数理解析研究所講究録
27巻 1967年 3-30

統計的決定関数の良さ (betterness) について

大阪市大、理　工藤弘吉

§1. 決定関数の定義.

可測空間 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ 上の確率測度のある集合 $\mathcal{P}$ が与えられているとき, $\mathcal{P}$ を含む最小の線型空間を Π とする. Π はノルム $\|\mu\| = \sup_{B\in\mathfrak{B}}\mu(B) + |\inf_{B\in\mathfrak{B}}\mu(B)|$ によって, ノルム空間とみなされる. 一方局所コンパクトなハウスドルフ空間 S 上のコンパクト台をもつ連続関数の全体 C_0 とその双対空間 C_0^* を考えておく. C_0 にはノルム $\|c\| = \sup_{t\in S}|c(t)|$ を入れておく. Π から C_0^* への線形対応 $\varphi(\mu)$ の全体を $\tilde{\Phi}$ とする. $\tilde{\Phi}$ の元 φ が "$c\geq 0$, $\mu\geq 0$ なら $\varphi(\mu)\circ c \geq 0$ となる" とき $\varphi\geq 0$ とする. また φ が "任意の $\mu\in\Pi$, $c\in C$ に対して $|\varphi(\mu)\circ c| \leq k\|\mu\|\,\|c\|$ をみたす" 実数 $k>0$ が存在するとき, φ は有界であるという. φ のノルム $\|\varphi\|$ は上のような k の下限をもって定義する.

統計とは, $\mathfrak{X}$ の点 x が $\mathcal{P}$ に属する未知の元に従って観測されたとき, これを基にして, S の一点を選ぶことであると考える. この意味から $\mathfrak{X}$ を標本空間 (その元 x を標本点), $\mathcal{P}$ を標本分布空間, S を行動 (または決定) の空間 といい, $\tilde{\Phi}$ の $\|\varphi\|=1$, $\varphi\geq 0$ なる元 φ を (確率化) 決定関数 または決定方式という. 決定方式の全体を Φ であらわす. しばしば採用できる方式が Φ の部分集合 D の中に限定されることがあるが, このとき D を決定方式の空間という. 以下で S のボレル集合族 $\mathfrak{a}$ で定義される確率測度の

全体を$\mathfrak{M}$であらわす．φは$\mathcal{P}$から$\mathfrak{M}$への線形対応とみなされる．

定理1．1．(局所化定理．[15,16])．$\mathcal{P}$は$\mathfrak{X}$上のあるσ有限な測度λによつて支配され，Sは局所コンパクト可分距離づけ可能な空間であるとする．そのとき任意の元$\varphi\in\Phi$に対して次の条件をみたす$\hat{\varphi}(A:x)$が存在する：

(1) 殆んどすべての(λ) xに対して$\hat{\varphi}(\cdot:x)\in\mathfrak{M}$,

(2) Sのすべてのボレル集合Aに対して$\hat{\varphi}(A:x)$は$\mathcal{B}$可測，

(3) $\varphi(\mu)\circ c=\int_S c(t)\left[\int_{\mathfrak{X}}\hat{\varphi}(dt:x)\mu(dx)\right]$．

以下の§では$\mathcal{P}$が$\mathfrak{X}$上のσ有限測度λに支配される確率測度族，Sが局所コンパクト可分距離づけ可能な位相空間であると仮定する．なお$\hat{\varphi}$がどんな　xに対しても1点に確率測度1をつけるような$\mathfrak{M}$の元を対応させるものであるとき，決定方式φを非確率化決定方式とよぶ．

§2．危険関数と良さの基準

統計学の目的は何等かの基準に基づいて"良い"と思われる決定方式を採用することである．この良さの基準のために危険関数が考えられる．危険関数は環境の条件(ここではこれをθであらわし，パラメータと呼ぶ．その全体Θがいわゆるパラメータ空間である．訳語は母数ならびに母数空間)と決定方式φとによつて定まる実数値関数である．簡単のため，以後非負値関数とする．これを$r(\theta,\varphi)$であらわす．パラメータθによつて

標本xの分布関数$\mu \in \mathcal{P}$も定まると考えられるから，これをμ_θと書くと都合よい．しかしθとμ_θとは必らずしも1：1ではない．また危険関数を2つ以上考えなければならない場合もあるが，その場合でも危険関数$r_i(\theta, \varphi)$の添え数iとθとの組(i, θ)をパラメータと同じように考えれば，危険関数がただ1つの場合になってしまう．以下§7までは危険関数が1つの場合を論じ，§8で危険関数が2つ以上ある場合に論及する．

2つの決定方式φ_1，φ_2の間に"すべての$\theta \in \Theta$で$r(\theta, \varphi_1) \geqq r(\theta, \varphi_2)$がなりたつ"とき，$\varphi_2$は$\varphi_1$と<u>同じくらい良い</u>（as good as）といわれる．すべてのθで$r(\theta, \varphi_1) = r(\theta, \varphi_2)$がなりたつとき，$\varphi_1$と$\varphi_2$とは<u>同等</u>であるといわれる．$\varphi_1$と同じくらい良いが同等ではない$\varphi_2$は$\varphi_1$<u>より良い</u>といわれる．また$\varphi_2$は$\varphi_1$の<u>改良</u>であるといい，$\varphi_1$の改良が存在するとき，$\varphi_1$は<u>改良出来る</u>という．Dの中で改良出来ない決定方式は<u>許容的</u>であるといわれる．もしDの部分集合Cが，D－Cのどの元の改良をも含んでいるとき，<u>完全類</u>といわれる．包含関係で最小な完全類を<u>最小完全類</u>という．最小完全類が存在するための必十条件は許容的決定方式の全体が完全類であることである．Dの部分集合Cが，Dのどんな元φに対しても，$\forall \theta : r(\theta, \varphi) \geqq r(\theta, \psi)$なる$\psi$を含んでいるとき，<u>本質的完全類</u>といわれる．

こゝでパラメータ空間Θの部分集合のσ代数Λを考えて，可測空間(Θ, Λ)を作り，危険関数$r(\theta, \varphi)$は，任意の$\varphi \in D$に対して，θのΛ可測関数と仮定する．しかしΛは原子をもつと仮定する．Λ上の確率測度は，標本xを観測する前に（経験に先だって）知られているべき情報だ

から，これを先験確率分布または先験分布といい，ξであらわす．ξの全体をΞで，また有限個の原子の集合に確率1をつける先験分布の全体をΞ_1であらわす．もちろん$\Xi_1 \subset \Xi$．ξによる危険関数の平均$\int r(\theta,\varphi)d\xi$を簡單のため$r(\xi,\varphi)$とかく．これが期待される危険率である．この平均危険を最小にする方式$\varphi \in D$をξに対するベイズ解という．何らかの先験分布ξのベイズ解になつている決定方式の全体をベイズ類という．§6では先験分布の集合Hの元ξのベイズ解になつている決定方式の全体を考えるが，このときこの類をHに対するベイズ類B[H]と呼ぶ．したがつて單にベイズ類と呼ばれるものはB[Ξ]である．もし先験分布ξのベイズ解が1つしかなければ，そのベイズ解は許容的である．先験分布の集合Hに対して決定方式φ^0が

(1)　$$\inf_{\xi \in H}\{r(\xi,\varphi^0) - \inf_{\varphi \in D} r(\xi,\varphi)\} = 0$$

をみたすとき，φ^0をHに対するワルド解（広義ベイズ解）と呼び，その全体をHに対するワルド類W[H]という．

φ_2がφ_1と同じくらい良く，さらに$E(\subset\Theta)$上で常に$r(\theta,\varphi_2) \leqq r(\theta,\varphi_1)-\varepsilon$，$\varepsilon>0$，がなりたつとき，$\varphi_2$は$\varphi_1$の$(E,\varepsilon)$改良という．$\Xi_1$に対するワルド解はどんな$\varepsilon>0$に対しても$(\Theta,\varepsilon)$改良をもたない．$\Theta$の空でない部分集合の族$\Sigma$を考えて，$\Sigma$のどんな元Eについても，どんな$\varepsilon>0$についても，$\varphi^0$がDの中で$(E,\varepsilon)$改良を持たないとき，$\varphi^0$を$\Sigma$許容的という．もし$\Sigma$が$\Theta$のすべての部分集合（空でない）の全体であるならば，Σ許容的は許容的と一致する．またΘがユークリッド空間である場合に，ルベック測度が正である部分集合の全体をΣとするなら，Σ許容的のことを殆んど

許容的という．次に許容性の条件を述べるために，

$$G_1(\varphi, E) = \inf_{\xi\in\Xi_1} \frac{r(\xi,\varphi) - \inf_{\varphi'\in D} r(\xi,\varphi')}{\xi(E)}$$

(しかし右辺の分数は分母が0のときは∞と読むものと約束する)．を定義する．このとき

定理2.1. φ^*がφ°の(E,ε)改良であるならば，$G_1(\varphi^*,E) \leqq G_1(\varphi^\circ,E) - \varepsilon$ をみたす．

略証．任意の$\varepsilon'>0$に対して$G_1(\varphi^\circ,E)+\varepsilon' > \{r(\xi,\varphi^\circ) - \inf_{\varphi\in D} r(\xi,\varphi)\}/\xi(E)$となる$\xi\in\Xi_1$が存在するから，$r(\xi,\varphi^*) \leqq r(\xi,\varphi^\circ) + \varepsilon\cdot\xi(E)$より，目的の式がでる．

定理2.2. 次の4つの命題は同等である:

a) $G_1(\varphi^\circ, E)=0$

b) $\lim_{n\to\infty}\{r(\xi_n,\varphi^\circ) - \inf_{\varphi\in D} r(\xi_n,\varphi)\}/\xi_n(E)=0$ となる$\xi_n(\in\Xi_1)$の列が存在する．

c) いかなる$\varepsilon>0$に対しても，$\xi(E)>\delta$ かつ $r(\xi,\varphi^\circ) - \inf_{\varphi\in D} r(\xi,\varphi) < \delta\varepsilon$ をみたすような$\xi(\in\Xi_1)$と$\delta>0$とが存在する．

d) 正数列$\{A_n\}$とΞ_1の元の列$\{\xi_n\}$を適当にとって，$\lim_{n\to\infty} A_n\xi_n(E)>0$ かつ $\lim_{n\to\infty} A_n\{r(\xi_n,\varphi^\circ) - \inf_{\varphi\in D} r(\xi_n,\varphi)\}=0$ ならしめることができる．

さらに，もしΣが可算個の(空でない)$E(\subset\Theta)$の族である

ならば，ΣのすべてのEに対して a)〜d)の1つが成立つことは

e) 正数列$\{A_n\}$とΞ_1の元の列$\{\xi_n\}$とを適当にとって，

イ) $\liminf_{n\to\infty} A_n \xi_n(E)=0$ ならE$\notin\Sigma$，

ロ) $\liminf_{n\to\infty} A_n\{r(\xi_n,\varphi^0)-\inf_{\varphi\in D} r(\xi_n,\varphi)\}=0$

ならしめることができる

と同等である．

証明は極めて簡単であるので省略する．

定理2.2の命題c)はStein [20] の形であり，e)は竹内[22] の形である．そして定理2.1によると，ΣのすべてのEで a)〜d)のうちの1つが成り立つこと，およびe)がなりたつことはいづれもφ^0のΣ許容性の十分条件である．

§3. Wald-LeCam の定理

Ⓗで定義されたextendedな非負関数の全体を$\mathfrak{F}$とし，実半直線に$+\infty$を付け加えたコンパクト空間$\bar{R}_+=[0,\infty]$の直積空間$\bar{R}_+^{\Theta}$とみなして，$\mathfrak{F}$にチコノフ位相（直積位相，または弱位相）をつけて位相空間とする．もちろん$\mathfrak{F}$はチコノフの定理によって，コンパクト位相空間である．またハウスドルフ空間でもある．$\mathcal{R}(D)=\{r(\cdot,\varphi):\varphi\in D\}$を$\mathfrak{F}$の部分集合とみなし，$\mathcal{R}(D)$の閉包を作るとき，その任意の元$f(\cdot)$に対して，$\varphi^0\in D$が

存在して '$\forall\theta\in\Theta : r(\theta, \varphi^\circ) \leqq f(\theta)$' となるならば, Dは性質(W)をもつという. また任意のφ_1, $\varphi_2\in D$と任意の$\alpha\in [0,1]$に対して, $r(\theta,\varphi_3) \leqq \alpha r(\theta,\varphi_1)+(1-\alpha) r(\theta,\varphi_2)$が成立するような$\varphi_3\in D$が存在するとき, Dは下半凸であるという. ベイズ類$B[\Xi_1]$の危険関数族$\mathcal{R}(B[\Xi_1])=\{r(\cdot,\varphi): \varphi\in B[\Xi_1]\}$の$\mathfrak{F}$における閉包に$r(\cdot,\varphi)$が属すような$\varphi\in D$の全体を$B^*$とかくと,

定理3.1(*Wald-LeCam* [16], [24]). Dが下半凸で, 性質(W)をもつとき, (イ)最小完全類が存在する. (ロ)B^*は完全類である. (ハ) ワルド類$W[\Xi_1]$は完全類である. (ニ) $B^*\cap W[\Xi_1]$は完全類である.

定理3.2. Dは下半凸で, 性質(W)をもつとする. そのとき, (イ) 空でない$E(\subset\Theta)$に対して, φ°が(E,ε)改良をもつための必十条件は$G_1(E,\varepsilon)\geqq\varepsilon$が成立することである. (ロ) Θの空でない部分集合の族Σに対して, すべての$E\in\Sigma$で$G_1(\varphi, E)=0$がなりたつような$\varphi\in D$の全体はDで完全類である. 特に(ハ) Σがすべての部分集合のなす族であるとき(ロ)の完全類は最小である.

略証. (イ)を証明するために先づΘが有限集合のとき, すなわち有限次元のユークリッド空間で(イ)が成立することを証明する. そのために$S\subset R^n$が下半凸で, 性質(W)と同様な

条件をみたすとき，$x \in S$ ですべての $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ に対して $\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i - \inf_{y \in S} \sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i \geqq \varepsilon \sum \xi_i$ をみたすならば，$x_i - \varepsilon \geqq y_i$，$i=1, \cdots, n$，となる $y=(y_1, \cdots, y_n) \in S$ が存在することを証明する．次に一般の場合は，Θ の有限部分集合 N をとり，1）$0 \leqq f(\theta) \leqq \mathfrak{r}(\theta, \varphi^0)$ がすべての $\theta \in \Theta$ でなりたつ，2）$f(\theta) \leqq \mathfrak{r}(\theta, \varphi^0) - \varepsilon$ がすべての $\theta \in N \cap E$ でなりたつ，3）$f(\theta) = \mathfrak{r}(\theta, \varphi^*)$ が $\theta \in N$ でなりたつ $\varphi^* \in D$ が存在する，ような $f \in \mathfrak{F}$ の全体を Δ_N とする．Δ_N は空集合ではなく，かつ $\{\Delta_N\}$ は有限交叉性をもつことより，その共通部分から g をとると，性質(W)を用いて (E, ε) 改良を見つけることができる．（ロ）先づ $G_1(\varphi, E)=0$ となる φ の全体が完全類であることを証明する．それは $k_n = G_1(\varphi^{n-1}, E)$，$\varphi^n$ は φ^{n-1} の $(E, k_n/2)$ 改良となるような方式の列 $\{\varphi^n\}_{n=0,1,\ldots}$ を作り，性質(W)を用いて，φ^0 の改良を $G_1(\varphi, E)=0$ となる φ からもとめる．次に φ^0 をこの類に属さないとして，$C(E)$ を $G_1(\varphi, E)=0$ をみたし，かつある $\varepsilon>0$ で (E, ε) 改良 φ の全体とする．この $\{C(E) : E \in \Sigma\}$ は有限交叉性をもつ．従って再び性質(W)を用いて，すべての $E \in \Sigma$ で $G_1(\varphi, E)=0$ をみたす φ^0 の改良 $\varphi \in D$ の存在がいわれる．（ハ）は簡単に証明される．

定理3.2.から Stein の定理[20]，LeCam の定理[16]，

竹内の定理[22] が特別の場合として得られる.

系1. (Stein [20]). Dが下半凸で, 性質(W)をもつとする. $\varphi^\circ \in D$ が許容的であるための必十条件はどんな $\theta \in \Theta$, どんな $\varepsilon > 0$ に対しても, $\xi(\{\theta\}) > \delta$, $I(\xi, \varphi^\circ) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi, \varphi) < \varepsilon\delta$ のなりたつような $\delta > 0$, $\xi \in \Xi_1$ が存在することである.

系2 (LeCam [16]). Dが下半凸で, 性質(W)をもつとする. そのとき $\varphi^\circ (\in D)$ が (Θ, ε) 改良できるための必十条件はすべての $\xi \in \Xi_1$ に対して $I(\xi, \varphi^\circ) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi, \varphi) \geq \varepsilon$ が成立することである.

系3 (竹内 [22]). どんな $\varphi \in D$ に対しても $I(\theta, \varphi)$ が θ の連続関数であるとする. Dが下半凸で性質(W)をもつならば, φ° が許容的であるための必十条件は, Ξ_1 の元の列 $\{\xi_n\}$ および正数列 $\{A_n\}$ が存在して, どんな開集合 $E (\subset \Theta)$ に対しても $\liminf_{n\to\infty} A_n \xi_n(E) > 0$ で, $\liminf_{n\to\infty} A_n \{I(\xi_n, \varphi^\circ) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi_n, \varphi)\} = 0$ がなりたつことである.

§4. 決定関数の空間の正則位相, 危険関数の線形構造.

Φ に $\mathcal{P}$ から C_0^* への対応の族としての弱位相を考えて, これを正則位相と名づける. この位相における近傍系は任意の $\varphi^\circ (\in \Phi)$ の近傍として

$$V(\varphi^\circ : c_1, \cdots, c_n, \mu_1, \cdots, \mu_n, \varepsilon) = \{\varphi \in \Phi : |\varphi^\circ(\mu_i) \circ c_i - \varphi(\mu_i) \circ c_i | < \varepsilon,\ i = 1, \cdots, n\},\quad c_i \in C_0,\ \mu_i \in \mathcal{P},$$

[illegible]

これは，もとつたものからなりたつ．

定理 4．1（LeCam [16]）．Φの部分集合Dが相対的にコンパクトであるための必十条件は任意の$\mu \in \mathcal{P}$，任意の$\varepsilon > 0$に対して，$\|c\| = 1$なるC_0の元cが存在して，どんな$\varphi \in D$に対しても，$\varphi(\mu) \circ c > 1 - \varepsilon$とすることができることである．

$\mathfrak{M}$に弱位相（法則収束位相）を導入して考えると，定理4．1は"Dの相対的コンパクト性の必十条件は，任意の$\mu \in \mathcal{P}$に対して$D(\mu) = \{\varphi(\mu) : \varphi \in D\}$が$\mathfrak{M}$で相対的にコンパクトであること"になる．これはチコノフの定理に相当する．Dの任意の部分集合D'が"$D'(\mu) = \{\varphi(\mu) : \varphi \in D'\}$が$\mathfrak{M}$でコンパクトになるような$\mu$が$\mathcal{P}$の中に1つ存在すればすべての$\mu \in \mathcal{P}$で$D'(\mu)$が$\mathfrak{M}$でコンパクトである"という条件をみたすとき，$D$は$\mathcal{P}$に関して等質であるという．

定理4．2 [11]．もし$\mathcal{P}$の任意の2つの元が互いに絶対連続であるなら，Φは$\mathcal{P}$に関して等質である．

TとSとは共に局所コンパクト可分距離付け可能な空間であつて，TからSの上への対応$u(t)$が，Sのボレル集合Bの逆像$u^{-1}(B)$が常にTのボレル集合である，ようなものとする．このときTを決定の空間とし，$\mathcal{P}$を分布の空間とする統計問題$(T, \mathcal{P})$の任意の決定方式φに対して，$\hat{\psi}(B : x) = \hat{\varphi}(u^{-1}(B) : x)$を表現（局所化定理の意味で）とする決定方式$\psi$を，決定の空間$S$，分布の空間$\mathcal{P}$（共通）をもつ統計問題$(S, \mathcal{P})$の決定方式と考えることができる．この事実の逆として

定理4．3 [11]．上記の記号および条件のもとで，$(S, \mathcal{P})$に関す

る決定方式ψに対して，$\hat{\psi}(B:x)=\hat{\varphi}(u^{-1}(B):x)$がすべてのボレル集合Bについてなりたつような，$(T,\mathcal{P})$に関する決定方式$\varphi$が存在する．

統計家が自然環境θのもとで，行動（決定）$t\in S$をとつたときに，その統計家が何等かの損失を蒙むると考える．この損失はθとtとの2変数の関数と考えて$L(\theta,t)$であらわし，損失関数という．こゝでは$L(\theta,t)$は非負で$A\times\mathfrak{A}$可測であると仮定する．ただし$\mathfrak{A}$はSのボレル集合族をあらわす．危険関数$r(\theta,\varphi)$が損失関数の平均：

$$(2)\qquad r(\theta,\varphi)=\int_S L(\theta,t)\;\varphi(\mu_\theta)(dt)$$

で与えられるとき，危険関数は線形構造をもつという．以下において，特にことわらない限り，危険関数は線形構造をもつと仮定する．この仮定があれば，いかなるθに対しても$L(\theta,t)$がtの下半連続関数であれば，$r(\theta,\varphi)$は（Φの正則位相に関して）φの下半連続関数である．

定理4．4．Dがコンパクトで，どんなθに対しても$L(\theta,t)$がtの下半連続関数であるなら，$\mathfrak{F}$における$R(B)=\{r(\theta,\varphi):\varphi\in B\}$の閉包に$r(\cdot,\varphi)$が入るような$\varphi$に対して，正則位相での$B$の閉包の元$\psi$が存在して，$\forall\theta: r(\theta,\psi)\leqq r(\theta,\varphi)$．

証明．$r(\theta,\varphi)$は，どんなθでもφの下半連続関数である．故に$r(\cdot,\varphi)$に収束する$R(B)$内のネット$\{r(\cdot,\varphi_\alpha)\}$に対応する$B$内のネットから収束部分ネット$\{\varphi_\beta\}$をとると，その極限$\psi\in$（$B$の閉包）があり，$\lim_\alpha r(\theta,\varphi_\alpha)\geqq r(\theta,\psi)$が成立する．

線形構造をもつ危険関数に対しては，$\mathcal{P}$がσ有限測度λで支配されていれば，ベイズ解は簡単に求められる．μ_θのλに関する一般密度関数を$p(x;\theta)$とし，先験分布をξとすると，ベイズの定理によつて，

(3) $$\eta_\xi(d\theta : x) = \frac{p(x;\theta)\,\xi(d\theta)}{\int_\Theta p(x;\theta)\,\xi(d\theta)}$$

はxが与えられた条件付のθの分布である．すなわち事後分布である．

(4) $$\rho(t, x) = \int_\Theta L(\theta, t)\,\eta_\xi(d\theta : x)$$

は事後損失であつて，ξに対するベイズ解は，xが観測されたとき$J_x = \{t : \rho(t, x) = \min_{s \in S} \rho(s, x)\}$をとる方式$\varphi$：$\hat{\varphi}(J_x : x) = 1$，である．

以上述べたように標本空間$\mathcal{X}$（およびそのσ代数$\mathcal{B}$），分布の空間$\mathcal{P}$，決定の空間S（およびその位相），決定方式の空間D，損失関数Lが本質的に統計の問題を規定する．それでこれ等の組（$\mathcal{X}$, $\mathcal{P}$, S, D, L）を統計問題とよぶ．

§5. 性質（W）．

統計的決定関数の類の性質（W）は§3で示したように大変重要である．ところがこの性質を判定するのは決して容易なことではないので，以下においてその判定条件を述べる．

定理5．1（LeCam [16], [11]）．任意の$\theta \in \Theta$について，$r(\theta, \varphi)$がφの下半連続関数とする．そのときコンパクトなDは性質（W）をもつ．

この定理は$r(\theta, \varphi)$の構造やDの位相には関係なく成立する．しかしrが線形構造をもつているときは，tの下半連続な$L(\theta, t)$に対しては，

正則位相でコンパクトなDは性質(W)をもっている。(定理4.4参照)

定理5．2［11］．どんなθに対しても，またどんな正数$k < \sup_{\varphi \in D} r(\theta, \varphi)$ に対しても，Dの部分集合Cが存在して，Cが性質(W)をもち，かつ $\inf_{\varphi \in C} r(\theta, \varphi) > k$ をみたすものとする．このときDは性質(W)をもつ．

この定理も$r(\theta, \varphi)$の構造に無関係である．したがって定理5.1も5.2も一般の関数に応用される．ある2変数の関数$f(\theta, t)$が，$\mathfrak{F}$の部分集合$\{f(\cdot, t) : t \in T\}$の各点収束位相に関する任意の集積点$g(\cdot)$に対して，$\forall \theta : f(\theta, t_0) \leqq g(\theta)$ がなりたつ$t_0 \in T$が存在するとき，$f(\theta, t)$は半閉であるという．損失関数$L(\theta, t)$が半閉であることが，Dの性質(W)の十分条件であることを下にしめそう．先ず$\mathcal{L} = \{L(\cdot, t) : t \in S\}$が$\mathfrak{F}$の相対位相で考えたとき，局所コンパクト可分距離空間と同位相であるとする．次にどんなθでもそれを固定すれば，$L(\theta, t)$はtのボレル可測関数であると仮定する．そのときSから$\mathfrak{F}$への対応$u(t) = L(\cdot, t)$によって，$\mathcal{L} = u(S)$と考えることができる．したがって定理4.3によって，$\mathcal{L}$を新しい行動空間と考えて議論を進めてゆくことができる．このことを利用して，次の定理を証明することができる．

定理5．3［11］．$\mathcal{L}^*$を$\mathfrak{F}$の中での$\mathcal{L}$の閉包とする．$\mathcal{L}$は上に述べられた条件をみたすものとし，$\mathcal{L}^*$から$\mathcal{L}$への対応χがあって

(a) いかなる$\theta \in \Theta$，いかなる$k > 0$に対しても$\{f \in \mathcal{L}^* : L(\theta, \chi f) \leqq k\}$が$\mathcal{L}^*$における相対的ボレル集合である．

(b) どんな$\theta \in \Theta$，$f \in \mathcal{L}^*$に対しても，$L(\theta, \chi f) \leqq f(\theta)$がなり

たつ．ただし $\chi_f(\cdot)=L(\cdot,t)$ であるとき，$L(\theta,t)=L(\theta,\chi_f)$ とかく，を満足するとき，Φは性質(W)をもつ．

$D=\Phi$ のときに対しては上の定理はほゞ満足な結果を与えている．しかしDがΦの真部分集合である場合には上の定理の条件では不十分である．Dが Φの閉部分集合で，損失関数 $L(\theta,t)$ が半円のとき（$L(\theta,t)$ が2乗誤差 $(\theta-t)^2$ のときでさえ），Dが性質(W)をもたないような例が与えられている[11]．

定理5.4 [11]．$L(\theta,t)$ がtの下半連続で，どんな $\theta\in\Theta$ と正整数nに対しても，SのコンパクトW部分集合Cが存在して，$n\leq\inf_{t\notin C}L(\theta,t)$ をみたすものとする．このとき $\mathcal{P}$ に関して等値な閉集合Dは性質(W)をもつ．

§6. 型式的ベイズ解．

Wald-LeCamの定理（定理3.1）によると，性質(W)をもつ下半凸なDでは B^* やワルド類Wが完全類であった．ところが B^* の元が $r(\xi,\varphi)$ のξをうごかした極限とある意味で関係がある．粗雑ないい方であるが，B^* の元は先験分布の列 $\{\xi_n\}$ に対するベイズ解の列 $\{\varphi_n\}$ の極限であるから，汎関数 ξ_n の列の極限とそれに対するベイズ解の間に，例えば "$\{\varphi_n\}$ の極限 φ^0 は $\{\xi_n\}$ の極限である汎関数の値を最小にする" などという関係があれば，"極限汎関数の値を最小にする決定方式の全体は完全類である" などという都合のよいことがいえる．またワルド類にしても，(1)を書きかえると $\lim_{n\to\infty}\{r(\xi_n,\varphi^0)-\inf_{\varphi\in D}$

$r(\xi_n,\varphi)\}=0$ となる先験分布の列$\{\xi_n\}$が存在するということであるから，"φはξ_nの極限汎関数を最小にする"というようなことが云えるかもしれない。

先験分布ξによつて定まるφの関数$r(\xi,\varphi)$は，D上の実関数全体$\mathcal{G}$の要素である。したがつてξのある集合Hは$\mathcal{G}$の部分集合に対応する。$\mathcal{G}$に一様収束位相を考えて，それに関してHの閉包（くわしくはHに対応する$\mathcal{G}$の部分集合の閉包）をH^*であらわす。またHに関するベイズ類B[H]のDにおける閉包（正則位相での）を$B[H]^*$であらわす。そのとき

定理6.1 [13]. Hが$\mathcal{G}$の位相でコンパクトであるとし，任意の$\xi\in H$に対して，$r(\xi,\varphi)$がD上の下半連続関数であるとする。そのとき$B[H]^*\subset B[H^*]=W[H]$.

この定理ではHは先験分布の集合とした。しかし実はHをD上の関数族としても定理は成立する。そこでA_ξをξに関係して定まる定数とし，$\xi(\varphi)=A_\xi\cdot r(\xi,\varphi)$とすると，$H^*$の元は様々なものになりうる。つまりσ有限測度であつたり，超関数であつたりする。このことをもつと具体的にのべると，

定理6.2 [9]. 任意の先験分布列$\{\xi_n\}$に対して，その部分列$\{\xi_{n_j}\}$および正数列$\{A_j\}$が存在して，どんな$\varphi\in D$に対しても一様な極限$F(\varphi)=\lim_{j\to\infty}A_j\, r(\xi_{n_j},\varphi)$が存在するものとする。さらにそのFは正則位相で$\varphi_m\to\varphi_\infty$なら$\lim_{m\to\infty}F(\varphi_m)=$

$F(\varphi_\infty)$ を満足するものとする。そのときそのようにして得られるすべてのFに対して、$F(\varphi^0)=\min_{\varphi\in D}F(\varphi)$ となる φ^0 の全体Vは $B^*=B[\Xi_\varphi]^*$ を含む。かつ $\inf_{\xi\in\Xi} A_\xi\{I(\xi,\varphi^0)-\inf_{\varphi\in D}I(\xi,\varphi)\}=0$ をみたす。

例えば Θ が実数軸であり、$I(\theta,\varphi)$ は θ の有界連続関数であって、Eを Θ のある可測部分集合、$A_\xi=\xi(E)^{-1}$ であるとする。このとき $\{A_{\xi_n}\xi_n\}$ と σ 有限測度 λ とが、すべての有界連続関数 $f(\theta)$ に対して、$\int f\,d\lambda=\lim_{n\to\infty}A_{\xi_n}\int f\,d\xi_n$ であるという関係にあるとき、λ は $\{A_{\xi_n}\xi_n\}$ の極限であるという。このような意味の極限である σ 有限測度 λ に対して、$\int I(\theta,\varphi)\,d\lambda$ を最小にする φ^0 の全体をVとすると、Vは $B[\Xi]^*$ を含む。これがSacks [19] の理論の要点である。

次の例（　頁参照）では、$\Theta=R^m$, Qを境界がただ1点のみからなる R^m の部分集合とする。さらに $0\leqq\varphi(x)\leqq1$ となる $\mathfrak{X}$ 上の可測関数 φ の全体がDであり、$E_\theta[\varphi]$ は φ の μ_θ による平均であるとする。危険関数は $I(\theta,\varphi)=E_\theta[\varphi]$ if $\theta\in Q$, $I(\theta,\varphi)=1-E_\theta[\varphi]$ if $\theta\notin Q$ で与えられるとする。この記号と約束のもとに、μ_θ の λ に関する一般密度関数 $p(x:\theta)$ について θ での微分可能性に関する適当な条件を仮定する。このとき $p(x:\theta)$ を包む線型空間 $\mathcal{E}$ 上の汎関数 $A_\xi\{\int_Q f\,d\xi-\int_{\Theta-Q}f\,d\xi\}$ を考える。この汎関数の極限は微分と積分を含む或種の超関数Fである。$F(E_\theta[\varphi])$ を最小にする φ^0 の全体Vは B^* を含む。そしてこのような φ^0 はF($p(x:\theta)$) を用いて比較的簡単に求められるのである。[10]。

一般に $A_\xi\xi$ のような正値有限測度の極限として定義される線形汎関数を

一般先験分布といい，その値を最小にする φ° ($\in D$) を型式的ベイズ解という．

次の定理はベイズ類の閉包がワルド類より有意義である場合を示めす．

定理6．3 [13]．$r(\theta, \varphi)$ が，任意の $\varphi \in D$ に対して，θ の連続関数で，関数族 $R(D) = \{ r(\theta, \varphi) : \varphi \in D \}$ は一様収束位相でコンパクトであり，$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\varphi \in D} r(\theta, \varphi) < \infty$ とする．そのとき $B[\Xi_1]^* \subset W[\Xi_1]$．

この定理の条件がみたされる場合には，下半凸で性質(W)をもつ D におけるワルド類の，完全類としての意味は，ベイズ類より少ないと思うべきであろう．具体的な統計問題で，トリビアルでない完全類の発見のためにしばしば用いられる方法は，或る類 C が B^* を含んでいることを示めすことである．Wald-LeCamの定理によると，C が W か $W \cap B^*$ を含んでいることを示めせばよい筈であるが，現実にはこのような手段を用いなければ完全類であることが証明できない例は見つからない．そのために，W，まして $W \cap B^*$ の完全性の意味は薄いといわざるを得ない．$B^* \subset W$ となる例は定理6．3 の他にもあるがその逆の場合については，草間[14]の結果"$B^* = \Phi$ となる例"がある．

次の結果は型式的ベイズ解がベイズ解となる条件を与える．

定理6．4 (Wald [24]) Θ をコンパクト位相空間とし，D の任意の元 φ° のまわりに正則位相での近傍 V を，$R(V) = \{ r(\theta, \varphi) : \varphi \in V \}$ が同等連続かつ一様有界であるように，とることができるならば，$B[\Xi_1]^* \subset B[\Xi]$ で，$W[\Xi_1] \subset B[\Xi]$ である．

一般にベイズ解は，§4の最後でのべたように，事後損失を最小にするようなtを，観測値xに従ってとる方式φとして比較的簡単に求められる．しかしB^*の元やWの元は，一般には事後損失に相当するものが，そう簡単には求められない．それで事後損失に相当するものを発見しようとしたものが[19]や[10]であつて，前者ではσ有限測度をξであらわして(3)，(4)を作る方法であり，後者は前述のような$F(p(x:\theta))$を用いる方法を提案している．

§7. 先験部分情報に対する最適方式.

§2において先験分布は標本xが観測される以前に情報として統計者に与えられているべき，Θの確率法則であるとした．しかし与えられるべきであつても，与えられているとは限らない。全く先験確率が知られていないこともあるが，少しだけ知られていることもある．この"少しだけ"ということを次のように表現する：Θの有限Λ可測分割$\{\Theta_i\}$，$\Theta_i\in\Lambda$，$i=1,\cdots,n$，$\Theta_i\cap\Theta_j=\phi$，$\Theta=\bigcup_{i=1}^{n}\Theta_i$，上の$\xi$の値$\xi(\Theta_i)$，$i=1,\cdots,n$，が知られている．このとき平均損失の代りに$\sum_{i=1}^{n}(\sup_{\theta\in\Theta_i} r(\theta,\varphi))\xi(\Theta_i)$を考えて，これを平均最大損失という．$\Lambda$の部分$\sigma$体$\Gamma$に対する平均最大損失は上記の有限$\Gamma$可測分割に対する平均最大損失の下限と定義し，$r(\xi,\Gamma,\varphi)$であらわす．$r(\xi,\Gamma,\varphi)$が最小になる$\varphi^\circ$が存在するとき，$\varphi^\circ$を$(\Gamma,\xi)$最適方式という．$\Gamma=\Lambda$であるときは，$(\Lambda,\xi)$最適方式は$\xi$に対するベイズ解である．もし$\Gamma$が空集合$\phi$と$\Theta$だけからなる$\sigma$体であるなら，$(\Gamma,\xi)$最適方式をミニマックス解(または方式)と

いう. ミニマックス解はξに関係しない. $\inf_{\varphi\in D} r(\xi,\Gamma,\varphi) = \inf_{\varphi\in D} r(\xi,\Lambda,\varphi)$ であるとき, Γはξ十分であるといわれ, すべての$\xi\in\Xi$に対してξ十分なσ体は十分であるといわれる. 以下の議論のために, 部分σ体の誘導性を定義しておく. ある集合Mの部分集合のσ体$\mathcal{K}$の部分σ体$\mathfrak{H}$が, それに対してM上の関数fが存在し(その値域をM_1とする), $\mathfrak{H}=f^{-1}(\{E\subset M_1 : f^{-1}(E)\in\mathcal{K}\})$, かつ$M_1$の1点集合はすべて逆像が$\mathcal{K}$に属す, ようなものであるとき, $\mathfrak{H}$を誘導σ体という. 以下においてΓはΛの誘導部分σ体であるとする.

定理7. 1. [12]. Γがξ十分で, φ^0が(Γ,ξ)最適なら, $r(\theta,\varphi^0)$はξ a.e. でΓ可測で, φ^0はξに対するベイズ解であり, 逆に$r(\theta,\varphi^0)$がΓ可測で, φ^0がξに対するベイズ解であれば, Γはξ十分で, φ^0は(Γ,ξ)最適である.

定理7. 2 [12]. Γが十分σ体であるなら, ξに対するベイズ解φ^0の危険関数$r(\theta,\varphi^0)$はΓ可測である.

Dが下半凸で性質(W)をもつとき, 任意のξ, Γに対して(Γ,ξ)最適方式が$B[\Xi,]^*\cap W[\Xi,]$に属すこと, Ξをパラメータ空間, $r(\xi,\Gamma,\varphi)$をφの危険関数と考えて下半凸で性質(W)をもつこと, が予想される. 事実ミニマックス方式は$B[\Xi,]^*\cap W[\Xi,]$に属し(Wald [24]), また次の定理がなりたつ. 有限分割$\{\Theta_i\}_{i=1,\dots,n}$に対して, $\bar{r}(\theta,\varphi) = \sup_{\theta\in\Theta_i} r(\theta,\varphi)$ if $\theta\in\Theta_i$, $i=1,\dots,n$, とおくとき,

定理7. 3. Dが危険関数$r(\theta,\varphi)$について下半凸, 性質(W)をもつなら, $\bar{r}(\theta,\varphi)$についても下半凸で性質(W)をもつ.

証明. $0 \leqq \alpha \leqq 1$ とすると，$\alpha \sup_{\theta \in \Theta_i} r(\theta, \varphi_1) + (1-\alpha) \sup_{\theta \in \Theta_i} r(\theta, \varphi_2) \geqq \sup_{\theta \in \Theta_i} \{\alpha r(\theta, \varphi_1) + (1-\alpha) r(\theta, \varphi_2)\} \geqq \sup_{\theta \in \Theta_i} r(\theta, \varphi_3)$ より下半凸がわかる. $\{\sup_{\theta \in \Theta_i} r(\theta, \varphi) : \varphi \in D\}$ の集積点は $R(D)$ のある集積点 $f(\theta)$ の $\sup_{\theta \in \Theta_i} f(\theta)$ としてあらわされるから，$r(\theta, \varphi^0) \leqq f(\theta)$ なる $\varphi^0 \in D$ をとれば，それは与えられた集積点より下にある.

この定理より危険関数を $r(\xi, \Gamma, \varphi)$ として，同じような理論が展開されるものと予想される.

§8. 決定方式の範囲Dの制限.

I. 危険関数による制限. 危険関数が有限個 $r_1(\theta, \varphi), \cdots, r_n(\theta, \varphi)$ 考えられる場合にも，$\Theta_i = \Theta$ として，$\bigcup_{i=1}^{n} \Theta_i$ をパラメータ空間，$\bar{r}(\theta, \varphi) = r_i(\theta, \varphi)$ if $\theta \in \Theta_i$, $i = 1, \cdots, n$, と考えることによつて，危険関数が1つ $\bar{r}(\theta, \varphi)$, $\theta \in \bigcup_{i=1}^{n} \Theta_i$, の場合に還元できることは§2で述べた. この§では特に n 個のうちいくつかの危険関数があらかじめ与えられている定数でおさえられるような決定方式の全体をDとして，その中から他の危険関数を良さの基準とする方法で，決定方式を選択することが論ぜられる. しかし証明などの点で殆んど同じなので，特に $n=2$ とし，$r_1(\theta, \varphi) \leqq c$ となる φ の全体Dの中から，$r_2(\theta, \varphi)$ に関するベイズ解とか，許容方式，ミニマックス方式などを求めることを考えよう.

定理8. 1 (Hodges-Lehmann [7], Blyth [5]). ξ_1, ξ_2 を Θ 上の先験分布，α_1, α_2 を正数とし，$\bar{r}(\varphi) = \alpha_1 r_1(\xi_1, \varphi) +$

$\alpha_2 r_2(\xi_2,\varphi)$ とおく．φ^0 は $\bar{r}(\varphi^0)=\min_{\varphi\in D}\bar{r}(\varphi)$ とする．もし φ^0 が，$\sup_{\theta\in\Theta} r_1(\theta,\varphi^0)\leqq k$ をみたすならば，$\{\varphi: r(\theta,\varphi)\leqq k$ for all $\theta\in\Theta\}$ の中で，$r_2(\theta,\varphi)$ に関して，ξ_2 に対するベイズ解である．

定理8．2． φ^0 は定理8．1で与えられたものとする．もし $r_i(\xi_i,\varphi^0)=\max_{\theta\in\Theta} r_i(\theta,\varphi^0)$，$i=1,2$，をみたし $k=\max_{\theta\in\Theta} r_1(\theta,\varphi^0)<\infty$ であるならば，φ^0 は，$D=\{\varphi: r_1(\theta,\varphi)\leqq k\}$ の中で，ミニマックスである（$r_2(\theta,\varphi)$ を危険関数として）．

証明． $\alpha_1\sup_{\theta\in\Theta} r_1(\theta,\varphi^0)+\alpha_2\sup_{\theta\in\Theta} r_2(\theta,\varphi^0)=\bar{r}(\varphi^0)\leqq\bar{r}(\varphi)\leqq\alpha_1\sup_{\theta\in\Theta} r_1(\theta,\varphi)+\alpha_2\sup_{\theta\in\Theta} r_2(\theta,\varphi)$ であるから，$\varphi\in D$ なら $\sup_{\theta\in\Theta} r_2(\theta,\varphi^0)\leqq\sup_{\theta\in\Theta} r_2(\theta,\varphi)$ がなりたつ．

次の2つの定理8．3，8．4では $\bar{r}(\theta,\varphi)=\alpha_1 r_1(\theta,\varphi)+\alpha_2 r_2(\theta,\varphi)$ とおく．

定理8．3． φ^0 は $\bar{r}(\theta,\varphi)$ を危険関数としてミニマックスであるとする．もし $\sup_{\theta\in\Theta}\bar{r}(\theta,\varphi^0)=\alpha_1\sup_{\theta\in\Theta} r_1(\theta,\varphi^0)+\alpha_2\sup_{\theta\in\Theta} r_2(\theta,\varphi^0)$ がなりたち，$\sup_{\theta\in\Theta} r_1(\theta,\varphi^0)\leqq k$ がなりたつならば，φ^0 は $D=\{\varphi: r_1(\theta,\varphi)\leqq k\}$ の中で，$r_2(\theta,\varphi)$ についてミニマックスである．

定理8．4． φ^0 が $\bar{r}(\theta,\varphi)$ を危険関数として許容解であるならば，そして $r_1(\theta,\varphi^0)\equiv k$ であるならば，φ^0 は $D=\{\varphi: r_1(\theta,\varphi)\leqq k\}$ の中で許容解である（r_2 を危険関数として）．

この2つの定理の証明はきわめてやさしいので省略する．

II． 統計量に基づく決定方式の類．標本空間 $\mathcal{X}$ で定義されている関数（値域 $\mathcal{Y}$）$T(x)$ を統計量という．$\mathcal{B}$ の部分σ代数 $T^{-1}\{E\subset\mathcal{Y}: T^{-1}(E)$

$\in \mathfrak{B}\}$ をTによつて誘導されたσ代数という. (§7の誘導代数の定義参照). $\mathfrak{B}$のTによつて誘導された部分σ代数を$\mathfrak{B}^T$であらわす. どんな部分σ代数も誘導されるとは限らない(Bahadur [2] をみよ). 決定方式$\varphi(A:x)$ はxの関数として, $\mathfrak{B}$可測であるが, もしこれが$\mathfrak{B}^T$可測であるとき, 統計量Tに基づく決定方式という. さて$\mathcal{P}$の任意の元μ_θの$\mathfrak{B}^T$による条件付確率がxの関数として, $\mathcal{P}$の元に関係のないある$\mathfrak{B}^T$可測関数$q(\cdot\,;x)$ に$\mathcal{P}$ a.e. ($\mathcal{P}$の任意の元についてa.e.)で等しいとき, Tを十分統計量という. 危険関数$r(\theta,\varphi)$が線形構造をもつとし, Φの中でTにもとづく決定方式の全体をΦ^Tとかくことにする.

定理8. 5 (Le Cam [17]). $\mathcal{P}$が支配されているならば, 統計量Tが十分であるための必十条件は, どんな決定の空間Sと損失関数$L(\theta,t)$をもつ統計問題に対しても, Φ^TがΦの中で本質的完全類であることである.

この結果についてはBahadur [1], 工藤[9]も関連する. Kolmogoroff は十分統計量を次のように定義した(Dynkin [6] 参照). 任意の先験分布ξによる事後確率η_ξが$\mathfrak{B}^T$可測であるとき, Tは十分統計量である. この定義ははじめの定義と一致すること[3], §7のパラメータ空間Θにおける十分σ体とも関係すること[12]が示される.

III. 非確率化決定方式の類. §1で定義された非確率化決定方式は確率化決定方式より決定に到る手続きが簡単であるので, できればその方を採用する方がよい. それで, 非確率化決定方式の類が本質的完全であることが望ましい. これについて少し準備をする. Θの部分集合Qが与えられているものとする. 決定の空間Sは2点$\{0, 1\}$からなり, 損失関数は

$L(\theta, 0)=1$ if $\theta \in Q$, $=0$ if $\theta \notin Q$, $L(\theta,1)=0$ if $\theta \in Q$, $=1$ if $\theta \notin Q$, であるとする．このような統計問題は仮説検定問題といわれるが，これに対する決定方式φは，$\varphi(\{0\}:x)=\varphi(x)$とおくことにより，$0 \leqq \varphi(x) \leqq 1$の値をとる$\mathcal{B}$可測関数$\varphi$であると考えられる．このような仮説問題では$\mathcal{B}$が$\mathcal{P}$により非原子的（$\mathcal{B}$のどの元$B$も，$\mu(B) \geqq k>0$なる任意の実数$k$に対して，$B^* \subset B$かつ$\mu(B^*)=k$となる部分集合$B^*$をふくむ．ただし$\mu$は$\mathcal{P}$の任意の元）であれば，非確率化方式（ある$\mathcal{B}$可測集合の特徴関数となる$\varphi$）の全体が本質的完全類であると予想される．次の例として，$S=R^m$とする．損失関数$L(\theta, t)$は，どんなθをとめても，tの凸連続関数であるとする．このとき統計問題を凸損失推定問題ということにすると

定理8. 6（Blackwell-Girshick [4]）．凸損失推定問題では損失関数$L(\theta, t)$が，$\|t\| \to \infty$なら$L(\theta, t) \to \infty$，を満足すれば，非確率化決定方式の類Φ^*がΦの中で本質的完全類である．

Ⅳ．不変決定関数の類．ミニマックス性が最も関係のある問題は不変統計問題である．標本空間$\mathcal{X}$の上に$\mathcal{B}$可測変換gの群Gが定義されていて，$\mu \in \mathcal{P}$なら$\bar{g}\mu(E)=\mu(g^{-1}E)$, $E \in \mathcal{B}$，がまた$\mathcal{P}$に属しているものとする．さらに決定の空間Sにも連続変換$\tilde{g}$の群$\tilde{G}$が定義されていて，Gから$\tilde{G}$上への準同型対応$g \to \tilde{g}$があるものとする．もし損失関数$L(\mu, t)$が$L(\bar{g}\mu, \tilde{g}t)=L(\mu, t)$を満足するとき，統計問題$(\mathcal{X}, \mathcal{P}, S, \Phi, L)$は不変であるという．以下において，$G$は局所コンパクト可分な位相群であって，右不変ハール測度λが次の条件を満すものとする：Gの任意

のコンパクト部分集合Jと任意の正数εに対して，$\lambda(K)>0$，$\lambda(K)/\lambda(K\cdot J^{-1})>1-\varepsilon$ となるコンパクト部分集合Kが対応する．この条件をみたす位相群の例として，（1）整数群，（2）有限群，（3）実数群，（4）コンパクト群，（5）局所コンパクト連結なアーベル群，（6） 上の条件をみたす2つの部分群G_1とG_2をもち，G_1が正規部分群であり，$G_1\cap G_2=\{e\}$，$G=G_1\cdot G_2$ となる群G，（7）正則な実対稱行列の群，などを上げることができる．上の条件は後の定理8．7に必要な条件であるが，同様な目的でいろ〜な条件が述べられている．それらの条件の間の関係がStone [21]で研究されている．

不変な統計問題において，$\varphi(\tilde{g}A:gx)=\varphi(A:x)$，$\mathcal{P}$ a.e.，を満たす決定方式φが重要である．このような決定方式を<u>不変方式</u>という．不変方式の類をΦ_Iであらわす．不変な統計問題では不変方式が望ましいという原則がある（<u>不変性の原則</u>）．不変方式φに対しては$r(\bar{g}\mu,\varphi)=r(\mu,\varphi)$がなりたつから，$\mathcal{P}$を$\bar{G}$によつて等質な部分に分割することができる．ここで$\mathcal{P}$の部分Pが$\bar{G}$で<u>等質</u>であるとは，任意の$\mu_1,\mu_2\in P$に対して$g\in G$が$\bar{g}\mu_2=\mu_1$となるようにきまることである．この等質な部分では危険関数の値は定数である．したがつて等質な部分への分割に相当するσ体Γに対する　平均最大危険は，不変方式に対しては危険関数そのものに等しい．このことから，不変方式全体の類の中でのベイズ類，ワルド類，完全類等に関する"良さ"の議論は平均最大危険に関しての良さの問題に関連する．

<u>定理8．7</u>[8]．<u>Gが前に述べた条件をもち，</u><u>$\mathcal{P}$は$\bar{G}$によつて等質で</u>

るとする．そのときG不変な統計問題のミニマックス解がΦ_Iの中に存する．このミニマックス解はワルド類に属する．

$\mathcal{P}$が等質であれば，定理で述べられたミニマックス解はΦ_Iのなかで最良危険関数が一番小さい）であるから，Φ_Iのなかで許容的である．しかしのことはΦの中で許容的であることを意味しない．これについてはtein 等の研究があり，本誌石井吾郎氏の論を参照されたい．

$\mathcal{P}$が等質でない場合についてはWesler [25] の研究がある．

V．不偏方式の類．Lehmann [18] による不偏方式の定義は次のようである．決定方式φが次の式を満たすとき，不偏な決定方式という：

$$r(\theta,\varphi)=\min_{\theta'\in\Theta}\int_{\mathfrak{X}}\left[\int_S L(\theta',t)\varphi(dt:x)\right]\mu_\theta(dx),\ \text{for all}\ \theta\in\Theta.$$

不偏方式の類をΦ_uであらわすとき，Φ_uの中での許容性などが問題になる．不偏方式は古典的な不偏推定や不偏検定などとも関係があるが，また上記の Lehmann の定義が古典的な不偏性を完全にとらえているとはいえないようである．普通はΦ_uの 中で最良なものが存在する場合が考察されているにすぎず，それ以外の場合のΦ_uの中での許容性や完全類などに関する考察は全くなされていない模様である．たゞ注意すべきことは，Φ_uの中で最良なものが存在する場合でも，それがΦの中で改良されることがしばしばあるということである．

VI．逐次決定方式の類．Wald [24] および LeCam [16] は逐次決定方式を，決定関数の理論の立場から，定式化して，その類に位相を定義した．このことはくわしく述べる余裕がないので，それは省略する．し

かしこれらの方法によると決定方式の定義自体§1で述べたものより複雑であり，その類の位相ももっとちがったものである．しかし定式化の方法を違えると，§1で定義した決定方式の特別なものとなり，その類の位相も§4で定義したものがそのまゝ応用されうるようである．その場合逐次方式特有の損失関数である"費用関数"も特別にあつかわれる必要はなく，定理5．4の条件に相当する条件を仮定すればよいことがわかる．このような条件はWaldもLeCamも費用関数の条件として仮定していることに注意されたい．以上に述べたことは或種の見通しであって，未だ完全な研究はなされていない．

REFERENCES

[1] Bahadur, R.R.: Sufficiency and statistical decision functions, Ann. Math. Statist. 25 (1954), 423-462.

[2] ———, Two comments on "sufficiency and statistical decision functions", ibid. 26 (1955), 136-142.

[3] Barankin, E.W. and Kudō, H.: A general theorem on sufficiency, mimeographed note. 1966.

[4] Blackwell, D. and Girshick, M.A.: Theory of games and statistical decisions, John Wiley & Sons, New York, 1954.

[5] Blyth, Colin R.: On minimax statistical decision procedures and admissibility, Ann. Math. Statist. 22 (1951), 22-42.

[6] Dynkin, E.B.: Necessary and sufficient statistics for a family of probability distributions, Selected Transl. of Math. Statist. and Probabl. 1 (1951), 17-40.

[7] Hodges, J.L. Jr. and Lehmann, E.L.: The use of previous experience in reaching statistical decisions, Ann. Math. Statist. 23 (1952), 396-407.

[8] Kudō, H.: on minimax invariant estimates of the transformation parameter, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 6 (1955), 31-73.

9 工藤弘吉：統計量の充足性と完備性について，
数学 8, (1957), 129-138.

10 Kudō, H.: Locally complete class of tests, Bull. Inst. Internat. Statist. 38 (1961), 173-180.

11 ————: On the property (W) of the class of statistical decision functions, Ann. Math. Statist. 37 (1966), 1631-1642.

12 ————: On partial prior information and the property of parametric sufficiency, Proc. 5th Berkeley Symp, (1966). (in preparation)

13 ————: Bayes class and Wald class, Nagoya Journ. Math., (1967). (in preparation)

14 Kusama, T.: On classes of Bayes solutions, Ann. Inst. Statist. Math., 18 (1966), 1-11.

15 LeCam, L.: Notes for 258 (April 1962). mimeographed note.

16 ————: An extension of Wald's theory of statistical decision functions, Ann. Math. Statist. 26 (1955), 69-81.

17 ————: Sufficiency and approximate sufficiency, ibid. 35 (1964), 1419-1455.

18 Lehmann, E.L.: A general concept of unbiasedness, ibid. 22 (1951), 587-592.

19 Sacks, J.: Generalized Bayes solutions in estimation problems, ibid. 34 (1963), 751-768.

20 Stein, C.: A necessary and sufficient condition for admissibility, ibid. 26 (1955), 518-522.

21 Stone, M.: On statistically inspired conditions for the group structure of invariant experiments. mimeographed note, 1966.

22 竹内啓：統計的推定論II， 数学 16 (1965), 139-149.

23 Wald, A.: Contributions to the theory of statistical estimation and testing hypotheses, Ann. Math. Statist. 10 (1939), 299-326.

24 ————: Statistical decision functions, New York, 1950.

25 Wesler, O.: Invariance theory and a modified minimax principle, Ann. Math. Statist. 30 (1959), 1-20.