \cdots (1.9)$$

をうる．ただし，$\underline{W}_{\ell_1}'=(W(1,\cdot),\cdots,W(\ell_1,\cdot))$，$\underline{W}_{\ell_2}'=(W(\cdot,1),\cdots,W(\cdot,\ell_2))$．(1.8) を (1.9) に代入して，整理すると，

$$\begin{bmatrix} \underline{W}_{\ell_1} & D_{\ell_1} & W \\ \underline{W}_{\ell_2} & W' & D_{\ell_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu-\mu^{(0)} \\ \underline{a}_1-\underline{a}_1^{(0)} \\ \underline{a}_2-\underline{a}_2^{(0)} \end{bmatrix} = 0$$

をうる．ただし $\underline{a}_p^{(0)\prime}=(a_p^{(0)}(1),\cdots,a_p^{(0)}(\ell_p))$，$p=1,2$．

$\{W(i_1,i_2)\}$が定義ウエイトであるから

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} \underline{W}_{\ell_1} & D_{\ell_1} & W \\ \underline{W}_{\ell_2} & W' & D_{\ell_2} \end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} D_{\ell_1} & W \\ W' & D_{\ell_2} \end{bmatrix}=\ell_1+\ell_2-1$$

である．

行列 $\begin{bmatrix} 1 & -\underline{1}_{\ell_1}' & 0 \\ 1 & 0 & -\underline{1}_{\ell_2}' \end{bmatrix}$ の各行ベクトルは行列 $\begin{bmatrix} \underline{W}_{\ell_1} & D_{\ell_1} & W \\ \underline{W}_{\ell_2} & W' & D_{\ell_2} \end{bmatrix}$ のすべての行ベクトルと直交し，その階数は2である．従って，

$$\begin{aligned} &\mu-\mu^{(0)}=b_1+b_2 \\ &a_p(i_p)-a_p^{(0)}(i_p)=-b_p, \quad p=1,2. \end{aligned} \qquad (1.10)$$

をうる．ただし，b_1，b_2は任意の定数である．(1.10)より，

$$\mu+a_1(i_1)+a_2(i_2)=\mu^{(0)}+a_1^{(0)}(i_1)+a_2^{(0)}(i_2)=\eta(i_1,i_2)$$

をうる．従って，任意のi_1，i_2に対して，$a_{12}(i_1,i_2)=0$となる．$\sum_{i_p}\lambda_p(i_p)=0$なる任意の$\{\lambda_p(i_p)\}$に対して，(1.10)から容易に

$$\sum_{i_p}\lambda_p(i_p)a_p(i_p)=\sum_{i_p}\lambda_p(i_p)a_p^{(0)}(i_p), \qquad p=1,2.$$

をうる．

§2．分散分析

定義ウエイト$\{W(i_1,i_2)\}$から定まる各効果に関する分散分析を考える．(i_1,i_2)セルにおける観測値を$y(i_1,i_2,k)$，$k=1,2,\cdots,n(i_1,i_2)$とし，次の模型をおく．

$$\Omega\ \begin{cases} y(i_1,i_2,k),\ i_1=1,\cdots,l_1,\ i_2=1,\cdots,l_2,\ k=1,\cdots,n(i_1,i_2).\ \text{は互に独立で，平均}\ \eta(i_1,i_2),\ \text{分散}\ \sigma^2\ \text{の正規分布に従う．} \\ \eta(i_1,i_2)=\mu+a_1(i_1)+a_2(i_2)+a_{12}(i_1,i_2). \\ \text{各パラメーター}\ \mu,\ a_1(i_1),\ a_2(i_2),\ a_{12}(i_1,i_2)\ \text{は(1.4)の制約条件をみたす．} \end{cases}$$

このとき，仮説

$$\omega_1:\quad \Omega\ \&\ \mathbf{a}_{12}=0$$

$$\omega_2:\quad \Omega\ \&\ \mathbf{a}_1=0$$

の尤度比検定(L.R.T.)を考える．次の行列記号を用いる．

$$\mathbf{y}'=(y(1,1,1),\cdots,y(1,1,n(i_1,i_2)),y(1,2,1),\cdots,y(1,l_2,n(1,l_2)),y(2,1,1),\cdots y(l_1,l_2,n(l_1,l_2)))$$

$$\Phi=\mathbf{j}_n\ ,\quad n=\sum_{i_1}\sum_{i_2}n(i_1,i_2)\ ,$$

$$\varphi_p(\alpha,i_p)=\begin{cases}1 & \alpha\text{番目の観測値が要因}A_p\text{の}i_p\text{水準の処理をうけたとき．}\\ 0 & \text{そうでないとき．}\end{cases}$$

$r=(i_1-1)l_2+i_2$ に対して

$$\varphi_{12}(\alpha,r)=\begin{cases}1 & \alpha\text{番目の観測値が要因}A_1\text{の}i_1\text{水準の処理と}A_2\text{の}i_2\text{水準の処理をうけたとき．}\\ 0 & \text{そうでないとき．}\end{cases}$$

$\Phi_p(n\times l_p)=(\varphi_p(\alpha,i_1))$, $p=1,2$. $\Phi_{12}(n\times l_1l_2)=(\varphi_{12}(\alpha,r))$.

このとき，

$$E\mathbf{y}=\Phi\mu+\Phi_1\mathbf{a}_1+\Phi_2\mathbf{a}_2+\Phi_{12}\mathbf{a}_{12}$$

となる．$E\mathbf{y}=\Phi_{12}\boldsymbol{\eta}$ なることと任意の $\boldsymbol{\eta}$ に対して，制約条件(1.4)をみたす μ, $a_1(i_1)$, $a_2(i_2)$, $a_{12}(i_1,i_2)$ が存在することから，Ω のもとで，

$$\{\mathcal{E}\boldsymbol{y}\} = \mathcal{R}[\Phi_{12}]$$

をうる．又．ω_1のもとで

$$\{\mathcal{E}\boldsymbol{y}\} = \mathcal{R}[\Phi_1, \Phi_2]$$

なることが分る．従って．ω_1のL.R.T.の統計量は

$$F_1 = \frac{f_e}{f_1}\,\frac{\boldsymbol{y}'(P[\Phi_{12}] - P[\Phi_1, \Phi_2])\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}'(I_n - P[\Phi_{12}])\boldsymbol{y}}$$

と同値である．ただし．$f_e = n - \mathrm{tr}\,P[\Phi_{12}]$，$f_1 = \mathrm{tr}\,P[\Phi_{12}] - \mathrm{tr}\,P[\Phi_1, \Phi_2]$．一般に$F_1$は自由度$f_1$，$f_e$の非心率$\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\alpha}_{12}'\Phi_{12}'(P[\Phi_{12}] - P[\Phi_1, \Phi_2])\Phi_{12}\boldsymbol{\alpha}_{12}$をもつ非心F一分布に従う．$\omega_1$のL.R.T.の統計量は定義ウエイトに関係しないことが分る．

ω_2のL.R.T.は定義ウエイトに関係する．条件つきの最小自乗法に関連する補題を述べる．

補題1

ベクトル空间$V = \{A\boldsymbol{\xi} \mid H'\boldsymbol{\xi} = 0\}$への射影子$P_V$は．

$$P_V = A(A'A^*)A' - A(A'A)^*H_1(I_l - P[H_2'])\{(I_l - P[H_2'])H_1'(A'A)^*H_1(I_l - P[H_2'])\}^*(I_l - P[H_2'])H_1'(A'A)^*A'$$

で与えられる．ただし．$A(n \times m)$，$H(m \times l)$は概知の行列．$\boldsymbol{\xi}(m \times 1)$はパラメーターベクトル．$H_1 = P[A']H$，$H_2 = (I_m - P[A'])H$．

証明

制約条件$H'\boldsymbol{\xi} = 0$のもとで，$(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{\xi})'(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{\xi})$を最小にする$\boldsymbol{\xi}$を$\hat{\boldsymbol{\xi}}$とすると，$\Delta(l \times 1)$をLagrange乗数として．

$$\left.\begin{aligned} A'A\hat{\boldsymbol{\xi}} &= A'\boldsymbol{y} + H\Delta \\ H'\hat{\boldsymbol{\xi}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2.1)$$

の解として与えられる．このとき，

$$P_V \underline{y} \equiv A\hat{\underline{\tau}}$$

が成立する．(2.1)の最初の方程式は

$$H_2' \underline{\lambda} = 0$$

$$A'A\hat{\underline{\tau}} = A'\underline{y} + H_1 \underline{\lambda}$$

と同値であるから，

$$\underline{\lambda} = (I_\ell - P[H_2'])\underline{u}_1$$

$$\hat{\underline{\tau}} = (A'A)^* A'\underline{y} + (A'A)^* H_1 \underline{\lambda} + (I_m - P[A'])\underline{u}_2$$

をうる．ただし，$\underline{u}_1(\ell\times1)$，$\underline{u}_2(m\times1)$ は任意の定数ベクトル．従って，

$$\hat{\underline{\tau}} = (A'A)^* A'\underline{y} + (A'A)^* H_1 (I_\ell - P[H_2'])\underline{u}_1 + (I_m - P[A'])\underline{u}_2 \quad \cdots (2.2)$$

をうる．(2.2)に左から A をかけて

$$A\hat{\underline{\tau}} = A(A'A)^* A'\underline{y} + A(A'A)^* H_1 (I_\ell - P[H_2'])\underline{u}_1 \quad \cdots (2.3)$$

をうる．$H'\hat{\underline{\tau}} = 0$ をみたすように $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ をきめるとよい．(2.2)に左から H' をかけて

$$H'(A'A)^* A'\underline{y} + H'(A'A)^* H_1 (I_\ell - P[H_2'])\underline{u}_1 + H_2'\underline{u}_2 = 0 \quad \cdots (2.4)$$

をうる．(2.4)は

$$\left.\begin{aligned} &(I_\ell - P[H_2'])H_1'(A'A)^* A'\underline{y} + (I_\ell - P[H_2'])H_1'(A'A)^* H_1 (I_\ell - P[H_2'])\underline{u}_1 = 0 \\ &P[H_2']H_1'(A'A)^* A'\underline{y} + P[H_2']H_1'(A'A)^* H_1 (I_\ell - P[H_2'])\underline{u}_1 + H_2'\underline{u}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \cdots (2.5)$$

と同値である．(2.5)をみたす $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ は存在して，$\underline{u}_1$ は

$$\underline{u}_1 = -\{(I_\ell - P[H_2'])H_1'(A'A)^* H_1 (I_\ell - P[H_2'])\}^* (I_\ell - P[H_2'])H_1'(A'A)^* A'\underline{y}$$
$$+ (I_\ell - P[(I_\ell - P[H_2'])H_1'(A'A)^* H_1 (I_\ell - P[H_2'])])\underline{u}_3 \quad \cdots (2.6)$$

で与えられる．ただし，$\underline{u}_3(\ell\times1)$ は任意の定数ベクトル．(2.3)と(2.6)から補

題の結果をうる.

補題1において. $\mathcal{R}[H]\subseteq\mathcal{R}[A']$のとき P_Vは

$$P_V=A(A'A)^{*}A'-A(A'A)^{*}H[H'(A'A)^{*}H]^{*}H'(A'A)^{*}A'$$

となる.

ω_2のもとにおけるベクトル空間$\{\mathcal{E}\underline{y}\}$への射影子$P_{\omega_2}$は若干の計算の結果, 上の補題を用いて整理することにより.

$$P_{\omega_2}=\mathcal{P}[\Phi_{12}]-\tilde{\Phi}_{12}(\tilde{\Phi}_{12}'\tilde{\Phi}_{12})^{*}U_1'(I-\mathcal{P}[U_2'])\{(I-\mathcal{P}[U_2'])U_1'(\tilde{\Phi}_{12}'\tilde{\Phi}_{12})^{*}U_1(I-\mathcal{P}[U_2'])\}^{*}(I-\mathcal{P}[U_2'])U_1(\tilde{\Phi}_{12}'\tilde{\Phi}_{12})^{*}\tilde{\Phi}_{12}'$$

$(=\mathcal{P}[\Phi_{12}]-P_{\Omega\cap\omega_2^{\perp}}$とおく)

で与えられる. ただし. $\tilde{\Phi}_{12}=(I_n-\mathcal{P}[\Phi_2])\Phi_{12}$, $U=\Phi_{12}'[\Phi_1,\Phi_2]$, $\mathcal{P}[\tilde{\Phi}_{12}']U=U_1$, $(I_{R\Omega_2}-\mathcal{P}[\tilde{\Phi}_{12}'])U=U_2$. 従って, Ωのもとでのω_2のL.R.T.の統計量は

$$F_2=\frac{f_e}{f_2}\cdot\frac{\underline{y}'P_{\Omega\cap\omega_2^{\perp}}\underline{y}}{\underline{y}'(I_n-\mathcal{P}[\Phi_{12}])\underline{y}}$$

で与えられる. ただし, $f_2=\mathrm{tr}\,P_{\Omega\cap\omega_2^{\perp}}$. F_2は一般に自由度f_2, f_eの非心率$\frac{1}{2\sigma^2}\underline{\alpha}_1'\Phi_1'P_{\Omega\cap\omega_2^{\perp}}\Phi_1\underline{\alpha}_1$をもつ非心F−分布に従う.

とくに, $\{w(i_1,i_2)\}$として, 各セルの観測値に比例したウエイト$\{n(i_1,i_2)\}$をとり. $\{n(i_1,i_2)\}$が定義ウエイトであるとする. このとき. 制約条件(1.4)は

$$\Phi'\Phi_p\underline{\alpha}_p=0,\quad \Phi_p'\Phi_{12}\underline{\alpha}_{12}=0,\quad p=1,2.$$

となる. 又

$$P_{\Omega\cap\omega_2^{\perp}}=\mathcal{P}[\Phi_1,\Phi_2]-\mathcal{P}[\Phi_2]$$

となるから, ω_2のL.R.T.は

$$\frac{f_e}{l_1-1}\cdot\frac{\underline{y}'(P[\Phi_1,\Phi_2]-P[\Phi_2])\underline{y}}{\underline{y}'(I_n-P[\Phi_{12}])\underline{y}}$$

で与えられる．

$$(P[\Phi_{12}]-P[\Phi_1,\Phi_2])(P[\Phi_1,\Phi_2]-P[\Phi_2])=0$$

であるから，ω_1，ω_2のテストにおいて，分子の統計量は互に独立である．任意のi_1，i_2に対して，$n(i_1,i_2)>0$のとき，$f_e=n-l_1l_2$で，分散分析はRaoの著書(1952)にみられる

$$\underline{y}'(I_n-P[\underline{j}_n])\underline{y}=\underline{y}'(I_n-P[\Phi_{12}])\underline{y}+\underline{y}'(P[\Phi_{12}]-P[\Phi_1,\Phi_2])\underline{y}+\underline{y}'(P[\Phi_1,\Phi_2]-P[\Phi_2])\underline{y}$$
$$+\underline{y}'(P[\Phi_2]-P[\underline{j}_n])\underline{y}$$

になる．

§3．3元配置計画

要因A_1，A_2，A_3の水準数をそれぞれl_1，l_2，l_3とする．各要因A_pのi_p水準の処理の組合せとして定まる(i_1,i_2,i_3)セルにおける観測値の平均を$\eta(i_1,i_2,i_3)$とする．一般効果をμ，要因A_pに関係する主効果のベクトルを

$$\underline{a}'_p=(a_p(1),a_p(2),\cdots,a_p(l_p)),\quad p=1,2,3.$$

要因A_p，A_qに関係する2要因交互作用のベクトルを

$$\underline{a}'_{pq}=(a_{pq}(1,1),\cdots,a_{pq}(1,l_q),a_{pq}(2,1),\cdots,a_{pq}(l_p,l_q)),\quad 1\le p<q\le 3.$$

要因A_1，A_2，A_3に関係する3要因交互作用のベクトルを

$$\underline{a}'_{123}=(a_{123}(1,1,1),\cdots,a_{123}(1,1,l_3),a_{123}(1,2,1)\cdots,a_{123}(1,l_2,l_3),a_{123}(2,1,1),\cdots,a_{123}(l_1,l_2,l_3)).$$

とする．$\eta(i_1,i_2,i_3)$は

$$\eta(i_1,i_2,i_3)=\mu+\sum_{p=1}^{3}a_p(i_p)+\sum_{\substack{p\\1\le p<q\le 3}}\sum_{q}a_{pq}(i_p,i_q)+a_{123}(i_1,i_2,i_3)\quad\cdots(3.1)$$

なる構造をもっている．

$l_1l_2l_3$ 個の非負のウエイト $\{W(i_1,i_2,i_3)\}$ を導入し，次の制約条件をみたすものとして各パラメーターを定義する．

$$\left.\begin{array}{ll}
\sum\limits_{i_p}\sum\limits_{j_1}\sum\limits_{j_2}W(i_1,i_2,i_3)a_p(i_p)=0\,, & \{i_p,j_1,j_2\}=\{i_1,i_2,i_3\}\\
 & p=1,2,3.\\
\sum\limits_{i_s}\sum\limits_{j_1}W(i_1,i_2,i_3)a_{pq}(i_p,i_q)=0, & \{i_p,i_q,j_1\}=\{i_1,i_2,i_3\}\\
 & 1\le p<q\le 3,\ s=p\text{又は}q\\
\sum\limits_{i_p}W(i_1,i_2,i_3)a_{123}(i_1,i_2,i_3)=0\,, & p=1,2,3.
\end{array}\right\}\cdots(3.2)$$

定義

任意の $\{\eta(i_1,i_2,i_3)\}$ に対して，制約条件(3.2)が $\eta(i_1,i_2,i_3)$ の一意的分解(3.1)を与えるとき，ウエイト $\{W(i_1,i_2,i_3)\}$ を定義ウエイトと云う．

以下の議論において，任意の p に対して，$\sum\limits_{i_p}W(i_1,i_2,i_3)>0$ を仮定する．

制約条件(3.2)を行列表示するため次の記号を用いる．

$$F^{(123)}_{b_1\cdots b_s}=H_1\otimes H_2\otimes H_3$$

とする．ただし，

$$H_p=\begin{cases}I_{l_p} & p=b_1,\cdots,\text{又は}\ b_s\text{のとき}\\ j_{l_p} & \text{そうでないとき}\end{cases}\qquad p=1,2,3.$$

$b_1<\cdots<b_s$ は s 個の相異なる整数であり，$F^{(123)}=j_{l_1}\otimes j_{l_2}\otimes j_{l_3}$ である．

$$D^{(3)}_{\sqrt{W}}=\mathrm{diag}\left(\sqrt{W(1,1,1)},\cdots\sqrt{W(1,1,l_3)},\sqrt{W(1,2,1)},\cdots,\sqrt{W(1,l_2,l_3)},\sqrt{W(2,1,1)},\cdots,\sqrt{W(l_1,l_2,l_3)}\right)$$

とし

$$\Psi^{(123)}_{b_1\cdots b_s} = D^{(3)}_{\sqrt{W}} F^{(123)}_{b_1\cdots b_s}$$

とする. このとき. 制約条件(3.2)は

$$\Psi^{(123)\prime}\Psi^{(123)}_{p}\,a_p = 0, \qquad p=1,2,3.$$

$$\Psi^{(123)\prime}_{s}\Psi^{(123)}_{pq}\,a_{pq} = 0, \qquad s=p, \text{又は } q, \ 1\le p<q\le 3.$$

$$\Psi^{(123)\prime}_{pq}\Psi^{(123)}_{123}\,a_{123} = 0, \qquad 1\le p<q\le 3.$$

と表わせる. とくに $W(i_1,i_2,i_3)$ をすべて 1 にとると通常の制約条件

$$\dot{\boldsymbol{1}}'_{\ell_p}\,a_p = 0, \qquad p=1,2,3.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{1}}'_{\ell_p}\otimes I_{\ell_q} \\ I_{\ell_p}\otimes \dot{\boldsymbol{1}}'_{\ell_q} \end{bmatrix} a_{pq} = 0, \qquad 1\le p<q\le 3.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{1}}'_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2}\otimes I_{\ell_3} \\ I_{\ell_1}\otimes \dot{\boldsymbol{1}}'_{\ell_2}\otimes I_{\ell_3} \\ I_{\ell_1}\otimes I_{\ell_2}\otimes \dot{\boldsymbol{1}}'_{\ell_3} \end{bmatrix} a_{123} = 0.$$

になる.

(3.1)を行列表示し, $D^{(3)}_{\sqrt{W}}$ を左からかけて,

$$\Psi^{(123)}_{123}\,\underline{\eta} = \Psi^{(123)}\mu + \sum_{p=1}^{3}\Psi^{(123)}_{p}a_p + \underset{1\le p<q\le 3}{\sum_p\sum_q}\Psi^{(123)}_{pq}a_{pq} + \Psi^{(123)}_{123}a_{123} \quad \cdots (3.3)$$

をうる. ただし,

$$\underline{\eta}' = (\eta(1,1,1),\cdots,\eta(1,1,\ell_3),\eta(1,2,1),\cdots,\eta(1,\ell_2,\ell_3),\eta(2,1,1),\cdots,\eta(\ell_1,\ell_2,\ell_3)).$$

(3.3)に左から $\Psi^{(123)\prime}_{pq}$ をかけ. 制約条件 $\Psi^{(123)\prime}_{pq}\Psi^{(123)}_{123}a_{123} = 0$ $(1\le p<q\le 3)$ を用いると,

$$\tilde{X}^{(2)\prime}[\tilde{X}^{(0)}, \tilde{X}^{(1)}, \tilde{X}^{(2)}]\begin{bmatrix}\mu \\ \underline{a}_{(1)} \\ \underline{a}_{(2)}\end{bmatrix} = \tilde{X}^{(2)\prime}\Psi^{(123)}_{123}\underline{\eta} \qquad \cdots (3.4)$$

をうる．ただし，$X^{(0)}=F^{(123)}$，$X^{(1)}=[F^{(123)}_1, F^{(123)}_2, F^{(123)}_3]$，$X^{(2)}=[F^{(123)}_{12}, F^{(123)}_{13}, F^{(123)}_{23}]$，

$\tilde{X}^{(s)}=D^{(3)}_{\sqrt{W}}X^{(s)}$，$s=0,1,2$．$\underline{a}'_{(1)}=(\underline{a}'_1, \underline{a}'_2, \underline{a}'_3)$，$\underline{a}'_{(2)}=(\underline{a}'_{12}, \underline{a}'_{13}, \underline{a}'_{23})$．

(3.4)はパラメーターμ，$a_p(i_p)$，，$a_{pq}(i_p, i_q)$がウエイトづきの平方和

$$\sum_{i_1}\sum_{i_2}\sum_{i_3} W(i_1,i_2,i_3)\left\{\eta(i_1,i_2,i_3)-\mu-\sum_{p=1}^{3}a_p(i_p)-\sum_{\substack{p\\1\le p<q\le 3}}\sum_{q}a_{pq}(i_p,i_q)\right\}^2$$

$$=\|\Psi^{(123)}_{123}\underline{\eta}-\Psi^{(123)}\mu-\sum_{p=1}^{3}\Psi^{(123)}_p\underline{a}_p-\sum_{\substack{p\\1\le p<q\le 3}}\sum_{q}\Psi^{(123)}_{pq}\underline{a}_{pq}\|^2$$

$$=\|\Psi^{(123)}_{123}\underline{\eta}-\tilde{X}^{(0)}\mu-\tilde{X}^{(1)}\underline{a}_{(1)}-\tilde{X}^{(2)}\underline{a}_{(2)}\|^2$$

を最小にするように定義されていることを示している．

定理3

$\{W(i_1,i_2,i_3)\}$が定義ウエイトであるための必要十分条件は

任意の$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\neq(1,1,1)$に対して

$$\mathrm{Rank}\, D^{(3)}_W A^{\#}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} D^{(3)}_W = \mathrm{Rank}\, A^{\#}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$$

が成立することである．ただし．$A^{\#}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}=A^{\#}_{\varepsilon_1}\otimes A^{\#}_{\varepsilon_2}\otimes A^{\#}_{\varepsilon_3}$，

$A^{\#}_{\varepsilon_p}=\varepsilon_p(I_{\ell_p}-\frac{1}{\ell_p}G_{\ell_p})+(1-\varepsilon_p)\frac{1}{\ell_p}G_{\ell_p}$，$\varepsilon_p=0$，又は1，$D^{(3)}_W=(D^{(3)}_{\sqrt{W}})^2$．

［証明］

(3.1)と(3.2)よりパラメーターの決定方程式

$$\begin{bmatrix} X^{(0)} & X^{(1)} & X^{(2)} & X^{(3)} \\ 0 & C^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ \underline{a}_{(1)} \\ \underline{a}_{(2)} \\ \underline{a}_{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\eta} \\ \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix} \qquad \cdots \quad (3.5)$$

をうる．ただし，$X^{(3)}=F^{(123)}$， $\underline{a}_{(3)}=\underline{a}_{123}$

$$C^{(1)}=\sum_{p=1}^{3}\oplus\Psi^{(123)\prime}\Psi^{(123)}_{p},\quad C^{(2)}=\underset{1\leq p<q\leq 3}{\sum_{p}\sum_{q}}\oplus\begin{bmatrix}\Psi^{(123)\prime}_{p}\\ \Psi^{(123)\prime}_{q}\end{bmatrix}\Psi^{(123)}_{pq},\quad C^{(3)}=X^{(2)\prime}\Psi^{(123)}_{123}$$

(3.5)の左辺の係数行列の階数は

$$\mathrm{Rank}\,[X^{(0)},X^{(1)},X^{(2)},X^{(3)}]+\sum_{p=1}^{3}\mathrm{Rank}\,C^{(p)}$$

$$=l_1l_2l_3+\underset{1\leq p<q\leq 3}{\sum_{p}\sum_{q}}\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}\Psi^{(123)\prime}_{p}\\ \Psi^{(123)\prime}_{q}\end{bmatrix}\Psi^{(123)}_{pq}+\mathrm{Rank}\,C^{(3)}$$

に等しい．

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}\Psi^{(123)\prime}_{1}\\ \Psi^{(123)\prime}_{2}\end{bmatrix}\Psi^{(123)}_{12}=\mathrm{Rank}\,\Psi^{(123)\prime}_{12}[\Psi^{(123)}_{1},\Psi^{(123)}_{2}]=\mathrm{Rank}\,D_{l_1l_2}[I_{l_1}\otimes j_{l_2},j_{l_1}\otimes I_{l_2}]$$

$$=\mathrm{Rank}\,[I_{l_1}\otimes j_{l_2},j_{l_1}\otimes I_{l_2}]=l_1+l_2-1$$

ただし，$D_{l_1l_2}=\mathrm{diag}\,(W(1,1,\cdot),\cdots,W(1,l_2,\cdot),W(2,1,\cdot),\cdots,W(l_1,l_2,\cdot))$． $W(i_1,i_2,\cdot)=\sum_{i_3}W(i_1,i_2,i_3)$

同様にして，

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}\Psi^{(123)\prime}_{1}\\ \Psi^{(123)\prime}_{3}\end{bmatrix}\Psi^{(123)}_{13}=l_1+l_3-1,\quad \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}\Psi^{(123)\prime}_{2}\\ \Psi^{(123)\prime}_{3}\end{bmatrix}\Psi^{(123)}_{23}=l_2+l_3-1$$

をうる．従って，$\{W(i_1,i_2,i_3)\}$が定義ウエイトであるための必要十分条件は

$$\mathrm{Rank}\,C^{(3)}=l_1l_2+l_1l_3+l_2l_3-l_1-l_2-l_3+1$$

であることが分る.

$$\mathrm{Rank}\, C^{(3)} = \mathrm{Rank}\, X^{(2)\prime} D_W^{(3)} = \mathrm{Rank}\, D_W^{(3)} X^{(2)} X^{(2)\prime} D_W^{(3)}$$

$$= \mathrm{Rank}\, D_W^{(3)} (I_{\ell_1} \otimes I_{\ell_2} \otimes G_{\ell_3} + I_{\ell_1} \otimes G_{\ell_2} \otimes G_{\ell_3}) D_W^{(3)}$$

$$= \mathrm{Rank}\, D_W^{(3)} \Big\{ \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)} \Big(\sum_{p=1}^{3} (1-\varepsilon_p)\ell_p \Big) A^{\#}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \Big\} D_W^{(3)} = \sum_{\substack{(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) \\ (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)\neq(1,1,1)}} \mathrm{Rank}\, D_W^{(3)} A^{\#}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} D_W^{(3)}$$

$$\leq \sum_{\substack{(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) \\ (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)\neq(1,1,1)}} \mathrm{Rank}\, A^{\#}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = \sum_{\substack{(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) \\ (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)\neq(1,1,1)}} (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+3} (\varepsilon_1\ell_1 - I)(\varepsilon_2\ell_2 - I)(\varepsilon_3\ell_3 - I)$$

$$= \ell_1\ell_2 + \ell_1\ell_3 + \ell_2\ell_3 - \ell_1 - \ell_2 - \ell_3 + 1$$

上の不等式において. 等号がなりたつのは

任意の $(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) \neq (I,I,I)$ に対して. $\mathrm{Rank}\, D_W^{(3)} A^{\#}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} D_W^{(3)} = \mathrm{Rank}\, A^{\#}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$

が成立するときに限るから定理の結果をうる.

定理4

ある定義ウエイトより定まる3要因交互作用がすべて零であると，任意の定義ウエイトより定まる3要因交互作用もすべて零になる. このとき，任意の i_p に対して. $\sum_{i_q} \lambda_{pq}(i_p,i_q)=0$，任意の i_q に対して，$\sum_{i_p} \lambda_{pq}(i_p,i_q)=0$ をみたす任意の $\{\lambda_{pq}(i_p,i_q)\}$ に対して.

$$\sum_{i_p=1}^{\ell_p} \sum_{i_q=1}^{\ell_q} \lambda_{pq}(i_p,i_q)\, a_{pq}(i_p,i_q)$$

は定義ウエイトに関係しない値である.

証明)

ある定義ウエイト $\{W^{(0)}(i_1,i_2,i_3)\}$ から定まる μ, $a_p(i_p)$, $a_{pq}(i_p,i_q)$, $a_{123}(i_1,i_2,i_3)$ を $\mu^{(0)}$, $a_p^{(0)}(i_p)$ $a_{pq}^{(0)}(i_p,i_q)$. $a_{123}^{(0)}(i_1,i_2,i_3)$ とし,

任意の i_1, i_2, i_3 に対して，　$a^{(0)}_{123}(i_1, i_2, i_3)=0$

する．このとき，

$$\eta(i_1, i_2, i_3)=\mu^{(0)}+\sum_{p=1}^{3} a^{(0)}_p(i_p)+\sum_{p}\sum_{q \atop 1\leq p<q\leq 3} a^{(0)}_{pq}(i_p, i_q) \quad \cdots (3.6)$$

(3.6)を行列表示して．

$$\underline{\eta}=F^{(123)}\mu^{(0)}+\sum_{p=1}^{3} F^{(123)}_p \underline{a}^{(0)}_p+\sum_{p}\sum_{q \atop 1\leq p<q\leq 3} F^{(123)}_{pq}\underline{a}^{(0)}_{pq}$$

$$=\left[\ X^{(0)} \vdots X^{(1)} \vdots X^{(2)}\right]\begin{bmatrix}\mu^{(0)}\\ \underline{a}^{(0)}_{(1)}\\ \underline{a}^{(0)}_{(2)}\end{bmatrix} \quad \cdots (3.7)$$

をうる．ただし，$\underline{a}^{(0)}_{(1)}$，$\underline{a}^{(0)}_{(2)}$ は成分がそれぞれ $\{a^{(0)}_p(i_p)\}$，$\{a^{(0)}_{pq}(i_p, i_q)\}$ である $\underline{a}_{(1)}$，$\underline{a}_{(2)}$ に対応するベクトルである．

任意の定義ウエイト $\{W(i_1, i_2, i_3)\}$ に対して，(3.4)より．

$$\left[X^{(2)\prime}X^{(0)} \vdots X^{(2)\prime}X^{(1)} \vdots X^{(2)\prime}X^{(2)}\right]\begin{bmatrix}\mu\\ \underline{a}_{(1)}\\ \underline{a}_{(2)}\end{bmatrix}=X^{(2)\prime}D^{(3)}_{(W)}\underline{\eta} \quad \cdots (3.8)$$

をうる．(3.7)を(3.8)に代入して，整理すると

$$\left[X^{(2)\prime}X^{(0)} \vdots X^{(2)\prime}X^{(1)} \vdots X^{(2)\prime}X^{(2)}\right]\begin{bmatrix}\mu-\mu^{(0)}\\ \underline{a}_{(1)}-\underline{a}^{(0)}_{(1)}\\ \underline{a}_{(2)}-\underline{a}^{(0)}_{(2)}\end{bmatrix}=0 \quad \cdots (3.9)$$

をうる．$\{W(i_1, i_2, i_3)\}$ が定義ウエイトであるから．

$$\mathrm{Rank}\left[X^{(2)\prime}X^{(0)} \vdots X^{(2)\prime}X^{(1)} \vdots X^{(2)\prime}X^{(2)}\right]=\mathrm{Rank}\left[X^{(2)\prime}X^{(2)}\right]=l_1l_2+l_1l_3+l_2l_3-l_1-l_2-l_3+1$$

である

行列 $\left[\begin{array}{c:ccc:ccc} -1 & \mathbf{j}'_{l_1} & 0 & 0 & & & \\ -1 & 0 & \mathbf{j}'_{l_2} & 0 & & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & \mathbf{j}'_{l_3} & & & \\ \hdashline & -I_{l_1} & 0 & 0 & I_{l_1}\otimes\mathbf{j}'_{l_2} & 0 & 0 \\ & 0 & -I_{l_2} & 0 & \mathbf{j}'_{l_1}\otimes I_{l_2} & & \\ 0 & -I_{l_1} & 0 & 0 & 0 & I_{l_1}\otimes\mathbf{j}'_{l_3} & 0 \\ & 0 & 0 & -I_{l_3} & & \mathbf{j}'_{l_1}\otimes I_{l_3} & \\ & 0 & -I_{l_2} & 0 & 0 & 0 & I_{l_2}\otimes\mathbf{j}'_{l_3} \\ & 0 & 0 & -I_{l_3} & & & \mathbf{j}'_{l_2}\otimes I_{l_3} \end{array}\right]$ の各行ベクトルは行列 $\begin{bmatrix} X^{(0)'}X^{(2)} \\ X^{(1)'}X^{(2)} \\ X^{(2)'}X^{(2)} \end{bmatrix}$

のすべての列ベクトルと直交し，その階数は $2(l_1+l_2+l_3)$ である．従って

$$\left.\begin{aligned} &\mu-\mu^{(0)}=-b_1-b_2-b_3 \\ &a_p(i_p)-a_p^{(0)}(i_p)=b_p-\sum_{\substack{r \\ 1\leq r<s\leq 3 \\ r=p\text{ 又は }s=p}}\sum_{s} b_p^{(rs)}(i_p), \quad p=1,2,3. \\ &a_{pq}(i_p,i_q)-a_{pq}^{(0)}(i_p,i_q)=b_p^{(pq)}(i_p)+b_q^{(pq)}(i_q), \quad 1\leq p<q\leq 3 \end{aligned}\right\} \cdots(3.10)$$

をうる．ただし，b_s，$b_p^{(pq)}(i_p)$，$b_q^{(pq)}(i_q)$，($s=1,2,3$．$1\leq p<q\leq 3$) は任意の定数である．(3.10)より，

$$\mu+\sum_{p=1}^{3}a_p(i_p)+\sum_{\substack{p \\ 1\leq p<q\leq 3}}\sum_{q}a_{pq}(i_p,i_q)=\mu^{(0)}+\sum_{p=1}^{3}a_p^{(0)}(i_p)+\sum_{\substack{p \\ 1\leq p<q\leq 3}}\sum_{q}a_{pq}^{(0)}(i_p,i_q)=\eta(i_1,i_2,i_3)$$

をうる．従って．任意の i_1,i_2,i_3 に対して

$$a_{123}(i_1,i_2,i_3)=0$$

となる．(3.10)より．容易に

$$\sum_{i_p}\sum_{i_q}\lambda_{pq}(i_p,i_q)\,a_{pq}(i_p,i_q)=\sum_{i_p}\sum_{i_q}\lambda_{pq}(i_p,i_q)\,a_{pq}^{(0)}(i_p,i_q)$$

が分る．

参 考 文 献

[1] Rao, C.R. (1952). Advanced statistical methods in biometric reseach. Wiley, New York.

[2] Scheffé, H. (1959). The analysis of variance. Wiley, New York.

あとがき

この講究録は、数理解析研究所における実験計画法共同研究会（第1回、昭和41年3月21～23日開催、第2回、昭和41年12月1～3日開催）における発表内容を整理集録したものである。

共同研究会の組織者として御寄稿いただいた方々、活発な研究討論に御参加下さった方々、特に、並々ならぬお世話をいただいた京都大学数理解析研究所長福原満洲雄教授はじめ関係の方々に深く感謝する。

広島大学理学部　山本純恭