数理解析研究所講究録
29巻 1967年 61-70

Complex torus の complex analytic family についての一考察

名市大 教養部 岡野 節

§1. Kodaira-Spencer [34] において complete でかつ effectively parametrized な complex torus の complex analytic family が具体的に与えられている。ここではさらに一般の complex torus の complex analytic family がどんな型をしているかを考えてみる。

まず Y を既約な解析空間とし、$2n^2$ 個の Y 上の正則函数を要素とする $(n, 2n)$ 型の行列 Ω を考える。Ω の要素を ω_{ij} $(i=1, \cdots n;\ \ j=1, \cdots, 2n)$ とする。さらに $(2n, 2n)$ 型行列 $\begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix}$ は各点 $t \in Y$ で正則であると仮定する。
(ここで $\overline{\Omega}$ は Ω の conjugate を表わす。)

$\mathbb{C}^n$ を n 変数 $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ をもつ n 次元複素ユークリッド空間とし、$\mathbb{C}^n \times Y$ での analytic automorphism

$$g_j : \quad (z, t) \longrightarrow (z - \omega_j(t), t), (j=1, \cdots, 2n,)$$

を考え、この $2n$ 個の automorphism で generate される
アーベル群を G で表わす。ただしここで $\omega_j(t) = \begin{pmatrix} \omega_{1j}(t) \\ \omega_{2j}(t) \\ \vdots \\ \omega_{nj}(t) \end{pmatrix}$
である。

このとき、factor space $\mathbb{C}^n \times Y / G$ は明らかに complex space で Y 上の torus の complex analytic family が定まる。今 $\mathbb{C}^n \times Y / G = X$ とおき、X から Y への natural な projection を π とおく。明らかに各 $t \in Y$ に対して $\pi^{-1}(t)$ は $\Omega(t)$ を周期行列にする complex torus である。

これから先、以上の行列 Ω 及びそれから得られた complex torus の family $X \xrightarrow{\pi} Y$ を fix して考える。そして各 $t \in Y$ に対して、次の様な記号を用いる。

$X_t = \pi^{-1}(t)$

$K_t = X_t$ 上の有理型函数全体のなす体.

$td(K_t) =$ 体 K_t の複素数体上の超越次数。

$Y_k = \{ t \in Y \mid td(K_t) = k \} \quad (n \geq k \geq 0)$

§2. 今 $t_0 \in Y_k$ $(k > 0)$ の点とする。そうすると
変数の変換,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$ があって．

K_{t_0}の函数は $n-k$個の変数 $w_{k+1}, w_{k+2}, \cdots w_n$に depend しない。

今 $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$ とおく。明らかに

(i) $\operatorname{rank} P = k$.

であり，$\mathbb{C}^k$の中の$2n$個のベクトル $P\Omega_j(t_0)$, $j=1, \cdots 2n$, は$\mathbb{C}^k$の中の rank $2k$の discrete $\overset{\text{free}}{\text{group}}$ を生成する。(この事については例えば[0], p 103 を見られたい)。その group をG^kとすれば$\mathbb{C}^k/G^k$は明らかに Abelian variety であり，X_{t_0}の有理型函数体K_{t_0}と$\mathbb{C}^k/G^k$の函数体は一致する。

今 $\omega_1', \omega_2' \cdots \omega_{2k}'$を$G^k$の free base とすれば．$(2n, 2k)$型整数行列$H_1$があって

$P\Omega(t_0)H_1 = (\omega_1', \omega_2' \cdots \omega_{2k}')$ となる。ただし $\omega_i' = \begin{pmatrix} \omega_{1i}' \\ \vdots \\ \omega_{ki}' \end{pmatrix}$.

さらに $\omega_1', \omega_2', \cdots \omega_{2k}'$が base である事より $(2k, 2n)$型整数行列H_2があって

(ii) $P\Omega(t_0)H_1H_2 = P\Omega(t_0)$ となる。

さらに，$\mathbb{C}^k/G^k$が abelian である事より 歪対称な $(2k, 2k)$型

整数行列 A があって、$|A|\neq 0$,

(iii) $P\Omega(t_0)H_1A(\,P\Omega(t_0)H_1)'=0$

(iv) $\sqrt{-1}\,\overline{P\Omega(t_0)H_1}\,A\,(P\Omega(t_0)H_1)'<0$

となる。ただしここで $'$ は転置を表わす。

特に今、$t_0\in Y_n$ とする。このときは上の P, H_1, H_2 を単位行列にとれる。

今 Y_n が第二類の集合であると仮定する。このとき各 $t_0\in Y_n$ に対して $(2n,2n)$ 型の歪対称な正則な整数行列 A があって、

$\Omega(t_0)A\Omega(t_0)'=0$ かつ $\sqrt{-1}\,\overline{\Omega(t_0)}A\Omega(t_0)'<0$ となる。

そこで各 $t_0\in Y_n$ に対してこの様な A を一つ取って集合 $Y(A)=\{t\in Y \mid \Omega(t)A\Omega(t)'=0\}$ を考える。$Y(A)$ は Y の解析的部分集合であり、又仮定により Y_n は第2類だから、A が整数行列である事より、一つの A があって $Y(A)=Y$ となる。ところが点 t_0 では $\sqrt{-1}\,\overline{\Omega(t_0)}A\Omega(t_0)<0$ だから Y が連結だから、各点 $t\in Y$ において $\sqrt{-1}\,\overline{\Omega(t)}A\Omega(t)<0$ である。よって $Y=Y_n=Y(A)$ である。

そこでこの場合は ϑ 函数の理論を用いると任意の $t\in Y$ に対して K_t の元はいつも X_t の近傍までのびる事が分る。

§3.

<u>Lemma 1.</u> F_1 を (l,p) 型, F_2 を (p,l) 型の行列とする。(ただし、$l\geqq p$)。このとき、

(l,l)型行列　$F_1F_2 - E^{(l)}$ の rank は　$l-p$ より小さくは ない。ただし　$E^{(l)}$ は l 次の単位行列を表わす。

証明）(l,l) 行列 F_1F_2 の固有方程式における1の重複度を q とおくとすうすると non-singular (l,l) 型行列 J があって、

$$JF_1F_2J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha_{q+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha_l \end{pmatrix}$$

となる。ただし $\alpha_i \neq 1$.

よって，$\operatorname{rank} J(F_1F_2 - E^{(l)})J^{-1} = \operatorname{rank}(F_1F_2 - E^{(l)}) \geqq l-q$.

そこで $q \leqq p$ を示せばよい。

今 $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots i$ とおくと，明らかに q 個のベクトル

$JF_1F_2J^{-1}e_i$　$(i=1,\cdots,q)$ は一次独立である。一方 F_2 は (p,l) 型だから　$q \leq p$ である。

Lemma 2. T を $(2n,2n)$ 型実行列 S を $(n,2n)$ 型行列とする。このとき，

$$\operatorname{rank} ST \geqq \frac{1}{2} \operatorname{rank} \begin{pmatrix} S \\ \bar{S} \end{pmatrix} T.$$

証明）行列の rank はその行列の定める linear map の image の次元である。T が real だから　ST の rank と $\bar{S}T$ の rank は一致しており　$\begin{pmatrix} S \\ \bar{S} \end{pmatrix} T : \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ の image は

$ST:\mathbb{C}^{2n}\to\mathbb{C}^n$ の image と $\bar{S}T:\mathbb{C}^{2n}\to\mathbb{C}^n$ の image の直和に入っているから $2\,\mathrm{rank}\,ST \geqq \mathrm{rank}\begin{pmatrix}S\\ \bar{S}\end{pmatrix}T$. Q.E.D.

次に $t_0\in Y_k$, $k>0$ とする。前に述べた事をまとめると、4つの行列 A, P, H_1, H_2 があって

(i) $\mathrm{rank}\,P=k$

(ii) $P\Omega(t_0)(H_1H_2-E^{(2n)})=0$

(iii) $P\Omega(t_0)H_1A(P\Omega(t_0)H_1)'=0$

(iv) $\sqrt{-1}\,\overline{P\Omega(t_0)H_1}\,(P\Omega(t_0)H_1)'<0$.

逆にもし $t\in Y$ に対して H_1, H_2, P があって (i) $\mathrm{rank}\,P=k$, (ii) $P\Omega(t)H_1H_2=P\Omega(t)$ であれば $P\Omega(t)$ の $2n$ 個の列ベクトルは $\mathbb{C}^k$ の rank $2k$ の discrete free group を生成しさらに $P\Omega(t)H_1$ の $2k$ 個の列ベクトルがこの group の free base を与えている。

そこで、3つの行列 H_1, H_2, A を fix する。また

$Y(H_1H_2)=\{t\in Y\mid$ 上の条件 (i) と (ii) を(某tで)みたす (k,n) 行列 P があるす$\}$,

$Y(H_1H_2,A)=\{t\in Y\mid$ 上の4つの条件 (i)~(iv) を(某tで)みたす (k,n) 行列 P が存在するす$\}$ とおく。

今 Π を型 (k,n) の行列の全体のなす $k\times n$ 次元のベクトル空間とし $\Pi\times Y$ 上の方程式 $P\Omega(t)(H_1H_2-E^{(2n)})=0$, $t\in Y$ $P\in\Pi$, の解を $\mathcal{P}$ とおき、$\mathcal{P}$ から Y への natural proj を p とおく。

このとき $p^{-1}(t)$ は Π の vector subspace である。さらに $p^{-1}(t)$ の中に rank が k である行列が存在するための必十条件は

$$\operatorname{rank} \Omega(t)(H_1H_2 - E^{(2n)}) \leqq n-k$$

で与えられる。

<u>Proposition 1.</u> $Y(H_1H_2)$ は $\Omega(t)(H_1H_2 - E^{(2n)}) = n-k$ で与えられる Y の analytic subset で $\mathfrak{P} \mid Y(H_1H_2)$ は次元 k^2 の analytic vector bundle である。

さらに t_1 を $Y(H_1H_2)$ の一点, $P_0 \in p^{-1}(t_1)$ の rank k の matrix とすると, $p^{-1}(t_1)$ の任意の matrix P_1 に対して, (k, k) matrix L があって $P_1 = LP_0$ とかける。

証明) 行列 $\begin{pmatrix} \Omega(t) \\ \overline{\Omega(t)} \end{pmatrix}$ が各 $t \in Y$ で non-singular だから Lemma 1 と 2 を用いて $\operatorname{rank} \Omega(t)(H_1H_2 - E^{(2n)}) \geqq n-k$. である。よって $Y(H_1H_2)$ は $\operatorname{rank} \Omega(t)(H_1H_2 - E^{(2n)}) = n-k$ で与えられる。二番目の事柄は $p^{-1}(t_1)$ の次元が k^2 である事より明らか。

<u>Proposition 2.</u> $Y(H_1H_2A)$ は $Y(H_1H_2)$ の analytic subset である。

証明) t_1 を $Y(H_1H_2)$ の点とする。そうすると, t_1 の $Y(H_1H_2)$ での近傍 U と U での vector bundle $\mathfrak{P} \mid Y(H_1H_2)$ の正則な section $P(t)$ があって $\operatorname{rank} P(t) = k$, $t \in U$ と

なる。

このY上で方程式 $P(t)\Omega(t)H_1A(\overset{(t)}{\overline{P\Omega(t)H_1}})'=0$ を考える。

この式の解はYのanalytic subsetを決める。ところがこの集合は section $P(t)$ のとり方に関係しない。そこで

$N=\{t\in Y(H_1H_2)\mid$ 条件 (i) と (iii) をみたす $p^{-1}(t)$ の行列 P が存在する $\}$ とおけば N は $Y(H_1H_2)$ の analytic subset である。

今 $N_1, N_2, \cdots$ を N の connected components の全体とする。この各 N_i 上では Hermit 行列 $\sqrt{-1}\,\overline{P(t)\Omega(t)}H_1(P(t)\Omega(t)H_1)'$ の符号数は一定である。よって $Y(H_1H_2A)$ は $Y(H_1H_2)$ の analytic subset である。 Q.E.D.

Theorem 1. $n>j\geq 0$ なる整数 j に対して $Y_j\neq\phi$ とする。このとき $n\geq q>j$ なる整数 q に対して $Y_q\cup Y_{q+1}\cup\cdots\cup Y_n$ は Y の thin analytic set の高々可附番個の union である。

証明) $t_0\in Y_k$, $(k\geq q)$ とすれば $t_0\in Y(H_1H_2A)$ なる行列 H_1H_2A がある。$Y_q\cup Y_{q+1}\cup\cdots\cup Y_n$ はこの様な集合の高々可附番個の union である。

§3. 今 $p=\inf_{t\in Y} \mathrm{td}(K_t)$ とおく。 Theorem 1 により、

Y_pはYの第2類集合である。よって（　$2n, 2k$）型行列 H_1 ($2k, 2n$)-行列 H_2，($2k, 2k$)-行列 A があって $Y = Y(H_1 H_2, A)$ となる。そこで この様な行列の system $H_1 H_2, A$ を一つ fix しておく。前にのべた様にこの $H_1 H_2, A$ によりY上での p^2 次元の analytic vector bundle $\mathfrak{P}$ が得られる。

$t_0 \in Y$ とする。このとき，t_0 の近傍 U と U 上での $\mathfrak{P}$ の section $P(t)$ で rank $P(t) = p$, ($\forall t \in U$) なるものがとれる。この section $P(t)$ を用いて丁度周期行列が $P(t)\Omega(t)H_1$ となる U 上の abelian variety の complex analytic family X'_U と

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

から決る $X|U$ から X'_U への holomorphic map σ_U が決る。

さらにこの section $P(t)$ を変えても X'_U と σ_U は変らず ただ座標系 $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}$ が変化するだけである。よって

次の定理をうる。

Theorem 2. $p = \inf_{t \in Y} \mathrm{td}(K_t)$ とおく。このとき Y上での p次元の complex analytic vector bundle $\mathfrak{B} \to Y$ と $\mathbb{C}^n \times Y$ から $\mathfrak{B}$ への holomorphic map $\bar{\sigma}$ があって $\bar{\sigma}$ は local には

$(z, t) \longrightarrow (P(t)z, t)$ の形にかけ（ここで $P(t)$ は $\mathfrak{P}$ の section），さらに $P(t)\,\Omega(t)$ は $\mathfrak{B}$ の discontinuous な abelian group G' を与え，factor space $\mathfrak{B}/G'$ は Y 上の abelian variety の family をなしている。

さらに σ から natural に X から $\mathfrak{B}/G'$ への holomorphic map σ' があって

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & X' = \mathfrak{B}/G' \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

は commutative になる。

<u>Corollary 1.</u> K_t' を K_t の元で X_t の近傍の有理型函数に拡張出来るもの全体のなす部分体とすると，

(a) K_t' の超越次数は $\inf_{t\in Y} td(K_t)$ に等しい。

(b) K_t' は K_t 内で代数的に閉じている。

<u>Corollary 2.</u> 今 $Y_0 = \phi$ かつ $Y_n \neq Y$ とする。この時 family $X \rightarrow Y$ の member である abelian variety は 'singular' である。