

偏微分方程式で表わされる系の 最適制御

東大 工学部 有本 卓

§1. 序

分布定数系に対する最適制御理論の一般論を展開する際に、問題をあまりにも一般化しすぎて最適解を求めるための最適性に対する必要条件が具体化しきれないようでは困るし、また、ある程度統一的に解が得られるように問題を定式化しなくてはならないことも必要である。そのような意味で、Egorov¹⁾、Butkovskii²⁾らは偏微分方程式で表わされる系に対して、Pontryagin の「最大原理」と類似した最大原理を導いている。

この論文では、Egorov, Butkovskii の方法と異って、非線形計画法の問題をもっと一般の関数空間（具体的には pre-Hilbert 空間）において検討し、最適の点の必要条件として一般化された Kuhn-Tucker の gradient form を導き、この form を用いて放物形の偏微分方程式で表わされ

る系のある最適制御問題を考察する。

なお、関数空間における非線形計画法を用いて最適制御問題を検討した論文には Sakawa³⁾ があるが、ここでは汎関数の convexity を要求しなくても成立するような gradient 方程式が主役を演じていることに注意したい。

§ 2. 問題の設定と準備

この節では一般の線形ノルム空間で最適問題を提起し、かつ次節で述べる最適のための必要条件を導くときに必要になってくる概念の定義を Blum⁴⁾ に従って与えておく。

E と E_1 を実の線形ノルム空間、 f を E のある部分集合から E_1 への mapping, J を E のある domain D で定義された汎関数とする。また、 $K \subset E_1$ を convex cone とする。すなわち、 $y \in K$ なら $\alpha y \in K$ (α は非負の実数), $y^1 \in K$, $y^2 \in K$ なら $y^1 + y^2 \in K$ である。このとき、 K によって transitive relation (\geq) が定義される。すなわち、 $y^1 \geq y^2$ は $y^1 - y^2 \in K$, また $y \geq 0_K$ は $y \in K$ と約束する。

定義 1. f を domain $D \subset E$ から E_1 へのある mapping とする。集合 $C(f) = \{y : y \in D \text{ かつ } f(y) \geq 0_K\}$ を f の constraint と呼ぶ。もし $u \in C(f)$ のある近傍

N_u があってすべての $y \in C(f) \cap N_u$ に対して $J(y) \geq J(u)$ のとき, u を constraint $C(f)$ における J の relative minimum と呼ぶ。

こうして最適問題はつぎのように述べることができる。

問題 1. constraint $C(f)$ において J の relative minimum を与える元 $u \in D$ を見つけよ。

次節ではこのような問題を, もう少し具体的に, 連続関数から成る pre-Hilbert 空間で検討する。そのための準備として, 以下でつぎのような概念を定義しておく。

定義 2. u を含む E の部分集合 D はつぎの条件が満足されるとき finitely open at u であるという。すなわち, 任意の $h_1, \dots, h_n \in E$, $n \geq 1$ に対して \mathbb{R}^n の原点を含む開集合 $T \subset \mathbb{R}^n$ が存在し, すべての $(t_1, \dots, t_n) \in T$ に対して

$$u + \sum_{i=1}^n t_i h_i \in D$$

が満足されること。

定義 3. $f: E \rightarrow E_1$ はある finitely open set at u で定義された mapping とする。もしも

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} [f(u+th) - f(u)]/t \equiv \delta f(u; h) \quad (1)$$

がすべての $h \in E$ に対して存在するならば $\delta f(u; h)$ は weak differential of f at u with increment h と呼ばれる。

ここで注意すべきことは $\delta f(u; h)$ は h に関して homogeneous になっており, また, J が実数関数で $\delta J(v; h)$ がある finitely open set at v で v に関して finitely continuous at v (定義 4 を見よ) であるならば $\delta J(v; h)$ は

$$\delta J(v; h_1 + h_2) = \delta J(v; h_1) + \delta J(v; h_2) \quad (2)$$

の性質を持つことである。

定義 4. $D \subset E$ は finitely open at u とし, f は D で定義された E_1 の mapping とする。また, $v \in D$ とし, D は v に関して finitely open at v とする。もし $f(v + \sum_{i=1}^n t_i h_i)$ がすべての $h_1, \dots, h_n \in E$ に対して R^n の原点 (t_1, \dots, t_n) に関して連続であるとき, f は finitely continuous at v と言う。

さて, E を内積 (u, v) が定義された実の pre-Hilbert 空間としよう。 $\delta J(u; h)$ は h に関して線形であるから, ある場合には

$$\delta J(u; h) = (\nabla J(u), h) \quad \text{for all } h \in E \quad (3)$$

と表わされるような $\nabla J(u)$ が E の中に存在するであろう。

もしも (3) のような $\nabla J(u)$ が存在すれば、それを gradient of J at u と呼ぶことにする。

§ 3. 最適のための必要条件

$S \in \mathbb{R}^n$ の (measurable) な S 次元 compact domain とする。 E を S で定義された実の連続関数の全体から成る線形内積空間とする。 E の任意の元 u, v に対して内積

$$(u, v) = \int_S u(x)v(x)dx \quad (4)$$

と定義する。この結果、 E は pre-Hilbert 空間となる。

いま、 $f \in \mathbb{R}^1$ で定義された連続な微係数を持つ実連続関数とする。とすると、このように f は $\forall u \in E$ に対して $f(u) \in E$ となり、 f は E から E への mapping と見做される。つまり、§ 1 で述べた convex cone $E = \{u\}$ は

$$K = \{u : u(x) \geq 0 \text{ for all } x \in S\}$$

と定義しよう。また、 E 自身は可なり $y \in E$ が finitely open になるような $D \subset E$ の $D \subset E$ 自身を考へよう。このように、この問題を考へよう。

問題 2. constraint $C(f) = \{u : f(u(x)) \geq 0\}$ の ϵ と

で $J(u)$ の relative minimum を与える連続関数 u を見つけよ。

このような問題に対して下記の定理が成立する。

定理 1. ある $u \in E \cap C(f)$ が J の relative minimum を与えたものとする。 $\forall t \in f^{-1}(0)$ なる点 t で $f'(t) \neq 0$ と仮定する。 そのとき、 $\nabla J(u)$ が u におけるある finitely open set の $\forall v$ への v に対して存在 (0) の finitely continuous ならば、関係式

$$\left. \begin{aligned} \nabla J(u) - f'(u)v &= 0, \\ v f(u) &= 0, \quad v \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を満足する $v \in E$ が存在する。

(証明) まず、 $f(u(x)) > 0$ なる点 x では $\nabla J(u)(x) = 0$ であること証明しよう。 そのために、ある $x^0 \in S$ での

$$f(u(x^0)) = c_1 > 0 \quad \text{かつ} \quad \nabla J(u)(x^0) = c_2 > 0$$

となつたと仮定する。 そうすると、 f と ∇J が連続関数であることから、下記の条件を満足する S における x^0 のある近傍 $N_1(x^0)$ が存在する。

$$a) \quad f(u(x)) \geq c_1 - \delta_1 > 0 \quad \text{for } x \in N_1(x^0),$$

$$b) \quad \nabla J(u)(x) \geq c_2 - \delta_2 > 0 \quad \text{for } x \in N_1(x^0).$$

$\epsilon = \epsilon$, $N_1(x^0)$ に含まれるので $N_1(x^0)^c \cap \overline{N_2(x^0)}$ が空集合
 存在する。よって近傍 $N_2(x^0)$ を $\epsilon > \epsilon > \epsilon$ とし、上記の条件を
 満足する連続関数 $h(x)$ が Urysohn の定理より存在する。

$$c) \quad h(x) \geq 0 \quad \text{for } x \in S,$$

$$d) \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \overline{N_2(x^0)}, \\ 0 & \text{for } x \in N_1(x^0)^c. \end{cases}$$

その結果,

$$(\nabla J(u), h) \geq \int_{N_2(x^0)} (q - \delta_1) dx = \delta_3 > 0.$$

(したがって, $\nabla J(u)$ の定義から, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある
 $\delta_4 > 0$ が存在し, $|t| \leq \delta_4$ ならば

$$\delta_3 - \epsilon \leq \frac{J(u+th) - J(u)}{t} \leq \delta_3 + \epsilon$$

となる。一方, $f(u)$ の連続性からつぎのようなる $\delta_5 > 0$ が
 存在する。

$$f(u+th) \geq 0 \quad \text{for } |t| \leq \delta_5.$$

(したがって, $\epsilon \in \delta_3$ であり, $\epsilon < \epsilon$, $0 < -t \leq \min(\delta_4, \delta_5)$

とすると $J(u+th) < J(u)$ となり, $J(u)$ が $C(f)$ の

relative minimum であることは変える。また,

$$f(u(x^0)) = c_1 > 0 \quad \text{or} \quad \nabla J(u)(x^0) < 0$$

の場合も同様である。一方、 $f(t) = 0$ なる点では $f'(t) \neq 0$ であるから、さうして $\nabla J(u) - v f'(u) = 0$ を満足する連続関数 $v(x)$ の存在が証明された。つまり $v \geq 0$ であることを示そう。いま、ある x^0 で $v(x^0) = -c_1 < 0$ と仮定すると仮定する。前と同様に $f(u(x^0)) = 0$ かつ $f'(u(x^0)) \neq 0$ である。いま $f'(u(x^0)) = c_2 > 0$ とし、前と同じように、つまりの条件を満足する近傍 $N_1(x^0), N_2(x^0)$ と連続関数 $h(x)$ が存在する。

$$e) \quad N_1(x^0)^c \cap \overline{N_2(x^0)} = \emptyset,$$

$$f) \quad v(x) \leq -c_1 + \delta_1 < 0, \quad f'(u(x)) \geq c_2 - \delta_2 > 0$$

for all $x \in N_1(x^0)$,

$$g) \quad h(x) \geq 0, \quad \text{or} \quad h(x) = \begin{cases} 0 & x \in N_1(x^0)^c, \\ 1 & x \in \overline{N_2(x^0)}. \end{cases}$$

$x = 0$ $f'(u)$ の連続性から充分小の $\delta_3 > 0$ を選んで

$$f(u+th) \geq 0 \quad \text{for } 0 < t \leq \delta_3.$$

さうして

$$(\nabla J(u), h) = (v f'(u), h) \leq \int_{N_2(x^0)} (-c_1 + \delta_1)(c_2 - \delta_2) dx$$

$$= -\delta_4 < 0$$

(δ が > 2 , 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta_5 > 0$ が存在し

$$J(u+th) - J(u) \leq t(-\delta_4 + \varepsilon) \quad \text{for } 0 < t \leq \delta_5.$$

$\varepsilon \leq \delta_4$ より t が十分小く $t < \delta_5$ とすれば $J(u+th) < J(u)$ となり矛盾。つまり, $f'(u(x^*)) < 0$ の場合も同様である。

Q. E. D.

§ 4. 放物形の偏微分方程式で表わされる系に対する最適問題

さて, D を R^n の有界な open domain, ∂D は D の境界としよう。また, $\Omega = (0, T] \times D$, $S = (0, T] \times \partial D$ と表わし, それらの closure を $\bar{\Omega}$, \bar{S} と表わす。 $x = z$: $\varphi(t, x)$ に関する方程式

$$L\varphi + g(t, x, \nabla_x \varphi, \varphi) = 0 \quad (t, x) \in \Omega \quad (6)$$

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t} \quad (7)$$

× 第 2 種の境界条件

$$\begin{cases} \varphi(0, x) = \varphi^0(x) & x \in D, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \beta(t, x)\varphi = u(t, x) & (t, x) \in S \end{cases} \quad (8)$$

を表わす系の系を考へよう。こゝに $\nabla_x \equiv (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$,
 ν は ∂D における内向きの conormal である。また, (6),
 (7), (8) に關してつぎのような仮定をしておく。^{*}

仮定 1.

- a) a_{ij} は $\bar{\Omega}$ で連続かつ行列 (a_{ij}) は $\bar{\Omega}$ で正定値。また
 $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$ は各々 $\bar{\Omega}$ で存在しかつ
 連続とする。
- b) g は t に關して連続でかつ他の変数に對して少くとも
 2回までの偏導関数が存在して連続とする。
- c) $\varphi^0(x)$, $\beta(t, x)$ は各変数に關して連続。また $\beta \leq 0$ 。
 (8) の $u(t, x)$ は制御関数であるが、こゝでは許容制御関
 数のクラスとして
- d) $u(t, x)$ は \bar{S} で連続, $f(u(t, x)) \geq 0$

*) こゝでは, 簡単のため, 以下の議論において必要で程
 度の解の存在, 一意性, 連続性などが成立するようには, 仮
 定1) の他に ∂D などの条件が満足されてゐるものとする。
 ある

を満足するもの $C(f)$ を考へる。こゝに関数 f は

仮定 2. $f(t)$ は連続。 $f'(t)$ も存在しかつ連続。しかも $f(t) = 0$ の處で $f'(t) \neq 0$ とする。

を満足しつゝものとする。

をこゝつきのような問題を考へよう。

問題 3. $C(f)$ に属する u の中からつきの汎関数

$$J(u) = \frac{1}{2} \left[\int_0^T \int_D P(t, x) \varphi^2(t, x; u) dx dt + \int_0^T \int_{\partial D} Q(t, x) u^2(t, x) dx dt + \int_D R(x) \varphi^2(T, x; u) dx \right] \quad (9)$$

の relative minimum を与へるものを選べ。こゝに $\varphi(t, x; u)$ は $u(t, x)$ が与へられたとき境界条件 (P) を満足する (6) の解である。また、 P, Q, R は正値となる連続関数である。

§ 5. 最適制御の満たすべき方程式

前節の問題 3 に對して定理 1 の (5) に相當する方程式を導こう。そのためにまず $\delta J(u; h)$ を計算する。

h を \bar{S} で定義した連続関数とする。簡単な計算から

$$\delta J(u; h) = (\delta \varphi(u; h), P \varphi(u))_{\Omega}$$

$$+ (Qu, h)_S + (\delta\varphi_T(u; h), R\varphi_T(u))_D \quad (10)$$

が導かれる。ここには $\varphi(u) \equiv \varphi(t, x; u)$ と略記し、特に時刻 t と明記する必要があるときは $\varphi_t(u) \equiv \varphi(t, x; u)$ と表わすことに約束する。また、カッコ記号（内積）の suffix はそれぞれの積分領域を表わす。

一方、 $\delta\varphi(u; h)$ は慎重に吟味（2.11）の方程式

$$\begin{aligned} \Delta \delta\varphi(u; h) &= - \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{g(t, x, \nabla_x \varphi(u+sh), \varphi(u+sh)) - g(t, x, \nabla_x \varphi(u), \varphi(u))}{s} \\ &= - \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i(u) \frac{\partial \delta\varphi(u; h)}{\partial x_i} + c(u) \delta\varphi(u; h) \right] \quad (t, x) \in \Omega \quad (11) \end{aligned}$$

と境界条件

$$\begin{cases} \delta\varphi_0(u; h) = 0 & x \in D, \\ \frac{\partial \delta\varphi(u; h)}{\partial \nu} + \beta(t, x) \delta\varphi(u; h) = h & (t, x) \in S \end{cases} \quad (12)$$

を満足（2.11）が判る。ここには

$$\alpha_i(u) = \frac{\partial g(t, x, \nabla_x \varphi, \varphi)}{\partial [\partial \varphi / \partial x_i]}, \quad c(u) = \frac{\partial g(t, x, \nabla_x \varphi, \varphi)}{\partial \varphi} \quad (13)$$

である。 $\chi = \chi(t, x) \in C^2$ operator \bar{L} は

$$\bar{L} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(u) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(u) - \frac{\partial}{\partial t} \quad (14)$$

と定義しよう。 $\chi, \eta \in C^2$ の adjoint operator は \bar{L}^* とする。

すると Green's identity

$$\begin{aligned} \chi \bar{L} \eta - \eta \bar{L}^* \chi &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n \left(\chi a_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} - \eta a_{ij} \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \eta \chi \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) + b_i \chi \eta \right] - \frac{\partial}{\partial t} (\chi \eta) \end{aligned} \quad (15)$$

が成立する。

ここで、 u が χ は方程式

$$\bar{L}^* \chi = -P(t, x) \varphi(t, x; u) \quad (t, x) \in \Omega \quad (16)$$

と境界条件

$$\begin{cases} \chi(T, x) = R(x) \varphi(T, x; u) & x \in D, \\ \frac{\partial \chi}{\partial \nu} + (\beta + \alpha) \chi = 0 & (t, x) \in S \end{cases} \quad (17)$$

を満足する解をいふ。 α, β は α と β と定まる (20) は

参照)。 (15) は u が $\eta = \delta \varphi(u; h)$ とすると $\bar{L} \eta = 0$ と

あるから、 (10) は (15) となり

$$\begin{aligned} \delta J(u; h) = & \int_0^T \int_D \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n (\gamma a_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} - \eta a_{ij} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} - \eta \gamma \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}) \right. \right. \\ & \left. \left. + b_i \gamma \eta \right] - \frac{\partial}{\partial t} (\gamma \eta) \right\} dt dx \\ & + \int_0^T \int_{\partial D} \alpha u h dx dt + \int_0^T \eta(T, x) R \varphi_T(u) dx \quad (18) \end{aligned}$$

と得る。又、(17)の第1の条件と conormal ν の定義より、(18)は

$$\delta J(u; h) = \int_0^T \int_{\partial D} (\alpha u h + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial \nu} - \eta \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} - \alpha \eta \gamma) dx dt \quad (19)$$

と得る。ここで α は

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i \right) \cos \theta_i \quad (20)$$

であり、 θ_i は ∂D にあける内向き normal と x_i 方向との角度である。

(19)に(20)を代入すると、結局、(17)より

$$\delta J(u; h) = \int_0^T \int_{\partial D} (\alpha u + \gamma) h dx dt \quad (21)$$

が得られる。

という2つの定理が得られた。

定理2. $u \in C(f)$ は (9) で定義された $J(u)$ の relative minimum を与えておくとする。そのとき、 γ の方程式を満足する連続関数 $\psi(t, x)$ が存在する。

$$\begin{cases} Qu - \gamma - \psi f'(u) = 0, \\ \psi f(u) = 0, \quad \psi \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

すなわち γ は (17) を満足する (11) の解である。

注意1. $f(t)$ が、右と左は $f(t) = 1 - t^2$ のように、concave 関数であるが、 $-\frac{1}{2}Qu^2 - \gamma u$ も concave 関数であるから、(22) が成立するたの必要十分条件は (最大原理) 最適制御 u は $f(u) \geq 0$ のもとで

$$H(t, x, u, \psi) = -\frac{1}{2}Qu^2 - \gamma u \quad (23)$$

を最大にしてやる。

と等価である (Kuhn-Tucker の定理⁵⁾ を参照)。

§ 6. 非線形の境界条件の場合

この節では、(8) の中2の境界条件が

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \psi(t, x, \varphi, u) \quad (t, x) \in S \quad (8)'$$

と与えられた場合の問題を考察してみよう。ただし、 k についてつぎの仮定を設ける。

仮定 3.

a) $k(t, x, \varphi, u)$ は各変数について連続で、 φ, u に関して連続な偏導関数が存在する。

b) $\partial k / \partial \varphi > 0$, $\partial k / \partial u < 0$. $k \rightarrow (t, x)$ に関して $u \rightarrow \pm\infty$ のとき $k \rightarrow \pm\infty$.

c) $u = \varphi$ ならば $g(t, x, \varphi, u) = 0$.

なお、b) と c) は Newton's law of cooling が含まれることに注意してあろう。

このとき、(12) の第 2 式は

$$\frac{\partial \delta \varphi(u; h)}{\partial u} = -\beta \delta \varphi(u; h) + \gamma h \quad (12')$$

となる。ここに β, γ は

$$-\beta = \frac{\partial k(t, x, \varphi(u), u)}{\partial \varphi}, \quad \gamma = \frac{\partial k(t, x, \varphi, u)}{\partial u} \quad (24)$$

である。(17) 式は β を新たに (24) で定義した β と考へれば書ける、結局 (21) は

$$\delta J(u; h) = \int_0^T \int_{\partial D} (\alpha u + \gamma f) h \, dx \, dt \quad (25)$$

となり、つきの定理が成立する。

定理3. 定理2において(8)の第2式を(8)'と置きかえてある定理2と同様の定理を得る。そのとき、つきの方程式を満足する連続関数 $v(t, x)$ が存在する。

$$\begin{cases} Qu + \frac{\partial k}{\partial u} \varphi - v f'(u) = 0, \\ v f(u) = 0, \quad v \geq 0. \end{cases} \quad (26)$$

もしも k が u に関して convex であるならばつきの最大原理が成立する。
convex or concave

(最大原理) 最適制御 u は $f(u) \geq 0$ のもとで

$$H(t, x, \varphi, u) = -\frac{1}{2} Qu^2 - \gamma k$$

を最大にする。

§ 7. 結言

この論文では、不等式で表わされるような制限条件がある場合の最適制御の問題に連続関数を作る pre-Hilbert 空間で検討し、最適制御関数が一般化された Kuhn-Tucker の gradient 方程式を満足しなくてはならず、 $u=0$ と導いた。ついで、この結果を放物形の偏微分方程式で表わされる系に

ついで、特に第2種の境界条件のもとで制御される場合について、最適制御の満足すべき必要条件を導いた。そして、この条件はある場合には最大原理と一致する \square を示した。

放物形の偏微分方程式で表わされる系について第1種の境界条件のもとで制御する問題に関しては、 \square で述べた方法と全く同様にして、同じような結論が得られることに注意して可い。

なお、 \square では連続関数から成る pre-Hilbert 空間で最適問題を検討したが、汎関数の形如何によつては部分的連続な関数から成る pre-Hilbert 空間で問題を考察しなければならぬ \square が起る。しかし、この場合でも定理1は少し修正して成立するであろう。

不等式で表わされる制限条件の他に \square に等式で表わされる制限条件が加わった問題については、普通の非線形計画法と異つて、関数空間の場合前者の知り限りほとんど検討出来て可いようである。しかし、特に、系が線形である汎関数が convex であり、また等式で表わされる制限条件を満足する制御関数が線形部分空間 (一般には convex set である) の条件を十分である) を成している場合、Hurwicz⁽⁶⁾によつて Lagrange の乗数法則に關する saddle point theorem が成立するので、Blum⁽⁴⁾の方法によつてやはり(5)のよ

うな gradient 方程式が成立しなければならず、 $\lambda = 0$ が判明
されたのとは、このとき別の機会に発表したい。

終りにあたって、いつも御指導と御激励をたまわった
南雲仁一先生に感謝します。

参考文献

- 1) A. I. Egorov, "Optimal processes in distributed
parameter systems and certain problems in
invariance theory", J. SIAM Control, Vol. 4
No. 4, pp. 601-661, 1966.
- 2) А. Р. Бутковский, "Теория оптимального
управления системами с распределенными
параметрами", издательство «НАУКА»,
МОСКВА, 1965.
- 3) Y. Sakawa, "Optimal control of a certain type
of linear distributed-parameter systems",
IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-11,
No. 1, pp. 35-41, 1966.
- 4) E. K. Blum, "Minimization of functionals with
equality constraints", J. SIAM Control, Vol. 3

No. 2, pp. 299-316, 1965.

- 5) H. W. Kuhn and A. W. Tucker, "Non-linear programming", Proc. of the second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, USA, 1951.
- 6) L. Hurwicz, "Programming in linear spaces", in K. J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa, Studies in Linear and Non-linear Programming, Stanford University Press, pp. 38-102, 1958.