数理解析研究所講究録
33巻 1967年 131-146

バナッハ空間における最適制御問題

―バンバン制御に関する一つの考察―

（東大・理）増田久弥

§1. 序

lumped parameter system において，バンバン制御は，1つの興味ある性質である。最近 distributed parameter system の研究が盛んになりつつあるが，そこでは，集中系において成立していることが，分布定数系においても成立するかということが，問題意識の1つになっていると思われる。しからば，バンバン制御は，分布定数系に対して成立するか？。これは，次の例が示すごとく一般には否定される。

$$(1)\begin{cases}\partial u/\partial t = \Delta u + \alpha(t) f(x) & t \geq 0,\ x \in G \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,t) = 0 & \text{on } \partial G\end{cases}$$

ここで，$\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2$，$G$ は R^n の中のなめらかな境界をもつ有界領域 $(n \geq 2)$，$\alpha(t)$ は $|\alpha(t)| \leq 1$ なる t の可測函数，$\{\varphi_j\}$ を $-\Delta$ にディルクレイ条件をそなえた作用素の $L^2(G)$ における正規直交な完備系とすると $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^n \times \varphi_j(x)$ と定めた。

任意に $T > 0$ を与えよう。このとき T における系(1)にま

って支配される状態 $u(x,T)$ は，$\alpha(t)$ を $0 \leq t \leq T$ において，1意に定めてしまう。これを以下で示そう。もしこれが示されれば(1)に対してバンバン制御（時間最適問題における）は起りえぬことは容易にわかる。さて(1)の解は，

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}(u_0, \varphi_j)\varphi_j + \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)} \times$$

$$\times\ \alpha(s)(f, \varphi_j)\varphi_j\, ds$$

で与えられる。ここで λ_j は，φ_j に対応する固有値，$(\cdot,\cdot)$ は $L^2(G)$ のスカラー積を示す。任意の $T>0$ を固定したとき $u(x,T)$ が $\alpha(t)$ を $[0,T]$ で一意に定めることを示すには，

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^T \exp[-\lambda_j(T-s)]\,\alpha(s)\,(f,\varphi_j)\varphi_j\, ds = 0$$

から $\alpha(s)=0$ on $[0,T]$ がでればいい。これは，$\{\varphi_j\}$ の独立性と $(f,\varphi_j)\neq 0$ を考えに入れると，

$$\int_0^T \exp[-\lambda_j(T-s)]\,\alpha(s)\,ds = 0,\quad j=1,2,\cdots,\ \text{つまり}$$

(2) $\displaystyle\int_0^T \exp(\lambda_j s)\,\alpha(s)\,ds = 0$ と同値である。

$-\lambda_j$ は，Δ のディリクレイ条件をもつ作用素の固有値より次の漸近分布をもつ。（[1]，[2] をみよ）

$$\sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1 \sim K\lambda^{\frac{n}{2}} \quad (K = \text{正の定数})$$

$\lambda = \lambda_m$ とおけば，

$$\lambda_m \sim K' m^{\frac{2}{n}} \quad (K' = \text{正の定数})$$

をえる。仮定 $n \geq 2$ より

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{Re(\lambda_j)}{1+|\lambda_j|^2} \sim \frac{1}{K'} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{2}{n}}} = \infty .$$

故に，Szász の定理（[3] をみよ）より $\{\exp(\lambda_j s)\}$ は，$L^2([0,T])$ で closed である。かくして (2) より $\alpha(s) = 0$ on $[0,T]$ をえる。

次に，

$$(3)\quad \begin{cases} \partial^2 u/\partial t^2 = \Delta u + \alpha(t) f(x) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \\ u(x,t) = 0 \quad \text{on } \partial G \end{cases}$$

を考える。この場合，$n > 2$ のとき $\forall T$ を固定したとき，その時刻における系 (3) によって支配される状態 $u(x,T)$ は，$\alpha(t)$ を $[0,T]$ で一意に定めてしまう。$n = 2$ のとき，$0 < T < 2\pi$ ならば，同様の

事が成立する。上の例から容易にわかる通り、バン・バン Principle は成立するわけでは一般にない。しかし任意の $T > 0$ と任意の $x = x(t)$ を与えたとき、(1) 又は (2) の解を、$\alpha_j(t)$ ($|\alpha_j(t)| = 1$ on $[0, T]$) を適当にとればそれに対応する時刻 T における (1) 又は (2) で支配される系の状態 $u(x, T; \alpha_j)$ によって近似することができる。これを示すのがこの報告の目的である。

記号

X_0 ; 反射的且可分離的バナッハ空間,

X_1 ; バナッハ空間,

$\mathfrak{V}$; X_0 の中の有界閉凸な閉集合,

$\hat{\mathfrak{V}}$; $\mathfrak{V}$ の端点の全体,

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{V}) = \left\{ u(s) ;\ [0, T] \text{ 上で定義された可測函数で } u(s) \in \mathfrak{V} \text{ for } s \in [0, T] \right\}$$

$K(t, s)$; $0 \leq s \leq t \leq T$ 上で定義された s について強連続な X_0 から X_1 への有界作用素,

$$\Omega(t) = \left\{ \int_0^t K(t, s) u(s)\, ds ;\ u(s) \in \mathfrak{F}(\mathfrak{V}) \right\}$$

$$\Omega^0(t) = \left\{ \int_0^t K(t, s) u(s)\, ds ;\ u(s) \in \mathfrak{F}(\hat{\mathfrak{V}}) \right\}$$

定理

(i) $\Omega(t)$ は X_1 の中で有界，凸，閉集合

(ii) $\Omega(t)^0$ の強閉包 $= \Omega(t)$

例えば，系(1)においては $X_0 \equiv L^2([0,T])$，$X_1 \equiv L^2(G)$

$U \equiv \{\alpha(t);\ \alpha(t)$ は可測且 $|\alpha(t)| \leq 1$ $[0,T]$ 上$\}$

$\hat{U} \equiv \{\alpha(t);\ \alpha(t) \in U$ 且 $|\alpha(t)| = 1$ $[0,T]$ 上$\}$

$K(t,s)\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j(t-s)}(f, \varphi_j)\alpha(s)\varphi_j$ である。

又 attainable set $\Omega(t)$ の中に制御函数として，$|\alpha(t)| = 1$ なるものにかぎったとき，$\Omega(t)^0$ は $L^2(G)$ の位相で $\Omega(t)$ の中に，稠密にある。又上の例の場合，$\Omega(t)$ の端点全体と $\Omega(t)^0$ は一致するから，$\Omega(t)$ の中，その端点が dense にある。

§2．幾つかの補題

X_0 は，分離的より，次の如き，$\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \hat{U}$ が存在する。

$\{a_j\}$ の閉包 $\supset \hat{U}$。$U_N = \{a_j;\ j=1,2,\cdots,N\}$ の凸包とする。$U_N \equiv \mathrm{co}\{a_j;\ j=1,2,\cdots,N\}$

U_N は，X_0 の中（特に U の中）に包まれる有界凸な閉集合である。

補題1

(4) $\mho = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mho_j$ の閉包 $(= \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \mho_j})$.

証明. 分離的で反射的バナッハ空間X_0の中で$\mho$は, 有界な凸な閉集合であるから, 弱コムパクトである。クラインーミルマンの定理によって$\mho$は, $co\hat{\mho}$の弱閉と一致する。X_0は, 反射的より, $co\hat{\mho}$が凸であることを考えに入れれば, $\mho =$ $co\hat{\mho}$の強閉包

それ故に,

(5) $\mho \subseteq \overline{co\overline{\{a_j ; j=1,2,\cdots\}}}$.

他方:

(6) $\mho \supseteq \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \mho_j} = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} co\{a_i : i=1,2,\cdots,j\}}$

をえる。それ故に, 任意の$\varepsilon > 0$と任意の$\overline{co\overline{\{a_j ; j=1,\cdots\}}}$の元$a$に対して, 次の如き$b \in$ $\overline{co\{a_j ; j=1,2,\cdots\}}$が存在する。$\|a - b\| < \varepsilon/2$, $b = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j b_j$ $(b_j \in \overline{\{a_j ; j=1,2,\cdots\}}$, $\sum \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geqq 0)$.

ここで$\|\cdot\|$はX_0のノルムを示す。各b_jに対して, 次の如き, $c_j \in \{a_i ; i=1,2,\cdots\}$が存在する: $\|b_j - c_j\| < \varepsilon/2$.

$c = \sum_{j=1}^{N} c_j \lambda_j$とおくと, $c \in \bigcup_{j=1}^{\infty} co\{a_i : i=1,\cdots,j\}$ 且 $\|a - c\| < \varepsilon$ をえる。これは,

$a \in \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} co\{a_k : k=1,\cdots,j\}}$ を示している.

(5), (6) より, $\overline{U} = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{co}\{a_j;\ j=1,2,\cdots,m\}}$

(証了)

補題2. VをX_0の中の凸な閉集合とする。任意の$v(s) \in \mathfrak{F}(V)$に対して, 次の如き, 階段函数$v_n(s) \in \mathfrak{F}(V)$が存在する; $v_n(s) \longrightarrow v(s)$ a.e. s in $[0, T]$.

証明. $v(s)$に対して, 階段函数$w_n(s) \in \mathfrak{F}(X_0)$で$w_n(s) \longrightarrow v(s)$ a.e. s in $[0, T]$が存在することは定義より明らか。$w_n(s) = \sum_{j=1}^{N_n} \chi_{B_j^n}(s) \cdot b_j^n$とおこう。ここで$\chi_{B_j^n}(s)$は, Borel集合$B_j^n$の特性函数であり, b_j^nはX_0の元である。各b_j^nに対して, Vが凸で閉であることから, 次の如き$c_j^n \in V$が存在する。

$$\inf_{b \in V} \| b_j^n - b \| = \| b_j^n - c_j^n \|.$$

そこで,

$$v_n(s) = \sum_{j=1}^{N_n} \chi_{B_j^n}(s)\, c_j^n$$

とおくと,

$$\| v_n(s) - v(s) \| \leq \| v_n(s) - w_n(s) \| + \| w_n(s) - v(s) \|$$
$$\leq 2 \| w_n(s) - v(s) \|$$

であるから, $n \to \infty$のとき, 右辺$\longrightarrow 0$ a.e. s in $[0, T]$を考えに入れれば, $v_n(s) \longrightarrow v(s)$ a.e. s in $[0, T]$ 且 $v_n(s) \in V$をえる。証了.

補題3　$\Omega(t) = \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t K(t,s)\,u(s)\,ds\,;\ u(s) \in U_j \right\} \right.$ の強閉包 $\Big]$

証明

$\Omega(t)$ から任意に $v(t) = \int_0^t K(t,s)\,u(s)\,ds$ をとる。$u(s) \in \mathfrak{F}(U)$，補題2によって，次の如き階段函数 $u_n(s) \in \mathfrak{F}(U)$ が存在する。$u_n(s) \longrightarrow u(s)$ a.e. in s in $[0,t]$ と $\underset{s \in [0,t]}{\text{ess. sup}} \{\|u_n(s)\|, \|u(s)\|\} < \infty$ ($u_n(s)$, $u(s) \in U$ より) であるから，

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^t \| u_n(s) - u(s) \|^2\, ds = 0$$

をえる。故に，$K(t,s)$ の s についての連続性より，

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^t K(t,s)\,u_n(s)\,ds = \int_0^t K(t,s)\,u(s)\,ds$$

をえる。かくして，$\bar{u}(s) \in \mathfrak{F}(U)$ なる任意の階段函数に対して，

$$\int_0^t K(t,\rho)\,\bar{u}(\rho)\,d\rho \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t K(t,\rho)\,v(\rho)\,d\rho\,;\ v \in \mathfrak{F}(U_n) \right\}}$$

を示せば，$\int_0^t K(t,\rho)\,u(\rho)\,d\rho$ は求める性質をもつ。$\bar{u}(s)$ は階段函数より，$\bar{u}(s) = \sum_{j=1}^{N} \chi_{B_j}(s)\, b_j$ と表わされえる。$b_j \in U$。各 b_j に対して，$\exists\, c_j^m \in U_m$;

$\inf_{c \in U_n} \| b_j - c \| = \| b_j - c_j^n \|$ が成立する。

$U = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n}$ (補題1より) 且 $U_n \subset U_m$ $(n<m)$

であるから、$\| b_j - c_j^n \| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$

を之る。$u_n(s) = \sum_{j=1}^{N} \chi_{B_j}(s)\, c_j^n$ とおくと、

$u_n \in \mathfrak{F}(U_n)$ (任意の $s \in [0,t]$) 且 $u_n(s) \to \overline{u}(s)$

$s \in [0,t]$。故に、

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^t \| u_n(s) - \overline{u}(s) \|^2 ds = 0$$

よって

$$\int_0^t K(t,s)\, u_n(s)\, ds \longrightarrow \int_0^t K(t,s)\, \overline{u}(s)\, ds$$

$$\int_0^t K(t,s)\, u_n(s)\, ds \in \left\{ \int_0^t K(t,s)\, v(s)\, ds \,;\, v \in \mathfrak{F}(U_n) \right\}$$

より

$$\int_0^t K(t,s)\, u_n(s)\, ds \in \overline{\left\{ \int_0^t K(t,s)\, v(s)\, ds \,;\, v \in \mathfrak{F}(U_n) \right\}}$$

故に $\displaystyle \int_0^t K(t,s)\, \overline{u}(s)\, ds \in \overline{\left\{ \int_0^t K(t,s)\, v(s)\, ds \,;\, v \in \mathfrak{F}(U_n) \right\}}$

証了.

<u>補題4</u> $\overline{\left\{ \int_0^t K(t,s)\, u(s)\, ds \,;\, u \in \mathfrak{F}(U_n) \right\}} = \overline{\left\{ \int_0^t K(t,s)\, u(s)\, ds \,;\, u \in \mathfrak{F}(\right.}$

証明　$\mathcal{T}_m$ の端点は，$\{a_j;\ j=1,2,\cdots,m\}$ であった。$K(t,s)a_j$ は s について，連続より階段函数 $K_p(t,s)a_j$（s についての）で近似される：

$$K_p(t,s)a_j \xrightarrow[p\to\infty]{} K(t,s)a_j \quad (s \text{ 及び } j \text{ について一様}).$$

$\mathcal{F}(\mathcal{T}_m)$ の任意の元 $u(s)$ は，$u(s)=\sum_{j=1}^m \alpha_j(s)a_j$ （$\sum \alpha_j(s)=1,\ \alpha_j(s)\geqq 0$）と表わされる。これは"証明すべき事"であるが，ここでは略す。故に，

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds=\sum_{j=1}^m \int_0^t K(t,s)\alpha_j(s)a_j ds$$

又，
$$\left\|\int_0^t K_p(t,s)u(s)ds-\int_0^t K(t,s)u(s)ds\right\|$$
$$\leqq \sum_{j=1}^m \int_0^t \|K_p(t,s)a_j-K(t,s)a_j\|ds$$

故に，

$$\int_0^t K_p(t,s)u(s)ds \longrightarrow \int_0^t K(t,s)u(s)ds \quad (p\to\infty).$$

この収束は，$u(s)\in\mathcal{F}(\mathcal{T}_m)$ に対して一様である。

したがって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，次の如き P_0 が存在する：

$$\left\|\int_0^t K_p(t,s)v(s)ds-\int_0^t K(t,s)v(s)ds\right\|<\varepsilon/3$$

ここで，$p\geqq P_0$ で $v\in\mathcal{F}(\mathcal{T}_m)$。

他方，

(7) $\left\{\int_0^t K_p(t,s)v(s)ds\ ;\ v\in\mathcal{F}(\mathcal{T}_m)\right\}=\left\{\int_0^t K_p(t,s)v(s)ds\ ;\ v\in\mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}_m)\right\}$

が成立する。これは後で示そう。さて，任意に $u \in \mathfrak{F}(\mathfrak{V}_m)$ をとると，

$$\left\| \int_0^t K(t,\rho)\,u(\rho)\,d\rho - \int_0^t K_p(t,\rho)\,u(\rho)\,d\rho \right\| < \varepsilon/3,\ p>p_0.$$

(7)によって，

$$\left\| \int_0^t K_p(t,\rho)\,u(\rho)\,d\rho - \int_0^t K_p(t,\rho)\,w(\rho)\,d\rho \right\| < \varepsilon/3$$

なる如き $w \in \mathfrak{F}(\hat{\mathfrak{V}}_m)$ が存在する。この w に対して，

$$\left\| \int_0^t K_p(t,\rho)\,w(\rho)\,d\rho - \int_0^t K(t,\rho)\,w(\rho)\,d\rho \right\| < \varepsilon/3,\ p \geqq p_0$$

が成立する。故に，$\exists\, w \in \mathfrak{F}(\hat{\mathfrak{V}}_m)$;

$$\left\| \int_0^t K(t,\rho)\,u(\rho)\,d\rho - \int_0^t K(t,\rho)\,w(\rho)\,d\rho \right\| < \varepsilon.$$

これは補題4の成立を示している。

さて，(7)式を示そう。

$K_p(s,a_j) = \sum_{i=1}^{N_j} \chi_{B_i^j}(\rho)\, b_i^j$ と表わされる。

(7)式は，

$$\left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{N_j} \int_0^t \alpha_j(\rho)\,\chi_{B_k^j}(\rho)\,d\rho\ b_k^j ;\ \sum \alpha_j(\rho)=1,\ \alpha_j(s)\geqq 0 \right\}$$

(8)

$$= \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{N_j} \int_0^t \alpha_j(\rho)\,\chi_{B_k^j}(\rho)\,d\rho\ b_k^j ;\ \sum \alpha_j(\rho)=1,\ \alpha_j(\rho)=0 \text{ 又は } 1 \right\}$$

とかかれる。

$I=[0,t]$ とおくと，Iは，各jに対して，

$$I = B_1^j + B_2^j + \cdots + B_{N_j}^j$$

と直和分解される。すべてのjに対する，細分が存在する。それを$\{I_k\}_{k=1}^N$ とかこう。

$$K(s, a_j) = \sum_{k=1}^N \chi_{I_k}(s)\, c_k^j$$

とかかれる。

ここに，$\{I_k\}$は，細分であるから，

$$B_i^j = \sum_{p=1}^M I_{k_p}$$

k_p トカク

とかかれるが，$c_{k_p}^j = b_i^j$ とおいた。$(p=1,2,\cdots,M_i)$

(8)を示すには，

$$\begin{pmatrix} \int_I \alpha_1(s)\chi_{I_1}(s)\,ds, & \cdots, & \int_I \alpha_1(s)\chi_{I_N}(s)\,ds \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_I \alpha_n(s)\chi_{I_1}(s)\,ds, & \cdots, & \int_I \alpha_n(s)\chi_{I_N}(s)\,ds \end{pmatrix}$$

(9)

$$= \begin{pmatrix} \int_I \chi_{C_1}(s)\chi_{I_1}(s)\,ds, & \cdots, & \int_I \chi_{I_N}(s)\chi_{C_1}(s)\,ds \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_I \chi_{C_n}(s)\chi_{I_1}(s)\,ds, & \cdots, & \int_I \chi_{C_n}(s)\chi_{I_N}(s)\,ds \end{pmatrix}$$

なるIの分割；

$$I = C_1 + C_2 + \cdots + C_m$$

が存在すればよい。なんとなれば、

$$v(s) = \sum_{j=1}^{N} \chi_{C_j}(s) a_j$$

が題意をみたすから。

$$0 \leq \int_I \alpha_1(p) \chi_{I_j}(p) dp \leq \int_I \chi_{I_j}(p) dp \text{ より}$$

$$\exists C_j^1 ; \quad \int_I \alpha_1(p) \chi_{I_j}(p) dp = \int_I \chi_{C_j^1}(p) \chi_{I_j}(p) dp.$$

$C_1 = \sum_{j=1}^{N} C_j^1 \cap I_j$ とおく。同様にして、

$$\int_I \alpha_2(p) \chi_{I_j}(p) dp = \int_I \chi_{C_j^2}(p) \chi_{I_j}(p) dp$$

なる $C_j^2 \subset I - C^1$ が存在する。

$$0 \leq \int_I \alpha_2(p) \chi_{I_j}(p) dp \leq \int_I (1 - \alpha_1(p)) \chi_{I_j}(p) dp$$

$$\leq \int_I \chi_{I - C^1}(p) \chi_{I_j}(p) dp$$

であるから、その存在は保証される。

$C_2 = \sum_{j=1}^{N} C_j^2 \cap I_j$ とおく。

このようにして、$C_1, C_2, \cdots, C_m$ をとると、

$I = C_1 + C_2 + \cdots + C_m$ となる。(ii)が示された。

証了。

§3. 定理の証明.

(i). $\Omega(t)$ が、有界凸集合であることは明らか。閉集合であることを示そう。$\Omega(t) \ni w_n$ 且 $w_n \to w$ $(n \to \infty)$ なる X_1 の元の列 $\{w_n\}$ を任意にとろう。各 $w_n \in \Omega(t)$ より、次の如き $\mathfrak{F}(U)$ の元 $u_n(s)$ が存在する。$w_n(s) = \int_0^t K(t,s)\,u_n(s)\,ds.$

ところで、$\mathfrak{F}(U)$ は、$L^2([0,t]; X_0)$ の中の有界凸な閉集合であることは、明らかより、$\mathfrak{F}(U)$ は、$L^2([0,t]; X_0)$ の中の弱コンパクト集合である。何んとなれば、X_0 は、分離的且反射的なバナッハ空間であるから $L^2([0,t]; X_0)$ 自身反射的となるからである。

故に、

$$\exists\, u(s) \in \mathfrak{F}(U); \quad u_n(s) \xrightarrow[\text{弱}]{} u(s).$$

$\int_0^t K(t,s)\,v(s)\,ds$ は、$L^2([0,t]; X_0)$ から X_1 への線型連続写像より、$\int_0^t K(t,s)\,u_n(s)\,ds$ は $\int_0^t K(t,s)\,u(s)\,ds$ に弱収束する。しかるに、w_n は w に強収束しているのであるから、

$$w = \int_0^t K(t,s)\,u(s)\,ds.$$

これは、$w \in \Omega(t)$ を示している。これで(i)が示されたが、この証明は、[4] によった。

(iii); (i)と補題4によって,

$$\left\{\int_0^t K(t,s)u(s)ds;\ u\in \mathcal{F}(U_m)\right\}$$

$$=\overline{\left\{\int_0^t K(t,s)u(s)ds;\ u\in \mathcal{F}(\hat{U}_m)\right\}}$$

をえる。これによって,次の包含関係をえる。

$$\Omega(t)\supseteq\overline{\Omega(t)^0}\supseteq\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty}\overline{\left\{\int_0^t K(t,s)u(s)ds;\ u\in \mathcal{F}(\hat{U}_m)\right\}}}$$

$$=\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\int_0^t K(t,s)u(s)ds;\ u\in \mathcal{F}(U_m)\right\}}.$$

これと,補題3によって,$\Omega(t)=\overline{\Omega(t)^0}$ をえる。

証了.

§4 近似列の構成.

前章によって $\int_0^t K(t,s)u(s)ds$, $u\in\mathcal{F}(U)$, は,
$\int_0^t K(t,s)u_m(s)ds$, $u_m\in\mathcal{F}(\hat{U})$, によって近似できることがわかった。この章では,$\hat{U}=\{a,-a\}$ の特別の場合に,上の近似列を構成しよう。

$u(s)\in U=\{\lambda a+(1-\lambda)(-a);\ 0\leq\lambda\leq 1\}$

$\alpha_1(s)=[1+\alpha(s)]/2$, $\alpha_2(s)=[1-\alpha(s)]/2$ と

おくと,$u(s)=\alpha_1(s)a+\alpha_2(s)(-a)$ とかかれ,

$\alpha_1(s)$, $\alpha_2(s)\geq 0$ で $\alpha_1(s)+\alpha_2(s)=1$ である。

次に,

$$\int_{j-1/m}^{j/m} \alpha_1(\rho)\,d\rho = \int_{j-1/m}^{\tau} d\rho$$

なる τ を $j-1/m \le \tau \le j/m$ で求める。

$$\beta_1^{(m)}(\rho) = \begin{cases} 1\ ; & (j-1)/m \le \rho < \tau \\ 0\ ; & \tau \le \rho < j/m \end{cases}$$

と $\beta_1^{(m)}(\rho)$ をつくり、$\beta_2^{(m)}(\rho) = 1 - \beta_1(\rho)$ とおく。
$u_m(\rho) = \beta_1^{(m)}(\rho)a + \beta_2^{(m)}(\rho)(-a)$ が求める近似列であることは、容易にわかる。

文献

[1] クーランーヒルベルト; "数理物理学の方法";

[2] Gårding; On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators, Math. Scand. 1 (1953).

[3] Paley-Wiener; "Fourier transformations in the complex domain". Amer. Math. Soc. Coll., New York, (1934)

[4] Falb, P.; Infinite dimensional control problem 1: on the closure of the set of attainable states for linear systems.