

代数的多様体の
複素構造の変形について

名大 理学部 田原 賢一

I. P. Shafarevich の "Algebraic surfaces" (translated by Y. Sasaki) の 9 章の興味ある 1 定理を紹介するが、これは Kodaira-Spencer [34. 頁] の結果の corollary として得られると云ってよい。

0. $\mathcal{J} \xrightarrow{\pi} M$ は complex-analytic family of compact complex manifolds¹⁾ とすると、各 $t \in M$ の fibre $\pi^{-1}(t) = V_t$ はある 1 つの complex manifold X に diffeomorphic である: $V_t \cong X$ ($\forall t \in M$)。

ここで、 $A = \{t \in M \mid V_t; \text{projective algebraic}\}$ とするとき、 A が M のどんな subset になるかを調べる。

1. $M \ni t_0$ とする。定義より、 t_0 を含む任意の contractible 近傍 U に対して次のようになる;

$U \ni V_t$ に対して, imbedding $V_t \hookrightarrow \pi^{-1}(U) \ni i_t$ とすれば,

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X \times U \\ H^2(V_{t_0}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_{t_0}^{*-1}} H^2(\pi^{-1}(U), \mathbb{Z}) \cong H^2(V_t, \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

但し, i_t^* は imbedding i_t によって導かれたコホモロジー群の準同型とする。

次のことはよく知られている通りである²⁾;

1つの compact complex manifold V が projective algebraic (以下単に p. alg. と記す) となるための必要十分条件は, ある Hodge metric i.e. 次のような Kählerian metric ds^2 が存在することである;

$$ds^2 = 2 \sum g_{\alpha\bar{\beta}} (dz^\alpha \cdot d\bar{z}^\beta)$$

とすると, それに結合された微分型式

$$\omega = \sqrt{-1} \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

がコホモロジーの integer class に属する;

$$\bar{\omega} \in H^2(V, \mathbb{Z})$$

今, $t_0 \in M$ とし, $V_0 = \pi^{-1}(t_0)$ が p. alg. とすると, contractible な t_0 の近傍 U が存在して, ω_0 を V_0 の Hodge metric によって結合された微分型式とすれば,

$$H^2(V_0, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_t^* i_{t_0}^{*-1}} H^2(V_t, \mathbb{Z})$$

により integer class $C_t = i_t^* i_{t_0}^{*-1} \bar{\omega}_0$ が定まる。更に, C_t に属する唯一つの harmonic form ω_t が定まり, それは,

$$\omega_t = H_t i_t^* \omega$$

となる。但し、 ω は $i_t^*(\bar{\omega}_0)$ に属する微分型式であり、 i_t^* は imbedding i_t によって導かれる微分型式の準同型とする。そして、 H_t は harmonic operator とする。

このとき、次の Lemma を証明する:

Lemma 1. U が十分小さければ (以下 $U \ll 0$ と記す)、
 $t \in U$ に対して、

ω_t ; ある Hodge metric に結合される。

$$\stackrel{(1)}{\iff} \omega_t \text{ ; of type } (1,1)$$

$$\stackrel{(2)}{\iff} \pi^{0,2} \omega_t = 0$$

(但し、 $\pi^{p,q} \omega_t$ は微分型式 ω_t の (p,q) 型の成分を示す。)

証明: $\stackrel{(1)}{\implies}, \stackrel{(2)}{\implies}$; 明らか。

$\stackrel{(2)}{\iff} \omega_t$ は real form であるから、

$$\pi^{2,0} \omega_t = \overline{\pi^{0,2} \omega_t} = 0$$

よって、 ω_t ; of type $(1,1)$.

$\stackrel{(1)}{\iff} U$ が十分小さければ、次のような Kählerian metric $ds_t'^2$ が存在する³⁾;

$$\left(\begin{array}{l} ds_{t_0}'^2 = ds_0^2 \\ \omega_t = H_t i_t^* \omega \text{ ; continuous for } t \in U \end{array} \right.$$

ω_t は $(1,1)$ 型であり、 ω_0 は Hodge metric ds_0^2 に結合されるから、 ω_t は positive definite metric ds_t^2

に結合される。そして、 $\bar{\omega}_t \in H^2(V_t, \mathbb{Z})$ であるから、 ω_t は Hodge metric ds_t^2 に結合される。(終り)。

2. $k_1(t), k_2(t), \dots, k_l(t)$ を $\overset{V_t \text{ 上の}}{\text{holomorphic 2-dimensional forms}}$ の space $\mathcal{H}^{2,0}(V_t)$ の base とすると、

$$\pi^{0,2} \omega_t = \sum_j F_j(t) \overline{k_j(t)}$$

とかける。このとき、次の proposition を証明する。

Proposition. $\cup \ll 0$ とする。このとき、 $k_j(t) (1 \leq j \leq l)$ と適宜にとれば、 $F_j(t) (1 \leq j \leq l)$ は $t \in \cup$ に対して holomorphic となる。

それには、次の Lemma を必要とする。

Lemma 2. β_0 を V_0 上での harmonic form とすると、 $\pi^{-1}(\cup)$ 上の closed な微分型式 β が存在して、

$$\begin{cases} i_t^* \beta & ; \text{ harmonic form on } V_t \\ i_0^* \beta & = \beta_0 \end{cases}$$

となる。

証明:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(V_0, \mathbb{C}) & \xrightarrow{i_0^{*-1}} & H^*(\pi^{-1}(\cup), \mathbb{C}) & \xrightarrow{i_t^*} & H^*(V_t, \mathbb{C}) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ \beta_0 & \longrightarrow & \tilde{\beta} & \longrightarrow & i_t^* \tilde{\beta} \end{array}$$

とすると、

$$i_t^* \tilde{\beta} = H_t i_t^* \tilde{\beta} + d_t \circ i_t^* \tilde{\beta} + \circ i_t^* \tilde{\beta} \quad (4) \quad (\text{直交分解})$$

このとき、

$$\begin{cases} d_t \widehat{d_t G_t} i_t^* \widetilde{\beta} = 0 \\ \eta_t = d_t \widehat{d_t G_t} i_t^* \widetilde{\beta} ; \text{ holomorphically depend on } t \in U \end{cases}$$

そして, $\pi^{-1}(U) \cong X \times U$ であるから, $\pi^{-1}(U)$ 上の微分形式 N が存在して, $i_t^* N = \eta_t$.

$$\text{よって, } H_t i_t^* \widetilde{\beta} = i_t^* \widetilde{\beta} - d_t \eta_t = i_t^* (\widetilde{\beta} - d_t N)$$

故に, $\beta = \widetilde{\beta} - d_t N$ とすればよい。

Proposition の証明: $k_1, k_2, \dots, k_l \in \mathcal{H}^{2,0}(V_0)$ の base とする。Lemma 2 によつて, V_0 上での harmonic forms $\omega_0, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_l$ に対して, $\pi^{-1}(U)$ 上での closed forms $\omega, K_1, K_2, \dots, K_l$ が存在して,

$$\begin{cases} i_t^* \omega, i_t^* K_j (1 \leq j \leq l) ; \text{ harmonic forms on } V_t \\ i_0^* \omega = \omega_0, i_0^* K_j = \bar{k}_j (1 \leq j \leq l) \end{cases}$$

すなわち, 明らかに, $\omega_t = i_t^* \omega$ であり, 且 $\pi^{0,2} i_t^* K_j = \overline{k_j(t)}$ ($1 \leq j \leq l$) は $\mathcal{H}^{0,2}(V_t)$ の base をなす。 ($t \in U$)

$$\text{従つて, } \pi^{0,2} \omega_t = \sum_j F_j(t) \overline{k_j(t)}$$

とかけ, この $k_j(t)$ ($1 \leq j \leq l$) が所与のものである;

$$\text{i.e. } \begin{cases} k_1(t), k_2(t), \dots, k_l(t) ; \text{ base of } \mathcal{H}^{2,0}(V_t) \\ F_1(t), F_2(t), \dots, F_l(t) ; \text{ holomorphic for } t \in U \end{cases}$$

前者は明らかであるから, 後者を示せばよい。その為 $\pi^{-1}(U)$ の covering W_i を考え, W_i の局所座標を

$(z_1^i, z_2^i, \dots, z_n^i; t_1^i, t_2^i, \dots, t_m^i)$ とする。更に, $U \ll 0$ であるから, $t_k^i = t_k^j$ ($1 \leq k \leq m$) とできる。よって, $(t_1^i, t_2^i, \dots, t_m^i) = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ とする。このとき,

$F_j(t)$; holomorphic for $t \in U$

$$\iff \frac{\partial F_j}{\partial \bar{t}_k} = 0 \quad (1 \leq k \leq l)$$

$$\iff \sum_j \frac{\partial F_j(t)}{\partial \bar{t}_k} \overline{k_j(t)} = 0$$

$$\iff \left(\sum_j \frac{\partial F_j(t)}{\partial \bar{t}_k} \overline{k_j(t)} \right)_i = d_t'' \theta_i^k \text{ on } W_i \cap V_t$$

(但し, θ_i^k は V_t 上でのある型式の $W_i \cap V_t$ 上への制限とする。)

実際に, θ_i^k を作ろう。 $\pi^{0,2} \omega_t, \pi^{0,2} K_j$ は $W_i \cap V_t$ 上では, 次のように表わされる;

$$\begin{cases} (\pi^{0,2} \omega_t)_i = \sum_j F_j(t) \overline{k_j(t)} + P_i^k \wedge d\bar{t}_k + \dots \\ (\pi^{0,2} K_j)_i = \overline{k_j(t)} + Q_{i,j}^k \wedge d\bar{t}_k + \dots \end{cases}$$

(但し, $P_i^k, Q_{i,j}^k$ は $\sum_j a_j(z, t) d\bar{z}_j$ なる型とする。)

よって,

$$\begin{cases} (d'' \pi^{0,2} \omega_t)_i = \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}_k} \left(\sum_j F_j(t) \overline{k_j(t)} \right) + d_t'' P_i^k \right) \wedge d\bar{t}_k + \dots \\ (d'' \pi^{0,2} K_j)_i = \sum_k \left(\frac{\partial \overline{k_j(t)}}{\partial \bar{t}_k} + d_t'' Q_{i,j}^k \right) \wedge d\bar{t}_k + \dots \end{cases}$$

一方, $d\omega = 0, dK_j = 0$ ($1 \leq j \leq l$) であるから,

$$d''\pi^{0,2}\omega = 0, \quad d''\pi^{0,2}K_j = 0 \quad (1 \leq j \leq l)$$

よって,

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \overline{K_j(t)}}{\partial \overline{t}_R} \right)_i = -d_t'' G_{ij}^R \\ \left(\frac{\partial}{\partial \overline{t}_R} \left[\sum_j F_j(t) \overline{K_j(t)} \right] \right)_i = -d_t'' P_i^R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{又, } \left(\sum_j \frac{\partial F_j(t)}{\partial \overline{t}_R} \overline{K_j(t)} \right)_i &= \left(\frac{\partial}{\partial \overline{t}_R} \left[\sum_j F_j(t) \overline{K_j(t)} \right] \right)_i - \left(\sum_j F_j(t) \frac{\partial \overline{K_j(t)}}{\partial \overline{t}_R} \right)_i \\ &= -d_t'' P_i^R + \sum_j F_j(t) d_t'' G_{ij}^R \\ &= d_t'' \left(\sum_j F_j(t) G_{ij}^R - P_i^R \right) \end{aligned}$$

今, $\sum_j F_j(t) G_{ij}^R - P_i^R = Q_i^R$ とおけば, $W_i \cap W_j \cap V_t$ 上で,
 $Q_i^R = Q_j^R$ が容易に確かめられる。 (終り)

そこで, $H^2(X, \mathbb{Z}) \ni C_0 = \overline{\omega}_0$ に対して,

$$B_{C_0} = \{ t \in U \mid \omega_t; \text{ of type } (1,1) \}$$

とおけば, 今までの結果及び Kählerian manifolds の上では, harmonic operator H_t は type (1,1) の forms と同じ type の forms に移すことによつて, 次のことが解る。

- (a) B_{C_0} ; analytic subset in U
- (b) $t_0 \in B_{C_0} \subset A$
- (c) B_{C_0} は $\pi^{-1}(U)$ 上の Kählerian metric の選び方

に よ ら ば い。

$$(d) \operatorname{codim} B_{c_0} \leq h^{2,0} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{2,0}(V_0)$$

$$(e) A = \bigcup_{c \in B} B_c \text{ (高々 countable set の union)}$$

但し, B は, A の任意の点 t に対して, $c = \bar{\omega}_t \in H^2(X, \mathbb{Z})$ と対応させる mapping の A 全体の像とする。

以上によって, 次の結果を得る。

Theorem $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ を complex-analytic family of compact complex manifolds とする。 $V_0 = \pi^{-1}(t_0)$ が projective algebraic であるとする。

然らば, t_0 のある近傍 U の中に, analytic subset B_{c_0} が存在して, 次の性質をもつ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{codim} B_{c_0} \leq h^{2,0} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{2,0}(V_0) \\ B_{c_0} \subset A = \{t \in M \mid V_t; \text{ projective algebraic}\} \\ A = \bigcup_{c \in B} B_c \text{ (高々可算個の analytic subset の和)} \end{array} \right.$$

(但し, B は $H^2(X, \mathbb{Z})$ の subset であり, A の任意の点 t に対して, $V_t = \pi^{-1}(t)$ の Hodge metric に結合される微分型式 ω_t の class $\bar{\omega}_t = c_t$ と対応させるような mapping の A 全体の $H^2(X, \mathbb{Z})$ の中での像とする。)

脚注 1) [34] 参照。

___ 2) Theorem 4, [2] 参照。

___ 3) Theorem 15, [34 III] 参照。

___ 4) p. 14, [1] 参照。

