数理解析研究所講究録
26巻 1967年 87-96

[E] Markoff chain の境界問題への試み

広島大理　青木一芳

離散空間上の連続時間径数の Markoff chain から境界を定義し，境界をつけ加えた空間の上に process を拡張する試みが種々ある．ここでは Riemann 面の倉持境界論で大津賀 [5] が用いた exhaustion の方法の，Markoff chain の場合への応用を試みている．任意に選んだ exhaustion による近似の結果は，はじめの選びかたに依存しないで定まる，という論法がふつうであるが，この議論では，いわば逆に，すべての情報をその選びかたによって得ていることがわかる．exhaustion の各段階での核関数が，一定の極限関数に近づいてゆく場合には，Constantinescu－Cornea [1] の倉持境界論に類似の議論ができる．以下その最初のところまでを，若干の説明を加えながら述べる．

文献（直接引用するもののみ）

[1] Constantinescu－Cornea, Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, 1963.

[2] H. Kunita, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962).

[3] 国田寛－渡辺毅, 数学, 13 (1961), 14 (1962).

[4] J. Neveu, Ann. Inst. Poincaré, 17 (1962).

[5] M. Ohtsuka, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 28 (1964). (p. 271 ff)

1. 状態空間の regular exhaustion

考える状態空間 (state space) S は可算無限個の点 (state) $x, y, \cdots$ から成り，離散位相が入っているものとする．S のすべての部分集合の族を $\mathbb{B}(S)$ と記す．S 上の Markoff chain を規定する関数の系 (q, Π) が与えられ，つぎをみたすものとする：$q(x)$ は S 上の関数で $0 < q(x) < +\infty$；$\Pi(x, E)$ は $E \subset S$ を固定すれば S 上の関数，x を固定すれば $\mathbb{B}(S)$ 上の測度であって，$\Pi(x, S) \leqq 1$，$\Pi(x, x) = 0$。つぎの仮定は以下の議論に本質的に関係する。

仮定1　S の任意の2点は連絡している，すなわち各 $x, y \in S$ に対して適当な番号 k があって，$\Pi^k(x, y) > 0$.

ただし $\Pi^0 = \delta$ (δ 測度)，$\Pi^1 = \Pi$，一般につぎのように定義する：

$$\Pi^{k+1}(x, y) = \sum_{z \in S} \Pi(x, z) \Pi^k(z, y).$$

S に1点 ∂ を離散的に加え，$\Pi(x, \partial) = 1 - \Pi(x, S)$，$x \in S$；$\Pi(\partial, \partial) = 1$ とおいて Π を $S \cup \partial$ に拡張する．以後 S 上に関数や測度を定義するとき，必要ならば ∂ では 0 とおいて延長することにする．

仮定2　S から ∂ への連絡がある，すなわち各 $x \in S$ に対して適当な番号 k があって，$\Pi^k(x, \partial) > 0$.

この仮定により，S 上の Green 核関数

$$(1) \qquad G(x, y) = \sum_{k \geqq 0} \Pi^k(x, y) \frac{1}{q(y)}, \qquad x, y \in S,$$

は有限値である。仮定1のもとでは，仮定2は $\Pi(x, S)$ が x の関数として恒等的に1とはならないことと同等である．

Sの有限部分集合の増大列 $\{S_n\}$ で，$\forall x$，$\exists n$，$x \in S_n$ となるものを，ひとつの exhaustion という．∂はつねにS_1 につけ加えておく．exhaustion が regular であるとは，その各 S_n において，任意の２点が連絡し，かつ S_n から∂への連絡がある場合をいう．正確には，$\forall x \in S_n$，$\forall y \in S_n \cup \partial$，$\exists z_1, \cdots, z_\ell \in S_n$，$\pi(x, z_1) \cdot \pi(z_1, z_2) \cdot \cdots \cdot \pi(z_\ell, y) > 0$ の成立する場合である．

仮定１によって，任意の exhaustion $\{S_n\}$ に対して，各 S_n を適当に増大させる（すなわち $S'_n \supset S_n$ なる有限集合 S'_n を選ぶ）ことにより，regular exhaustion $\{S'_n\}$ を作ることができる．

注意1 regular exhaustion $\{S_n\}$ の各 S_nで，$\forall y \in S_n$，$\exists x, z \in S_n$，$\pi(x, y) > 0$，$\pi(y, z) > 0$．ただし S_1 は2点を含むとする．

つぎにしばらく regular exhaustion $\{S_n\}$ をひとつ固定して，各 S_n の上に，Markoff chain を規定する系を導入する．与えられている (q, π) から

$$
(2) \qquad \begin{aligned} q_n(x) &= q(x) \cdot \pi(x, S_n \cup \partial), \\ \pi_n(x, y) &= \pi(x, y) / \pi(x, S_n \cup \partial), \end{aligned} \qquad x, y \in S_n,
$$

によって (q_n, π_n) を定義する．仮定より上式中の分母は0でない．また $\pi_n(x, \partial) = 1 - \pi_n(x, S_n)$，$\pi_n(\partial, \partial) = 1$ とおく．

注意2 $n \to +\infty$ のとき，$q_n(x) \uparrow q(x)$，$\pi_n(x, y) \downarrow \pi(x, y)$ がすべての $x, y \in S$ について成立する．

2. (q_n, Π_n) の定義の説明

ここで (q_n, Π_n) の定義の由来を説明しておく.

S上の関数 $u(x)$ が点 x で $(\Pi-)$ 調和〔優調和〕であるとは,

(3) $$u(x)=\Pi u(x)\equiv\sum_{y\in S}\Pi(x,y)u(y) \quad [\,u(x)\geqq\Pi u(x)\,]$$

が〔それぞれ〕成立する場合をいい, $A\subset S$ のすべての点で調和(等)のとき, u は A で調和(等)であるという.

関数論の bordered Riemann surface で, 内部で調和, border での法線微分 $=0$ なる関数を求めるときに, その border にかんする double (いわば, その border を対称の境い目として鏡像をつけ加えた全体) の上で調和かつ対称な関数を求めて, もとの空間への制限をとるという方法がある. Riemann 面の exhaustion の各段階で, この方法によって得た調和関数の列が, ある意味で収束すれば, 内部で調和で, いわゆる理想境界では法線微分 $=0$ に当る性質をもつ関数の得られることが期待される. 実際, 大津賀 [5] ではこのようにして倉持コンパクト化上の核関数を作っている.

われわれの場合に上の類似を行なうには, 法線微分に当るものを陽に表わせないため, 調和の定義のほうで按配せねばならない. S_n に対してその double $\hat{S}_n=S_n\cup\{\tilde{x}: x\in S_n\}$ を考え, その上に

$$\hat{q}_n(x)=\hat{q}_n(\tilde{x})=q(x),$$

$$\hat{\Pi}_n(x,y)=\hat{\Pi}_n(\tilde{x},\tilde{y})=\Pi(x,y),$$

(4) $$\hat{\Pi}_n(x,\tilde{x})=\hat{\Pi}_n(\tilde{x},x)=\Pi(x,S_n^c)\bigl(=1-\Pi(x,S_n\cup\partial)\bigr),$$

$$\hat{\Pi}_n(x,\tilde{y})=\hat{\Pi}_n(\tilde{x},y)=0 \quad (x\neq y),$$

$$\hat{\Pi}_n(x, \partial) = \hat{\Pi}_n(\tilde{x}, \partial) = \Pi(x, \partial)$$

$(x, y \in S_n)$ で系 $(\hat{\mathfrak{g}}_n, \hat{\Pi}_n)$ を定義すると，これは $\hat{S}_n$ 上にひとつの Markoff chain を規定し，S_n 上に限れば $(\mathfrak{g}, \Pi)$ と一致している. double $\hat{S}_n$ 上で $\hat{\Pi}_n$－調和，かつ $(\forall x \in S_n,\ u(x) = u(\tilde{x})$ の意味で) 対称な関数 u の，S_n への制限が問題であるが，じつは前節のように Π_n を定義しておくと，u は S_n 上 Π_n－調和であることがわかる. (正確には，$\hat{S}_n$ ないし S_n 上で上記の対称・調和性をもつ関数は恒等的に 0 なものしかありえない. 意味をもたせるには，たとえば S_n のある 1 点 ($\hat{S}_n$ では 2 点) を除いたところで調和ということにするとよい.) exhaustion に regularity を要するのも，もとは $\hat{\Pi}_n$ の定義を円滑にするためである. $\mathfrak{g}_n$ のとりかたも $\hat{\mathfrak{g}}_n$ から自然に導かれる.

3．核関数の収束

1 節の続きで，各 S_n の上に (1) に対応して，Green 数

$$(5) \qquad \tilde{G}_n(x, y) = \sum_{k \geq 0} \Pi_n^k(x, y) \frac{1}{\mathfrak{g}_n(y)}, \quad x, y \in S_n,$$

を定義する. Π_n^k の定義は Π^k のそれと同様である. 仮定 1，2 に対応する性質は S_n にもあるので，$\tilde{G}_n$ は有限値で，その諸性質，たとえば

$$(6) \qquad \tilde{G}_n(x, y) \leqq \tilde{G}_n(y, y), \qquad x, y \in S_n,$$

はよく知られている. $n \to +\infty$ のとき，$\tilde{G}_n(x, y)$ がもし収束すれば，その極限 $\tilde{G}(x, y)$ は有限値で，$\tilde{G}(x, y) \geqq G(x, y)$ となる. 一般には $\tilde{G}_n(x, y)$ は収束しない. しかしつぎの補題が成立する.

補題　任意の regular exhaustion $\{S_n\}$ に対して，その適当な部分列 $\{S_{n'}\}$ （regular exhaustion である）を選んで，対応する $\tilde{G}_{n'}(x,y)$ の列が $S\times S$ 上で

$$\tilde{G}(x,y) = \lim_{n'\to+\infty} \tilde{G}_{n'}(x,y)$$

をもつようにすることができる．

いいかえれば，$\{\tilde{G}_n(x,y)\}$ はつねに収束部分列を含む。

証明　$y_0\in S$ を固定して，ある番号から先の $\{\tilde{G}_n(y_0,y_0)\}$ が n について有界なことを見よう。番号 m を十分大にとれば，$y_0\in S_m$，かつ $y_1,\cdots,y_\ell\in S_m-y_0$ を選んで $a=\Pi(y_0,y_1)\cdot\Pi(y_1,y_2)\cdot\cdots\cdot\Pi(y_\ell,\partial)>0$ とすることができる（仮定2）。$a<1$ である。$b=\Pi(y_0,S_m\cup\partial)$ (>0) とおく。このとき $n\geqq m$ ならば，(q_n,Π_n)-chain で y_0 を出発した粒子が y_0 へ戻らない確率を $p_n(y_0)$ として，つぎの式が成立する：

$$\begin{aligned}\tilde{G}_n(y_0,y_0) &= q_n(y_0)^{-1}\sum_{k\geqq 0}(1-p_n(y_0))^k\\ &\leqq q_n(y_0)^{-1}\sum_{k\geqq 0}\left[1-\Pi_n(y_0,y_1)\cdot\cdots\cdot\Pi_n(y_\ell,\partial)\right]^k\\ &\leqq q_n(y_0)^{-1}\sum_{k\geqq 0}(1-a)^k\\ &= \frac{1}{a\,b\,q(y_0)}\,.\end{aligned}$$

最初の等式は $\tilde{G}_n$ の確率論的意味から正当づけられ，つぎの不等式も確率論的に明らかである；あとは上の選びかたによる．$\Pi(y_0,\partial)>0$ のときは $\ell=0$ でよい．a,b は y_0 のみによるから，これで有界性がいえた．不等式（6）より $\{\tilde{G}_n(x,y)\}_n$ は $S\times S$ の各点で有界で

ある. Sの位相では(局所)同程度連続性がつねに成立するから，よく知られた Ascoli-Arzela 型の定理により，$\{\tilde{G}_n(x,y)\}$ は$S\times S$上で広義一様に収束する部分列を含む.（終）

一定の極限 $\tilde{G}(x,y)$ が存在するような exhaustion を仮に fundamental であるとよぼう. すべての fundamental exhaustion の集まりを，各$\tilde{G}$ の恒等的一致を同値条件として類別し，その同値類間の関係を調べることが将来の問題となろう. さしあたりひとつの $\tilde{G}$ について，その性質と働きとを調べねばならない.

4. 核 $\tilde{G}(x,y)$ の性質

$\{S_n\}$ をひとつの fundamental exhaustion とし，その核関数を $\tilde{G}(x,y)=\lim\limits_{n\to+\infty}\tilde{G}_n(x,y)$ とする.

a) $\tilde{G}(x,y)$ はyを固定するとxについて優調和，とくに$S-y$では調和，yでは'真に'優調和である.

証明 各番号nについて，$\tilde{G}_n$ が S_n 上 Π_n-優調和，とくに S_n-y で Π_n-調和であることに注意する.

$$\begin{aligned}\Pi\tilde{G}(x,y) &\equiv \sum_{z\in S}\Pi(x,z)\,\tilde{G}(z,y)\\ &=\lim_{n\to+\infty}\sum_{z\in S_n}\Pi(x,z)\,\tilde{G}_n(z,y)\\ &=\lim_{n\to+\infty}\Pi(x,S_n\cup\partial)\cdot\sum_{z\in S_n}\Pi_n(x,z)\,\tilde{G}_n(z,y)\\ &\leqq \lim_{n\to+\infty}\Pi(x,S_n\cup\partial)\cdot\tilde{G}_n(x,y)=\tilde{G}(x,y);\end{aligned}$$

積分と極限との交換では，不等式(6)により Lebesgue の定理が適

用できる．　上の不等式で，$x \neq y$ のときは等号が成立する；また，

(7)　　$\sum_{z\in S_n} \Pi_n(y,z)\tilde{G}_n(z,y) = \tilde{G}_n(y,y) - g_n(y)^{-1}$

より，$x=y$ のときは真の不等関係が極限にまでもちこまれる．（終）

（3）の双対として，測度 $\eta(E)$ について，

(8)
$$\eta(E) = \eta g \Pi g^{-1}(E) \equiv \sum_{y\in E}\sum_{x\in S} \eta(x) g(x) \Pi(x,y) \frac{1}{g(y)}$$
$$\left[\ \eta(E) \geqq \eta g \Pi g^{-1}(E)\ \right]$$

（$\forall E\subset A$）のとき，η は A 上で調和［優調和］であるという．

b）　$\tilde{G}(x,E)$ は x を固定すると，S で優調和，とくに $S-x$ で調和である．（証明は a）と同様である．）

a), b）とその証明，とくに（7）式とその双対とから容易にわかるように，

c）　核 $U(x,y) = \tilde{G}(x,y) - G(x,y)$ は x について S 上調和，y（一般に E）について S 上（双対）調和である．

したがって等式 $\tilde{G} = G + U$ は (g,Π) にかんする $\tilde{G}$ の Riesz 分解（国田－渡辺［3］）を与えている．　とくに，

(9)　　$U(x,y) = \lim_{k\to+\infty} \Pi^k \tilde{G}(x,y)$

が U の確率論的意味を与える（Constantinescu－Cornea ［1］の u 関数にあたる．

5．有限集合への到達測度

$\{S_n\}$，$\tilde{G}$ は前節のとおりとする．　S_n 上の，x を出発点とする

(g_n, Π_n) - chain の確率法則を $P_x^{(n)}(\cdot)$, $x \in S_n$, で表わし，有限集合 $K \subset S_n$ に対して，K への到達測度 $\omega_x^{(n)}$ を

$$\omega_x^{(n)}(z) = P_x^{(n)}(\text{Kに, } z \text{ で到達する}), \qquad z \in K,$$

と定義する.

(10)
$$\Pi_n^K(x,y) = \Pi_n(x,y), \qquad x \in S_n - K,\ y \in S_n;$$
$$= 0, \qquad x \in K,\ y \in S_n,$$

とおき，(g_n, Π_n^K) にかんする Green 核関数

(11)
$$\tilde{G}_n^K(x,y) = \sum_{k \geq 0} (\Pi_n^K)^k(x,y) \frac{1}{g_n(y)}, \qquad x, y \in S_n,$$

（重量は S_n 上でとる）を定義すれば，$\omega_x^{(n)}(z) = \tilde{G}_n^K(x,z) / \tilde{G}_n^K(z,z) = \tilde{G}_n^K(x,z)\, g_n(z)$ となるから，$\omega_x^{(n)}$ が収束することをいうには，核 $\tilde{G}_n^K$ が正の極限関数をもつことをいえばよい． 定義の式 (5), (10), (11) から容易にわかるように，

$$\tilde{G}_n(x,y) = \sum_{z \in K} \tilde{G}_n^K(x,z)\, g_n(z)\, \tilde{G}_n(z,y), \quad x \in S_n,\ y \in K;$$

$$\tilde{G}_n(x,y) = \tilde{G}_n^K(x,y) + \sum_{z \in K} \tilde{G}_n^K(x,z)\, g_n(z)\, \tilde{G}_n(z,y), \quad x \in S_n,\ y \in S_n - K,$$

が成立する． これらの式から，$\tilde{G}_n^K$ を $\tilde{G}_n$ の有理式で表現することができ，$n \to +\infty$ のとき $\tilde{G}_n$ が収束することから，$\tilde{G}_n^K$ は確かに極限関数 $\tilde{G}^K$ をもつことがいえる; 証明には K の要素の個数にかんする帰納法を用いるとよい． この結果，$\omega_x^{(n)}(z) \longrightarrow \omega_x(z)$ $(n \to +\infty)$ なる測度 ω_x（K を識別するときは ω_x^{S-K} と書く）が定まる． これは，$\tilde{G}$ による process ができたときに，それの K への到達測度となるべきものである; ω_x の台は K の部分集合で，$\omega_x(K) \leq 1$.

S上の関数fの，有限集合Kへの‘射影’f^Kを

$$f^K(x)=\int_S f(z)\,\tilde{\omega}_x^{S-K}(dz)\ \Big(=\sum_{z\in K} f(z)\,\tilde{\omega}_x^{S-K}(z)\Big)$$

と定義する。 任意の有限集合Kに対してS上$f\geqq f^K$となる関数fを，($\tilde{G}$-)完全優調和であるという。 完全優調和関数は優調和である。 これらの用語は[1]の15章の類似を追ったもので，そこに挙げられている諸性質を，われわれの場合にいいかえて確かめることができる。

以下詳細は略すが，今後の研究の方向はつぎのようになるであろう。核関数$\tilde{G}$による空間Sのコンパクト化と，その上への(g,π)-processの拡張。 これが実際ひとつの反射境界のprocessとなっていることを調べること。 $\tilde{G}(x,y)$はこのprocessでの，xからyへの平均訪問時間を与え，とくに$U(x,y)$は，そのうちの，一度は境界に達してきたpathの寄与分となっていることがいえよう((9)式参照)。 さらに，高次の境界の問題(国田[2])，また3節末に触れた問題がある。 後者はNeveu[4]の立場を逆の方向から見てゆくことになると思われる。

注1　用語はおおむね[3]に沿っている。

注2　記法と取り扱いとの便宜上，1点集合$\{x\}$をxで表わす。