数理解析研究所講究録
29巻 1967年 42-52

Banach解析空間の理論：
その変形理論への応用

名古屋市大　岩橋亮輔

A. Douady [15] によって Banach 解析空間が導入され，倉西[43]の理論が見直される（倉西[44]）と共に，与えられた（有限次元の）解析空間のコンパクトな部分解析空間の全体が解析空間の構造を持つことが示された（$\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ に対する Hilbert scheme の一般化，Grothendieck [i]）．これらの結果は最終的には Banach 解析空間を用いずに述べられるが，Douady は今迄複素解析で重要な役割を果して来た Weierstrass の準備定理，解析的集合の表示，岡の連接性定理などの根幹に横わるものを洞察して Banach 解析空間の導入に踏み切ったものと解される（詳述する余裕がないが連接解析層に対する‘旨い’多重柱状集合の存在を示すことが主な動機であろう）．

§1. Banach解析多様体，Banach解析空間

以下 Banach 空間は複素 Banach 空間とする．E, F を Banach 空間，U を E の開集合とするとき，解析関数 $f : U \to F$ の定義は通常の Weierstrass 式を採用する．すなわちすべての $a \in U$

に対してある $r>0$ が存在して，$\|x\|\leqq r$ で $f(a+x)=\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ が成立するとき，f を U で解析的という．ここで $f_n: E\to F$ は n 次の斉次多項式写像（連続な n 重線型かつ対称な写像 $\tilde{f}_n: E\times\cdots\times E\to F$ があって $f_n(x)=\tilde{f}_n(x,\cdots,x)$）で，$\sum_{n\geq 0} \sup_{\|x\|\leqq r}\|f_n(x)\|<+\infty$ 解析的な写像（＝関数）の合成はまた解析的だから，Banach空間の開集合を対象とし，それらの間の解析写像を射とする圏 $\mathcal{B}_0$ が考えられる．$\mathcal{B}_0$ を用いて，通常のようにBanach 解析多様体，それらの間の解析写像が定義される．

モデルの圏 $\mathcal{B}_0$ を拡げるとBanach 解析空間が定義される．まずBanach空間 E, F を有限次元，W を E の開集合，$W\xrightarrow{f}F$ を解析的とする．E, F に基底を定めると f は有限個の $f_i: W\to\mathbb{C}$ で定義される．$X=f^{-1}(0)$ は f_i の共通零点，いわゆる解析的部分集合である．f_i の各点での芽によって生成されるイデアルの連接層 $\mathcal{J}$ を用いて $\mathcal{O}_X=(\mathcal{O}_W/\mathcal{J})|X$（$\mathcal{O}_W$ は W での解析関数（$\mathbb{C}$-値）の芽の層）によって X に解析空間の構造がきまる．[[18]] E, F が一般のときはこれに準ずるが，層 $\mathcal{O}_X$ を与えるより細かい構造として次のような関手 Φ_X を定義する．W から $U\in\mathcal{B}_0$ への解析写像の芽の層を $\Phi_W(U)$ とする．U がBanach空間 G の開集合のとき，$\mathcal{L}(F,G)$ を F から G への連続な線型写像のなすBanach 空間として，写像 $\Phi_W(\mathcal{L}(F,G))$

$\to \Phi_W(G)$: $(V \xrightarrow{\phi} \mathcal{L}(F,G)) \mapsto (V \xrightarrow{\psi} G)$, $\psi(x) = \phi(x)(f(x))$ ($x \in V$, VはWの開集合) を考える. この像を$N_W^f(G)$とすれば, $f(x)=0$ ($x \in X$) だから $N_W^f(G)|X = 0$. $\Phi_W(U)$は$\Phi_W(G)$の部分層と考えられるから層$N_W^f(G)$によって同値関係が定義される. 商層を$\Phi_X(U)$とする. かくして関手$\Phi_X : \mathcal{B}_0 \to$ {X上の層} が定義され, 同時に$\Phi_X(U)$から写像芽 $X \to U$ のなす層の部分層$\Phi'_X(U)$の上への準同型も得られる. $\Phi_X(U)$の切片が分れば, $\Phi'_X(U)$の切片がきまるが, 逆は成立しない(有限次元のときでも $\mathcal{O}_X = \Phi_X(\mathbb{C})$ が巾零元を持てば成立しない). このように$W \xrightarrow{f} F$からモデル(X, Φ_X)を作り, モデル間の射を定義することにより, $\mathcal{B}_0$を含む圏$\mathcal{B}$が得られる. 多様体のときと同様にBanach解析空間が$\mathcal{B}$を用いて定義される.

Banach解析空間の射 $h : (X, \Phi_X) \to (Y, \Phi_Y)$ は台の間の連続写像 $X \xrightarrow{h_0} Y$ と関手の間の射 $h_0^* \Phi_Y \xrightarrow{h_1} \Phi_X$ とで与えられる. このとき写像h_0は解析的であるという. (X, Φ_X)がBanach解析多様体のとき, hはh_0できまる. $\mathcal{O}_X = \Phi_X(\mathbb{C})$, Xが有限次元のとき$(X, \mathcal{O}_X)$は解析空間である. モデル(X, Φ_X), $(X', \Phi_{X'})$が$W \xrightarrow{f} F$, $W' \xrightarrow{f'} F'$で定義されるとき, 射$(X, \Phi_X) \xrightarrow{h} (X', \Phi_{X'})$の$x \in X$における芽は解析写像$g : W \to W'$の芽からきまる. 微分$d_x g : E \to E'$が完全連続(=コンパクト)のとき, hはxでコンパクトという. Banach解析空間がある

点の近傍で有限次元であるためには恒等射がその点でコンパクトであることが必要十分である.

Banach 解析多様体の例として Douady の理論で重要な役割を演ずる Banach 空間のグラスマンがある. E を Banach 空間とする. 閉かつ閉補空間を持つ部分空間 F (E の直部分空間という) の全体 $\mathcal{G}(E)$ に Banach 解析多様体の構造を与えることが出来る. $G \in \mathcal{G}(E)$, $\iota_G : G \hookrightarrow E$, $U_G = \{F \in \mathcal{G}(E) \mid E = F \oplus G\}$ とする. $F \in U_G$ に対して $p_{F,G}$ を分解 $E = F \oplus G$ に対する G への射影とする. $\phi_{F,G} : U_G \longrightarrow \mathcal{L}(F, G) : F' \longmapsto \lambda = p_{F,G} \circ \iota_{F'}$ とすると, $(\iota_F - \iota_G \circ \lambda) : F \simeq F'$. 逆に任意の $\lambda \in \mathcal{L}(F, G)$ に対して $\iota_F - \iota_G \circ \lambda$ は E のある自己同型の F への制限. したがってある $F' \in U_G$ に対して $F \simeq F'$ を与える. すなわち $\phi_{F,G}$ は 1 対 1, 上への対応である. すべての U_G が開集合, $\phi_{F,G}$ が同相写像となる $\mathcal{G}(E)$ の位相が確定する. $\mathcal{G}(E)$ は $\phi_{F,G} : U_G \longrightarrow \mathcal{L}(F, G)$ を局所座標とする Banach 解析多様体である.

E が実 2n 次元のベクトル空間のとき, 複素構造 φ をきめると, $\mathbb{C} \otimes E = F \oplus G$ と分解される(F は $\mathbb{C} \otimes E$ から (E, φ) への基準写像の核で, F, G 共に n 次元). したがって E 上の複素構造の全体 $\Phi(E)$ はグラスマン $\mathcal{G}(\mathbb{C} \otimes E)$ によって径数化され, 解析多様体となる. (E, φ_0) が与えられたとき, $F_0 = F_{\varphi_0}$,

$G_0 = G_{\varphi_0}$ とする．φ_0 に近い φ に対して E_φ は $u_\varphi \in \mathcal{L}(F_0, G_0)$ のグラフである．$p' : (E, \varphi_0) \simeq F_0$, $p'' : (E, \varphi_0) \simeq G_0$ を自然な同型，反同型とする．$\varphi \mapsto \omega_\varphi = p''^{-1} \circ u_\varphi \circ p'$ (ω_φ は (E, φ_0) の $\mathbb{C}$ 反線型写像）を φ_0 の近傍での $\Psi(E)$ の局所座標とすることが多い．恒等写像 $(E, \varphi_0) \longrightarrow (E, \varphi)$ は $\mathbb{R}$ 線型であり，$f' + f''$ （f' は $\mathbb{C}$ 線型，f'' は $\mathbb{C}$ 反線型）と分解される．$\omega_\varphi = f'^{-1} \circ f''$]．

その他の例は次の § に出て来る．

§ 2．コンパクトな複素多様体に対する規制量問題

V_0 をコンパクトな $\mathbb{C}$ 解析多様体，V を底の $\mathbb{R}$ 解析多様体，φ_0 を複素構造とする．V の各点 x に対して，§ 1 の終に述べたように $\varphi_0(x)$ で定義される $\Psi(T_x(V))$ の局所座標を考えると，φ_0 に近い V 上の $\mathbb{R}$ 解析的な概複素構造 ψ には $\mathcal{T}(V_0)$ の $\mathbb{C}$ 反線型な自己同型，すなわち $(0, 1)$ 型の $\mathcal{T}(V_0)$ 値微分形式 ω_ψ が対応する．ψ が積分可能（ある複素構造から来る）$\Longleftrightarrow$ $\omega = \omega_\psi$ が $d''\omega - [\omega, \omega] = 0$ の解．このときの複素構造は一意的に定まる．

$\Psi(V) = \{(x, \psi_x) \mid x \in V,\ \psi_x \in \Psi(T_x(V))\}$ は V の上の $\mathbb{C}$ 解析多様体である．S を $\mathbb{C}$ 解析空間とするとき，S を径数空間とする V 上の $\mathbb{R}$ 解析的な概複素構造を考えることが出来る．

すなわち各ファイバー上で$\mathbb{C}$解析的な，Vの上の$\mathbb{C}$解析空間の$\mathbb{R}$解析的射$S \times V \to \Psi(V)$をいう．Sを径数空間とする(p, q)型の$T(V_0)$値微分形式，演算d''，$[\ ,\ ]$が同様に定義される．積分可能条件も同様な形で述べられる．このような積分可能な概複素構造ψはただ一つの複素構造から来る．これを同じψで表わせば，射影$X = (S \times V, \psi) \longrightarrow S$は滑らかな射で，ファイバーは$X$の$\mathbb{C}$解析的部分空間である．

コンパクトなC^r多様体Mから$\mathbb{C}$解析多様体V_0へのC^r写像全体$C^r(M, V_0)$はBanach解析多様体の構造を持つ．接空間$T_f C^r(M, V_0)$はバンドル$f^*T(V_0)$のM上のC^r切片のなすBanach空間である．一般化して，Xを$\mathbb{C}$解析空間Sの上の滑らかな$\mathbb{C}$解析空間とするとき，MからXの一つのファイバーへのC^r写像全体$C^r(M, X)$は単純なSの上のBanach解析空間である．すなわち$M \xrightarrow{f} X_s$はsのSにおける近傍とBanach空間の開集合との直積にS-同型な近傍を持つ．またEをMの上の$\mathbb{C}$解析多様体とするとき，EのC^r切片の全体はBanach解析多様体をなす．特に，MがC^{r+1}多様体のとき，M上のC^r概複素構造の全体$\Psi^r(M)$はBanach解析多様体である．MからXの一つのファイバーの上へのC^{r+1}同相写像の全体$\mathrm{Diff}^{r+1}(M, X)$は$C^{r+1}(M, X)$の開集合をなし，$(M \xrightarrow{f} X_s) \longmapsto f^*\varphi_s$（$\varphi_s$は$X_s$の複素構造）によってBanach解析多様体の間の解

析写像 $\mathrm{Diff}^{r+1}(M, X) \longrightarrow \Psi^r(M)$ が得られる. 以上で C^r の代りに Sobolev の H^r を用いても同様である. このときには r は任意の実数でよい. しかも以下の議論にも用いられる.

$V_0=(V, \varphi_0)$ を前のようにコンパクトな $\mathbb{C}$ 解析多様体とする. ${}^r\Omega^{p,q}$ を V_0 上の (p,q) 型の $T(V_0)$ 値 C^r 微分形式のなす Banach空間とする. φ_0 によって定義される局所座標で φ_0 の $\Psi^r(V)$ における近傍が ${}^r\Omega^{p,q}$ における 0 の近傍に写る. 積分可能な C^r 概複素構造の全体 $\Phi^r(V)$ は $\theta(\omega)=0$ で定義される Banach解析空間である. ここで $\theta(\omega)=d''\omega-[\omega,\omega]$. θ の微分は $d''=d_1'': {}^r\Omega^{0,1} \to {}^{r-1}\Omega^{0,2}$. $r>1$ が整数でなければ(以下そう仮定) $d_0'': {}^r\Omega^{0,0} \to {}^{r-1}\Omega^{0,1}$ および d_1'' は Banach 準同型(像が閉). V_0 に $\mathbb{R}$ 解析的エルミット計量を入れて δ_1', δ_2' を d_0'', d_1'' の双対作用素とすると, ${}^r\Omega^{0,1} = \mathrm{Im}\, d_0'' \oplus \mathrm{Ker}\, \delta_1''$, ${}^{r+1}\Omega^{0,2} = \mathrm{Im}\, d_1'' \oplus \mathrm{Ker}\, \delta_2'$. 陰関数定理は Banach空間でも成立するから, $\Sigma = \theta^{-1}(\mathrm{Ker}\, \delta_2')$ は 0 の近傍で ${}^r\Omega^{0,1}$ の Banach解析部分多様体で $\Phi^r(V)$ を含み, $T_0(\Sigma) = \mathrm{Ker}\, d_1''$. $H = \Sigma \cap \mathrm{Ker}\, \delta_1'$ とおけば, 0 の近傍で H は Σ の有限次元 $\mathbb{C}$ 解析部分多様体で, $T_0(H)$ は $(0,1)$ 型の $T(V_0)$ 値の調和微分形式のなすベクトル空間で $H^1(V_0, \Theta)$ に等しい. ここで Θ は V_0 上の $\mathbb{C}$ 解析的なベクトル場の芽の層である. H はまた $\delta'(d''\omega-[\omega,\omega])+d''\delta'\omega = 0$ で定義される. 積

円型微分作用素の理論が応用出来て，すべての $\omega \in H$ が $\mathbb{R}$解析的であること，$H \hookrightarrow {}^{r}\Omega^{0,1}$ によって H を径数空間とする V 上の概複素構造が得られることが分る．$T_0(H)$ が $\theta(\omega)=0$ で定義される H の部分空間 S の 0 における Zariski 接空間であること，$S \hookrightarrow H$ によって S を径数空間とする積分可能な，V 上の概複素構造で $\mathbb{R}$解析的なものが定義されることなどが分る．そのような構造を $S \times V$ に与えて X で表わす．$\mathbb{C}$解析空間 X は基点をきめた空間 (S, s_0)，$s_0=0$，の上の滑らかかつコンパクトな解析空間である．$i: V_0 \xrightarrow{\simeq} X_0$ が与えられている．倉西[43]の基本定理は

定理　すべての基点をきめた解析空間 (S', s_0')，すべての S' の上の滑らかかつコンパクトな解析空間 X'，すべての $i': V_0 \simeq X_0'$ に対して，s_0' の S' における近傍 S''，射 $f: (S'', s_0') \to (S, s_0)$ (一意的とは限らない) および S''-同型 $g: X'|S'' \xrightarrow{\sim} f^*(X)$ が存在して，$g_{s_0'} = i \circ i'^{-1}$.

証明は略すが，Banach 解析多様体の接空間が Banach 空間であるから，楕円型微分作用素の理論で用いられる論法を用いて有限次元的な所に導いて行ける．(Douady [15])

§3. 解析空間のコンパクトな解析部分空間に対する規制量の問題．

有限次元解析空間を台と同じXで表わす．与えられたXのすべてのコンパクトな解析部分空間の集合$\mathfrak{H}$に適当な条件をみたす解析空間の構造を定義したい．$\mathcal{O}_X = \Phi_X(\mathbb{C})$ はXを記述するのに十分である．以下 H. Cartan [1] に従って Douady [4] の結果を紹介する．

一般にSを解析空間とする．$s \in S$と共に変るXのコンパクトな解析部分空間Z_sがsについて解析的に変るとは次のような解析部分空間$Z \subset S \times X$が存在することをいう：

(i) すべての$s \in S$に対して，$Z_s \simeq p^{-1}(s)$．(pは射影：$S \times X \to S$のZへの制限)

(ii) $p : Z \to S$はコンパクトかつ平坦な射．

この定義は底の変換に対して不変である（$g : S' \to S$を解析空間の射とするとき，$Z_{g(s')}$は$s' \in S'$について解析的に変わる）。Douadyの問題は解析空間Xが与えられたとき，解析空間Sと解析部分空間$Z \subset S \times X$を求めて，射影$Z \to S$がコンパクトかつ平坦で，次の普遍的性質を(S, Z)が持つようにせよということになる．

(U) 射影$Z' \to S'$がコンパクトかつ平坦である対(S', Z')が与えられたとき，一意的に射$g : S' \to S$が存在して，$Z' = g^{-1}(Z)$

問題に解があれば，解は一意的に存在する同型を除いて一

意的に定まる．今，解があるとして(S, Z)とする．Xのコンパクトな解析部分空間Yを考え，S'として1点をとる．また$Z' = Y\ (= \{点\} \times Y)$とする．性質(U)によって$s \in S$が一意的に定まり$Z_s = Y$．すなわち，$S$の点$\longleftrightarrow \{X$のコンパクトな解析部分空間の全体$\}$．$S$は$X$のすべてのコンパクトな解析部分空間の集合に解析空間の構造を与えたものである．

実際に普遍解(S, Z)を持つことの証明は容易ではない

Douady [e] の内容は次の通りである．

1. Banach解析多様体：§1. に述べた以外にBanach多様体で知られていること（Dieudonné [d]，Lang [l] 等）の類似および補足．

2. Banach空間のグラスマン多様体：§1. で挙げた例$G(E)$の外に直単射，直全射のこと，直準同型のBanach解析多様体

3. Banach解析空間の概念：§1 で述べた通り．

4. Banach加群の部分加群のなすBanach解析空間：これは後に重要になる．ホモロジー代数でやることをBanach空間とその直準同型写像について行っている．

5. 空間$B(K)$：コンパクトな凸集合$K_i \subset \mathbb{C}^1$の直積Kの近傍で解析的な$\mathbb{C}$値関数のなす環$\mathcal{O}(K)$の連続関数環$C(K)$（これはBanach空間）での閉包を$B(K)$とする．同様にF値関数を考えて$B(K; F)$．以後の重要な概念の定義に出て

くる。

6. Banach 解析空間の有限次元柱状集合に対する定理A, B: H. Cartan の定理A, B の証明の本質を見極めた証明を与えている。

7. '旨い' 近傍の(存在)定理: 緒論で述べたように極めて応用性のある本質的な近傍の存在が示されている。

8. 超平坦 (anaplat) 層: 連接解析層が径数について解析的に変わることを定義に旨く入れている。

9. 存在定理: 上に説明した普遍解の存在を示す。より一般的に、$\mathcal{O}_X$ の代りに連接解析層 $\mathcal{E}$ を固定し、$\mathcal{E}$ の連接解析部分層で Supp $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ がコンパクトであるものの全体に解析空間の構造を入れている。

10. (応用) 射の空間: 古典的な方法で得られている定理の別証、新しい定理がある。