数理解析研究所講究録
29巻 1967年 53-60

Fiber 上で与えられた有理型函数のその近傍への拡張について.

名市大 教養部 岡野 節

§1, 序.

ある空間の細い集合上で与えられた解析函数, 有理型函数又は form 等はどの程度その細い集合を含む近傍までのばす事が出来るだろうか。

ここでは complex analytic な compact fiber をもつ fiber space の一つの fiber 上で与えられ有理型函数の拡張について考える。

今, X と Y を normal で connected な complex space とし, π を X から Y の上への fiber が irreducible になる proper な正則な写像とする。一つの fiber $\pi^{-1}(t)$ 上の有理型函数は必ずしもその近傍の有理型函数の $\pi^{-1}(t)$ への制限とは限らない。この事は X や Y や π に好ましい条件, たとへば regularity などの条件を与えも変らないもっと本質的な障害がある事は torus の family の例から推さつされる。

ここでは単に次の様な問題に一つの解答を与えるにすぎない。

「一つの fiber X_t の近傍の有理型函数の制限になっている X_t 上の有理型函数に depend している X_t 上の有理型函数は必ず X_t の近傍にまでのばせるだろうか？」

この問題に対して次の様な形で答える事が出来る。

「$f_1, f_2, \cdots, f_s$ を X 上の有理型函数とする。このとき Y の部分集合 $Y_1 = \{t \in Y \mid X_t$ 上の有理型函数で $f_1, \cdots f_s$ の X_t 上の制限に depend しているものは必ず X_t の近傍までのばせる$\}$ を考えれば $Y - Y_1$ は Y の nowhere dense な集合である。」

さらにこの事を用いれば次の事が容易に求められる。

今

$K_t =$ fiber X_t 上の有理型函数全体のなす体。

$K_t' =$ K_t の元で X_t の近傍の有理型函数の X_t 上の制限になっている全体のなす K_t の部分体。

とおくと、

「$Y_0 = \{t \in Y \mid K_t'$ は K_t で代数的に閉じていない$\}$ は Y の nowhere dence な集合である」。

§2. Fiber spaceと有理型函数についての2,3の注意

今V, Wをcomplex spaceとし、σをVからWへのproperな正則写像とする。このときσのfiberのconnected componentの全体の集合V'に次の条件をみたすtopologyとcomplex structureを入れる事が出来る。

(1) $V \xrightarrow{\sigma_1} V'$ 及び $V' \xrightarrow{\sigma_2} W$ はともに正則写像である。

(2) Zを任意のcomplexとし、τをV'からZへのmapで $\tau \circ \sigma_1 : V \xrightarrow{\sigma_1} V' \xrightarrow{\tau} Z$ がholomorphicならτは必ずholomorphicである。

この時得られる $V \xrightarrow{\sigma_1} V' \xrightarrow{\sigma_2} W$ をわれわれはStein分解とよんでいる。([6])。

<u>Prop 1.</u> Xをcompactなcomplex space $f_1, f_2, \cdots, f_s$をX上の有理型函数とする。Xから$\mathbb{P}^s \left(= \overset{s}{\times} \mathbb{P}^1\right)$への$\overset{\text{mero}}{\text{map}}$ $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_s$のグラフを$G$, Gのnormalizationを$\hat{G} \xrightarrow{\mu} G$とし、$\hat{G} \xrightarrow{h_1} H \xrightarrow{h_2} \mathbb{P}^s$を$\hat{G} \xrightarrow{\mu} G \to \mathbb{P}^s$のStein分解とする。

今gを$f_1, \cdots, f_s$にdependするX上の有理型函数とすればH上の有理型函数g'があり $g = g' \circ h_1^{-1} \circ \mu^{-1} \circ \check{F}^{-1}$ となる。ただし$\check{F}$はGからXへのnatural projを表わす。

$$\begin{tikzcd}
\hat{G} \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\mu"'] & H \arrow[r, "h_2"] \arrow[dd, dashed, "g'"] & \mathbb{P}^s \\
G \arrow[d, "\check{F}"'] & & \\
X \arrow[r, "g"] & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

<u>Prop 2.</u> V を complex projective space $\mathbb{P}_e$ の analytic subspace (Chow の定理により algebraic) とするとき，V 上の有理型函数は $\mathbb{P}_e$ の有理函数の V への制限である。

<u>Prop 3.</u> X を normal な complex space π を X から complex space Y への proper holomorphic mapping とする。このとき，集合 $\{t \in Y \mid \pi^{-1}(t)$ は locally irreducible でない$\}$ は Y の nowhere dense set である。

prop 3 の証明は Thimm の方法 [P], [g] によって示される。なお，この証明より単に nowhere dense set である事にとどまらず ある種の解析性をもった集合となっている事が分る。証明は少し長くなるので省略。

<u>Theorem</u> (Grauert and Remmert [h]).

X, Y を complex space とし，σ を X から Y と proj space $\mathbb{P}_s$ の直積 $\mathbb{P}_s \times Y$ への discrete fiber をもつ proper (hol) mapping とする。今 U を Y の relatively compact な Stein open set とすれば $X|U$ は $\mathbb{P}_s \times U \times \mathbb{P}_N$ の subspace と考えられる。ここに N はある自然数である。

証明） $\mathcal{O}_X$ を X の Structure sheaf $\mathcal{O}$ を $\mathbb{P}_0 \times Y$ の structure sheaf とすれば $\pi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{H}$ は $\mathcal{O}$－coherent－Algebra である。そこで [元] の結果を用いれば自然数 n が大なり $\mathcal{H} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^{(n)}$ は $\mathbb{P}_0 \times U$ 上では global section $f_0, \cdots f_N$ で generate される。

この section $f_0, \cdots, f_N$ を用いて $X|U$ の $\mathbb{P}_0 \times U \times \mathbb{P}_N$ への うめ込みが得られる。

§3. Fiber 上の有理型函数。

以後われわれは次の条件をみたす complex fiber space $X \xrightarrow{\pi} Y$ を fix に考える。

(1) X, Y は normal かつ connected complex space,

(2) π は X から Y への nowhere degenerated な（[m]の意味で）proper surjective な正則写像。

(3) 各 fiber $\pi^{-1}(t)$ は irreducible である。

<u>Lemma</u> $f_1, f_2, \cdots, f_l$ を X 上の有理型函数とする。今一点 t に対して. $f_1, f_2, \ldots f_l$ の fiber X_t 上の制限 $f_{1,t}, f_{2,t}, \cdots, f_{l,t}$ が（X_t 上で）独立であるならば t に近い t' でも $f_{1,t'}, \cdots, f_{l,t'}$ は $X_{t'}$ 上で independent である。

<u>Theorem I.</u> $f_1, f_2, \cdots, f_\ell$ を X 上の有理型函数，σ を X から $\mathbb{P}^s \times Y$ への meromorphic map $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_\ell \times \pi$，$G$ を σ のグラフ．$\tilde{G} \xrightarrow{\mu} G$ を G の normalization とする。今 $t \in Y$ に対して，

(I) $\tilde{G}$ の X_t 上の制限 $\tilde{G}|X_t$ が locally irreducible。

とする。このとき，t の近傍 U があって，X_t 上の有理型函数 g で $f_{1,t}, \cdots, f_{\ell,t}$ に depend しているものは必ず $\pi^{-1}(U)$ の有理型函数の制限になる。

(証明) 今 G_t を $f_{1,t} \times f_{2,t} \times \cdots \times f_{\ell,t} : X_t \to \mathbb{P}^s$ のグラフとし，$\tilde{G}_t \xrightarrow{\mu_t} G_t$ を G_t の normalization とする。条件(I)から $\tilde{G}|X_t$ と $\tilde{G}_t$ が weakly biholomorphic である事が示される。

今 $\tilde{G} \xrightarrow{h_1} H \xrightarrow{h_2} \mathbb{P}^s \times Y$ を $\tilde{G} \xrightarrow{\mu} G \to \mathbb{P}^s \times Y$ の Stein factorization $\tilde{G}_t \xrightarrow{h_{1,t}} H_t \xrightarrow{h_{2,t}} \mathbb{P}^s$ を $\tilde{G}_t \to G_t \to \mathbb{P}^s$ の Stein factorization とすれば $H_t = h_1(\tilde{G}|X_t)$ と考えられる。

今 g を X_t の有理型函数で $f_{1,t}, \cdots f_{s,t}$ に depend しているものとする。Prop 1 により $H_t = h_1(\tilde{G}/X_t)$ 上での有理型函数 g' があり，$g = g' \circ h_{1,t} \circ \mu^{-1} \circ \check{F}_t^{-1}$ となる。ただし ここで $\check{F}_t$ は G_t から $\mathbb{P}^s$ への proj とする。

そこで $\mathfrak{V}$ を t を含む Y の Stein neighborhood にとれ。

$H \longrightarrow \mathbb{P}^s \times Y$ は finite map であるから §2 の Theorem が

使え $H|\mathfrak{V} \subset \mathbb{P}^s \times \mathfrak{V} \times \mathbb{P}_N$ と考えられる。それにともなって

$H_t \subset \mathbb{P}^s \times t \times \mathbb{P}_N$ である。そこで Prop 2 により $\mathbb{P}^s \times t \times \mathbb{P}_N$

の有理型函数 g'' があり $g''|H_1 = g'$ となっている。この g''

を $\mathbb{P}^s \times \mathfrak{V} \times \mathbb{P}_N$ まで平行にのばした有理型函数を $\tilde{g}''$ とせよ。そこに $\tilde{g}' = \tilde{g}''|H|\mathfrak{V}$ とおけ。そうすれば

$\tilde{g} = \tilde{g}'' \circ h_1^{-1} \circ \mu^{-1} \circ \check{\nu}$ は $X|\mathfrak{V}$ 上の有理型函数で

$\tilde{g}|X_t = g$ である。ここで $\check{\nu}$ は G から X への natural

projection を表わす。 Q. E. D.

<u>Remark 1.</u> $\tilde{g}$ の作り方から次の事が云える。

$\mathfrak{V}$ 上の正則函数を係数とする $s+1$ 変数多項式

$$p(t)(X_0, X_1, \cdots X_s)$$
$$= P_g(t)(X_1 \cdots X_s)X^g + P_{g-1}(t)(X_1 \cdots X_s)X^{g-1} + \cdots$$

があり、$p(t)(\tilde{g}, f_1, \cdots f_s) \equiv 0$ on $\mathfrak{V}$ であり、

かつ $P_g(t)(f_1 \cdots f_s) \not\equiv 0$ かつ $p(t_0)(X_0 \cdots X_s) \neq 0$

となる。つまり g は X_t 上では $f_{1,t}, \cdots f_{s,t}$ に depend

しているから g は $f_{1,t}, \cdots f_{s,t}$ に代数的に depend

しているが $\tilde{g}$ を $\mathfrak{V}$ 上に analytic に depend した意味で $f_1 \cdots f_s$

に algebraic に depend している。

Corollary $f_1, f_2, \cdots f_\nu$ を X 上の有理型函数。$t \in Y$ に対し、$K_t''(f)$ を（体 $C(f_{1,t}, \cdots f_{\nu,t})$ の体 K_t 内での algebraic closure とする。このとき集合
$\{t \in Y \mid K_t''(f) \not\subset K_t\}$ は Y の nowhere dense set である。

（証明）Theorem I の条件 (I) をみたさない点 $t \in Y$ は Prop 3 により Y の nowhere dense set をである。よって直ちに Cor は証明される。

今、$Y(k) = \{t \in Y \mid \exists U \ni t$ such that $\forall t' \in U$,
tr. deg of $K'_{t'} = k\}$ とおく。

そうすると $Y(0) \cup Y(1) \cup \cdots \cup Y(m)$ は Y の dense open set をなしている。そこで、Theorem I の Cor とあわせて

Theorem II $Y_0 = \{t \in Y \mid K_t'$ は K_t で代数的に閉じていない$\}$ とおけば Y_0 は Y で nowhere dense である。

さらに Theorem I と同じ方法で次の事が云える。

Theorem III tr. degree of K_t' = tr. degree K_t ならば $K_t' = K_t$ である。

Remark Theorem I では条件 (I) を必要とした。この事はたとへば f が X 上で有理型で X_t 上のある点 x で singular であっても その X_t への制限 $f_{,t}$ は x では正則になりうるという事実等によるものと思われる。