

動的在庫過程

都立工業短大 小田中 敏 男

§1. 緒言

納入と遅れを伴ふ場合の在庫管理問題は、既に S. Karlin, H. Scarf, R. Bellman 等によつて、費用関数に関する簡単な仮定のもとに、一費数の最適在庫方程式に歸着されることか示され^{1), 2)}いる。又費用関数が不明の場合の在庫管理過程に、ある確率基準による制御過程の理論³⁾が適用されることを T. Odanaka が示した⁴⁾。

本研究に於てはこの確率基準による在庫管理過程の納入と遅れのある場合は、納入と遅れのない場合の数学的拡張として扱われることを証明するものである。

この在庫過程のモデルと α 次のように考えることとする。

離散的な時点 $0, 1, \dots, N$ に於て統計的需要と有する単一品目の在庫問題と考える。各時点に於ける初期在庫量がある特定の境界を越える確率を最小にする政策を決定することか問題である。

ここで発注と納入との間に α 単位の時間遅れが存在すると

決定する。多くの場合購入費用、在庫費用等が伴われるが、この決定には困難なことがある。そこでここでは等々の費用は各段階に於て不明であるとし、各段階に於ける需要の中間値のみが決定せられるとする。又次の量を設定する。

x_n = n 段階に於ける初期在庫量。エブレの段階に於ける発注量、需要量と先立って知られるとする。($n = k, \dots, N-1$)。

y_n = n 段階に於ける発注量。($n = k, \dots, N-1$)。

z_n = n 段階に於ける需要量。($n = k, \dots, N-1$)

ここで y_n は x_n と既と発注せられる y_{n-1}, \dots, y_{n-d} に依存するとする。又 z_n が観測せられる前に y_n は決定せられねばならぬとする。この場合 $y_n \geq 0$ の条件は当然決定せられる。

このときこの在庫系と関る二次の関係が成立する。

$$x_{n+1} = x_n + y_{n-d} - z_n, \quad x_k = x \quad (1)$$

更には次の仮定を置く。

a) 需要 z_k, z_{k+1}, \dots, z_N は独立な同一分布をもつ非負確率変数

b) 次の条件が1の確率密度関数 $\varphi(z)$ に課せられている。

$$1) \quad \varphi(z) > 0, \quad z \geq 0, \quad \int_0^{\infty} \varphi(z) dz = 1$$

$$2) \int_{\gamma}^{\gamma+\Delta} \varphi(z) dz < a < 1, \quad \gamma \geq 0, \quad \Delta = \alpha - \beta. \quad (2)$$

3) $\varphi'(z)$ が連続で、かつ $[0, \infty)$ で単峰である。

4) ある領域 $[\gamma, \gamma+\Delta]$ に於て $\varphi''(z) < 0$ 。

c) 過剰在庫は貯蔵される。

§ 2. 数學的定式化

2.1. 供給に於て一期の過剰がある場合

もし供給に於て一期間の過剰がある場合、過程の状態を記述するのに二変数と要する。それは r 次の x と y とである。

x = r 段階に於ける需要を満ちるために貯蔵される在庫量。

y = $(r-1)$ 段階に於ける発注量。

この二変数の量を定義する。

$f_r(x, y)$ = 最適政策を用いて $(N-r)$ 期間に於て、各段階に於ける在庫量がある境界 α, β ($\alpha > \beta$) を越える確率。

この定義より明らか

$$\begin{aligned} f_{r-2}(x, y) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\ &= L(x+y), & (\alpha > x > \beta) \end{aligned} \quad (3)$$

∴ 7 6

$$L(x+y) = \int_{x+y-\beta}^{\infty} \varphi(z) dz + \int_0^{x+y-\alpha} \varphi(z) dz, \quad \left(\begin{array}{l} \alpha > x > \beta \\ x+y > \alpha \end{array} \right) \quad (4)$$

$$= \int_{x+y-\beta}^{\infty} \varphi(z) dz \quad \left(\begin{array}{l} \alpha > x > \beta \\ \alpha > x+y > \beta \end{array} \right)$$

$$L'(x+y) = \varphi(x+y-\alpha) - \varphi(x+y-\beta) \quad \left(\begin{array}{l} \alpha > x > \beta \\ x+y > \alpha \end{array} \right)$$

$N-2 > n$ と対応する微分方程式は次のように書ける。

$$f_n(x, y) = J \quad (x \geq \alpha, x \leq \beta)$$

$$= \min_{w \geq 0} \left[L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{n+1}(x+y-z, w) \varphi(z) dz \right] \quad (5)$$

($\alpha > x > \beta$)

2.2. 供給に α 期間の遅れのある場合。

J を最小にする政策関数 $\{y_n\}$ は決定可能。こゝに

$$J = \text{Prbl. } \left\{ \left(\max_{k \leq n \leq N} x_n \geq \alpha \right) \text{ or } \left(\min_{k \leq n \leq N} x_n \leq \beta \right) \right\}$$

(6)

$x_k = x$

このとき

$$f_n(x, y_{n-\alpha}, y_{n-\alpha+1}, \dots, y_{n-1}) = \min J \quad (7)$$

によつて定義される関数列を定義しよう。記号 \min は $\alpha > \beta$ の政策関数上での最小を意味する。

このとき, $N-d \leq n \leq N-1$ に対して

$$\begin{aligned}
 f_n(x, y_{n-d}, \dots, y_{n-1}) &= J, \quad (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\
 &= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{n+1}(x+y-z, y_{n-d+1}, \dots, y_{n-1}) \varphi(z) dz, \\
 &\quad (\alpha > x > \beta).
 \end{aligned} \tag{8}$$

この関数は

$$\begin{aligned}
 f_{n-1}(x, y_{n-1-d}, \dots, y_{n-2}) &= J, \quad (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\
 &= L(x+y), \quad (\alpha > x > \beta),
 \end{aligned} \tag{9}$$

更に一般には $k \leq n < N-d$ に対して

$$\begin{aligned}
 f_n(x, y_{n-d}, \dots, y_{n-1}) &= J, \quad (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\
 &= \min_{w \geq 0} \left[L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{n+1}(x+y-z, y_{n-d+1}, \dots, y_{n-1}, w) \varphi(z) dz \right], \\
 &\quad (\alpha > x > \beta)
 \end{aligned} \tag{10}$$

が成立する。

§ 3. 最適政策

最適政策の構造は次の定理によって示される。

定理 最適政策 $w_n^* = w_n^*(x, y_{n-d}, \dots, y_{n-1}) =$

$$w_n^* = \max(0, \bar{x}_n - (x + y_{n-d} + \dots + y_{n-1})) \tag{11}$$

の形である。

(証明) 方法を説明するにため、一期間の遷移のある問題の解析より始める。一期間の遷移のある函数方程式は

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x, y) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\ &= L(x+y), & (\alpha > x > \beta), \end{aligned} \quad (12)$$

より始まり、

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\ &= \min_{w \geq 0} \left[L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{n+1}(x+y-z, w) \varphi(z) dz \right], & (\alpha > x > \beta), \end{aligned} \quad (13)$$

で示される。 $n=N-1$ の場合は

$$\begin{aligned} f_{N-2}(x, y) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\ &= \min_{w \geq 0} \left[L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-1}(x+y-z, w) \varphi(z) dz \right], & (\alpha > x > \beta). \end{aligned} \quad (14)$$

となり、括弧内の w に関する微分は

$$\int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-1}(x+y-z, w)}{\partial w} \varphi(z) dz$$

となる。これを零と置く。 z

$$F_{N-2}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} m_{N-2}(w-z) \varphi(z) dz = 0 \quad (15)$$

が得られる。こゝに

$$u = x + y + w$$

$$m_{N-2}(u-z) = L'(x+y+w-z), \quad (\alpha > x+y+w-z/\beta), \quad (15)$$

$$= 0 \quad (\text{otherwise})$$

である。

函数 $F_{N-2}(u)$ の導関数

$$F'_{N-2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} m'_{N-2}(u-z) \varphi(z) dz \quad (16)$$

を有する。 $[\alpha > x+y+w-z/\beta]$ に於て $m'_{N-2}(u-z) < 0$ であるから、

$F_{N-2}(u)$ は単調減少函数で、又 $F_{N-2}(\infty) < 0$, $F_{N-2}(-\infty) > 0$ から、

$F_{N-2}(u) = 0$ は根が存在して $-\infty < u < \infty$ である。この根を \bar{x}_{N-2} と呼ぼう。

このとき最適証券政策は次の形となる。

$$w_{N-2}^* = \bar{x}_{N-2} - x - y, \quad (\bar{x}_{N-2} \geq x + y), \quad (17)$$

$$= 0, \quad (\bar{x}_{N-2} < x + y).$$

更に

$$f_{N-2}(x, y) = 1, \quad (x \geq \alpha, x \leq \beta), \quad (18)$$

$$= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-1}(x+y-z, w_{N-2}^*) \varphi(z) dz, \quad (\alpha > x > \beta).$$

2"

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{N-2}(x, y)}{\partial y} &= 0 && (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\ &= \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-1}(x+y-z, w_{N-2}^*)}{\partial y} \varphi(z) dz && (19) \\ &&& (\alpha > x > \beta) \end{aligned}$$

となる。

そこで数学的帰納法を用いるために、 f_{N-n} は次の性質を持つと仮定しよう。

$$\begin{aligned} i) \quad f_{N-n}(x, y) &= 1, && (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\ &= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-n+1}(x+y-z, w_{N-n}^*) \varphi(z) dz && (20) \\ &&& (\alpha > x > \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad w_{N-n}^* &= \bar{x}_{N-n} - x - y, && (x+y < \bar{x}_{N-n}), \\ &= 0, && (\text{otherwise}). \end{aligned}$$

\bar{x}_{N-n} は次の方程式の単一解である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_{N-n}(u-z) \varphi(z) dz = 0,$$

$$m_{N-n}(u-z) = \frac{\partial f_{N-n+1}(x+y-z, w_{N-n}^*)}{\partial y}, \quad (\alpha > x+y-z > \beta) \quad (21)$$

$$= 0, \quad (\text{otherwise})$$

$$\text{iii)} \quad \frac{\partial f_{N-n}(x, y)}{\partial y} = \int_{x+y-d}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-n+1}(x+y-z, w_{N-n}^*)}{\partial y} \varphi(z) dz, \quad (0 \leq z \leq \beta)$$

$$= 0 \quad (x \geq d, x \leq \beta)$$

左等の性質が $(N-n)$ から $(N-n-1)$ へと n を増やす時にも保持されることを証明しよう。

$$f_{N-n-1}(x, y) = 1, \quad (x \geq d, x \leq \beta),$$

$$= L(x+y) + \min \int_{x+y-d}^{x+y-\beta} f_{N-n}(x+y-z, w) \varphi(z) dz \quad (22)$$

$$(d > x > \beta).$$

w と u の関係の括弧は微分符号

$$F_{N-n-1}(u) = \int_{x+y-d}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-n}(x+y-z, w)}{\partial w} \varphi(z) dz \quad (23)$$

$$= \int_{x+y-d}^{x+y-\beta} \int_{x+y-d}^{x+y-\beta} \dots \int_{x+y-d}^{x+y-\beta} L'(u-z-z, \dots, w_1^* + w_2^* + \dots) \varphi(z) \varphi(z) \dots dz dz_1 \dots dz_{n-1}$$

ここで $L'(x+y)$ は高々一根を有しているので F_{N-n-1} とよって記せば n 根を有する $F_{N-n-1}(u) = 0$ は有するところが証明される。
よって最適政策は

$$w_{N-n-1}^* = \bar{x}_{N-n-1} - x - y, \quad (x+y < \bar{x}_{N-n-1}) \quad (24)$$

$$= 0, \quad (x+y \geq \bar{x}_{N-n-1})$$

で、

$$\begin{aligned}
 f_{N-n-1}(x, y) &= 1 && (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\
 &= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-n}(x+y-z, w_{N-n-1}^*) \varphi(z) dz && (25) \\
 &&& (\alpha > x > \beta)
 \end{aligned}$$

が得られ、更に

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{N-n-1}(x, y)}{\partial y} &= 0 && (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\
 &= \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-n}(x+y-z, w_{N-n-1}^*)}{\partial y} \varphi(z) dz && (26) \\
 &&& (\alpha > x > \beta)
 \end{aligned}$$

と得る。よって、 n 等から次のことが言える。

定理 2 (2) の仮定が満足せられ、選水の手工が $d=1$ の場合、最適政策は (2)(ii) で示された形となる。

これで $d=1$ の場合の完全な証明は示された。更に一般に d が選水のある場合を考察しよう。この場合に帰納法が用いられる。

(10) 式に於て、 $n=N-d-1$ と置けば

$$\begin{aligned}
 f_{N-d-1}(x, y_{N-2d-1}, \dots, y_{N-d}) &= 1, && (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\
 &= L(x+y_{N-2d-1}) + \min_{w \geq 0} \left\{ \int_{x+y_{N-2d-1}-\alpha}^{x+y_{N-2d-1}-\beta} f_{N-d}(x+y_{N-2d-1}-z, y_{N-2d}, \dots, w) \varphi(z) dz \right\} && (27) \\
 &&& (\alpha > x > \beta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad w_{N-n}^* &= \bar{x}_{N-n} - x - y_{N-n-d} - \dots - y_{N-n}, \\
 &\quad (x + y_{N-n-d} + \dots + y_{N-n} < \bar{x}_{N-n}) \quad (31) \\
 &= 0, \quad (\text{otherwise})
 \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{\partial f_{N-n}(x, y_{N-n-d}, \dots, y_{N-n})}{\partial y_{N-n}} = \int_{x+y_{N-n-d}}^{x+y_{N-n-d}+\beta} \frac{\partial f_{N-n+1}(x+y_{N-n-d}z, \dots, y_{N-n}, w)}{\partial y_{N-n}} dz \quad (32)$$

これから次の重要な定理が得られる。

定理 4 (2) の仮定が満足せられ、 $\beta > 0$ の値が与えられている場合、最適政策の形は (31)(ii) で示される。

参考文献

- 1) Arrow, K. J., S. Karlin and H. Scarf; *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford, Calif., Stanford Univ. Pr., (1958).
- 2) Bellman, R., I. Glicksberg and O. Gross
On the optimal inventory equation; *Management Sci.*, (1955).
- 3) Odanaka, T., Control Processes with certain probability criterion. *Journal*
- 4) Odanaka, T., Some inventory control processes