

最大値原理と Green 函数に
 に関する一注意

名大 教養 神田 護

§ 0. 序

0. Frostman は [1]において α -次 Riesz kernel

$$G(x, y) = \frac{\text{constant}}{|x-y|^{d-\alpha}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

を考察し、 $d \geq 3$ の場合には、 $\alpha > 2$ ならば $G(x, y)$ は最大値原理をみたし得ない事を示した。ここで云う最大値原理とは μ を \mathbb{R}^d での測度とした時 $\int G(x, y) \mu(dy) \leq M$ が μ の台上でなりたつならば 到る所でなりたつ という性質をさしている。この事実は確率論の立場からいえば $e^{-\text{const} \cdot |z|^\alpha}$ が $\alpha > 2$ の時には特性函数になり得ないという事に対応している。

ここでは 上の事実に弱い形であるが多少広い class の kernel に対して拡張しよう。

定理 $G(x, y)$ を d -次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^d ($d \geq 3$) 上の次の形の kernel とする。

$$(*) \quad G(x, y) = \frac{C(x, y)}{|x-y|^{d-\alpha}}$$

ここに $C(x, y)$ は \mathbb{R}^d 上の有界連続関数で常に正 (> 0) なるものとする。

もし $d > \alpha > 2$ ならば $G(x, y)$ は完全最大値原理をみたさない。

ここで $G(x, y)$ が完全最大値原理をみたすとは、 f, g を非負の連続関数で compact support を持つものとし、 a を非負の定数とした時

$$Gf \leq Gg + a$$

が f の support でなりたてば、到る所でなりたつ 時云う。但し $Gf(x) = \int G(x, y) f(y) dy$.

以後 $(*)$ の形の kernel を α -kernel と呼ぶ事にしよう。上の定理は、

“Potential representation of the hitting probability and its applications”

の題で発表する予定の論文の中での一定理の Corollary として得られる。

この定理の証明には 上の題名のように到達確率のポテンシャル表現が重要な役割をはたしている。

§1 準備

まず函数空間を導入しよう。 C_K は compact support を持つ連続函数の空間、 B_K は compact support を持つ有界可測函数の空間、 C_0 は一兵 compact 化の topology で無限遠で 0 に収束する連続函数の空間である。但しいずれも \mathbb{R}^d 上でのみ考え ~~同~~ 様) ル4 をいれる。

\mathbb{R}^d 上の Hunt process $X = (x_t, \mathcal{F}_t, M_t, P_x)$ が C_0 -process であるとは、その semi-group $\{T_t\}$ が C_0 上の強連続な semi-group である時云う。 $\{G_\alpha\}$ を X の resolvent とした時、非負で universally measurable な函数 $u(x)$ が (G, α) -excessive であるとは、任意の $\beta \geq 0$ に対して $\beta G_\alpha + \beta u \leq u$ かつ $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \beta G_\alpha + \beta u = u$ となる事である。

α -kernel $G(x, y)$ が C_0 -process の Green 函数と云われるのは 任意の $f \in B_K$ に対して

$$\int_0^{+\infty} T_t f(x) dt = \int_{\mathbb{R}^d} G(x, y) f(y) dy$$

がなりたつ時である。

我々は 予値によつて定理を証明しよう。そのためには 次の Proposition が 基本的である。

PROPOSITION 1. 完全最大値原理をみたす α -kernel $G(x, y)$ に対して それを Green 函数と

する C_0 -process が存在する。

この証明については、[2]の定理1.1をみらいたい。

§2. 到達確率のポテンシャル表現

この§で証明しようとするのは次の proposition である。

PROPOSITION 2 $X = (x_t, \mathcal{F}_t, M_t, P_x)$ を α -kernel $G(x, y)$ を Green 函数とする R^d ($d \geq 3$) 上の C_0 -process とする。 K を compact closure を持つ analytic set とし、 σ_K を K への first hitting time, 即ち $\sigma_K = \inf\{t > 0, x_t \in K\}$ (但し右辺が空集合ならば $+\infty$ とする) とするならば、 \bar{K} ($= K$ の closure) に concentrate する測度 $\mu_K(dy)$ が存在して

$$P_x(\sigma_K < +\infty) = \int G(x, y) \mu_K(dy)$$

となる。上の測度 $\mu_K(dy)$ を X に関する K の平衡分布という。

注意 一般に平衡分布が一意であるかどうかは筆者には分らない。しかし process X が連続ならば一意である事が証明できる。今はその証明は省略する。

Proposition 2 の証明のためにいくつかの lemma を準備する。考えている process は常に α -kernel $G(x, y)$ を

Green 函数とする C_0 -process であって 一々 それを断わる事
はしない。

LEMMA 1. $P_x(\sigma_K < +\infty)$ は $(G, 0)$ -excessive か
 $\mathbb{R}^d - \bar{K}$ で harmonic である。即ち $\mathbb{R}^d - \bar{K}$ に含まれる任意の
domain Q に対して, $\tau_Q = \inf\{t \geq 0, X_t \notin Q\}$ (もし右辺が空
集合なら $\tau_Q = +\infty$) とおけば $E_x(P_{x_{\tau_Q}}(\sigma_K < +\infty)) = P_x(\sigma_K < +\infty)$.

証明 これは強 Markov 性を用いる事によって証明で
きる。

LEMMA 2. $\{G_n\}$ を compact set の列で $G_n \supset K$ か
 $\bar{G}_n \subset \overset{\circ}{G}_{n+1}$, $G_n \uparrow \mathbb{R}^d$ とする。その時

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_x(P_{x_{\sigma_{G_n}^c}}(\sigma_K < +\infty)) = 0$$

証明. $E_x(P_{x_{\sigma_{G_n}^c}}(\sigma_K < +\infty)) = E_x(P_x(\sigma_K(\omega_{\sigma_{G_n}^c}^+) < +\infty))$
 $= P_x(\sigma_K < +\infty)$. に注意すれば

$$E_x(P_{x_{\sigma_{G_n}^c}}(\sigma_K < +\infty)) = E_x\{E_{x_{\sigma_{G_n}^c}}(P_{x_{\sigma_{G_n}^c}}(\sigma_K < +\infty))\}$$

$$= E_x\{E_x(P_{x_{\sigma_{G_n}^c}}(\omega_{\sigma_{G_n}^c}^+)(\sigma_K < +\infty))\}$$

$$\leq P_x(\sigma_{G_n}^c + \sigma_{G_n}(\omega_{\sigma_{G_n}^c}^+) < +\infty)$$

$$= P_x(\sigma_{G_n}^c + \sigma_{G_n}(\omega_{\sigma_{G_n}^c}^+) < 5)$$

となりたゝ事が分る。

今 $\xi_n(\omega) \equiv \sigma_{G_n}^c + \sigma_{G_n}(\omega_{\sigma_{G_n}^c}^+)$ とおこう。その時

$$E_x \int_{G_{\text{ext}}} G(x_{z_n}, y) dy \geq \delta \cdot P_x(z_n < \zeta)$$

である。但し $\delta \equiv \min_{x \in G_e} \int_{G_{\text{ext}}} G(x, y) dy$ である。 $\delta > 0$ である
 事を示そう。 $f(x)$ を G_e で 1, G_{ext}^c で 0 の値をとる連続
 函数とする。 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha G_\alpha f = f$ (一様) に注意すれば、十
 分大きな α を選ぶと $\min_{x \in G_e} G_\alpha f(x) = \delta' > 0$ とできる。一方
 $G_\alpha(x, G_{\text{ext}}) \geq G_\alpha f(x)$ だから $G_\alpha(x, G_{\text{ext}})$ は $x \in G_e$ に対
 して δ' より大きい。従って $G(x, G_{\text{ext}})$ は任意の $x \in G_e$ につい
 て δ' より大きい。さて $\chi_{G_{\text{ext}}}$ を G_{ext} の集合函数とすれば

$$\begin{aligned} E_x \left\{ \int_{G_{\text{ext}}} G(x_{z_n}, y) dy \right\} &= E_x \left\{ \int_{z_n}^{\zeta} \chi_{G_{\text{ext}}}(x_t) dt \right\} \\ &\leq E_x \left\{ \int_{\sigma_{G_n}^c}^{\zeta} \chi_{G_{\text{ext}}}(x_t) dt \right\} = E_x \left\{ \int_{\Omega} G(x_{\sigma_{G_n}^c}, y) \chi_{G_{\text{ext}}}(y) dy \right\} \end{aligned}$$

であるから G が B_K を C_0 にうつす事に注意すれば $P_x(z_n < \zeta) \rightarrow 0$ 。それ由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_x(P_{x_{\sigma_{G_n}^c}}(\sigma_K < +\infty)) = 0$ 。

LEMMA 3. lemma 2 と同じ仮定の下で

$$E_x G(x_{\sigma_{G_n}^c}, y) = G(x, y)$$

が G_n^c に属する殆んどすべての y についてなりたつ。

証明 $f(x)$ を G_n で 0 になる B_K に属す函数とせよ
 すると 任意の x に対して 次式がなりたつ事から 主張は
 明らかである。

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} E_x G(x, \sigma_{G_n^c}^c, y) f(y) dy &= E_x \left\{ E_{x, \sigma_{G_n^c}^c} \left(\int_0^{+\infty} f(\alpha_t) dt \right) \right\} \\
&= E_x \left\{ \int_{\sigma_{G_n^c}^c}^{+\infty} f(x_t) dt \right\} = E_x \left\{ \int_0^{+\infty} f(\alpha_t) dt \right\} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} G(x, y) f(y) dy
\end{aligned}$$

LEMMA 4. $G(x, y)$ は y を固定すると x の函数として $(G, 0)$ -excessive function である。

証明 以下の証明は渡辺毅氏による。まず $f \in B_K$ に対して $\alpha G_\alpha Gf(x) \leq Gf(x)$, 従って x を固定すると殆んどすべての y に対して $\int_{\mathbb{R}^d} G(z, y) \alpha G_\alpha(x, dz) \leq G(x, y)$ がなりたつ。右辺は y について連続函数 ($+\infty$ をこめて), 左辺は下半連続函数であるからその不等式は到る所てなりたつ。今 $G_{n,y}(x) = \min(G(x, y), n)$ とおけば

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} G(z, y) \alpha G_\alpha(x, dz) &\geq \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} G_{n,y}(z) \alpha G_\alpha(x, dz) \\
&= G_{n,y}(x).
\end{aligned}$$

以上をあわせて lemma は証明された。

注意 μ を \mathbb{R}^d 上の測度で $\int G(x, y) \mu(dy)$ (以後簡単のため $G\mu(x)$ とかく) が有界なものとする。この時 $G\mu(x)$ は $(G, 0)$ -excessive である。

測度 μ_K の存在証明 我々は H. Kunita-T. Watanabe [3] で用いられた方法を使おう。以後 $u(x) = P_x(\sigma_K < +\infty)$ とする。 $u_n = nG_n u$ とおけば u が $(G, 0)$ -excessive である事から u_n は u に単調に増加して近づき、
 \hookrightarrow Dynkin 公式と lemma 2 を用いる事によつて

$$u_n(x) = Gf_n(x), \quad f_n(x) = n(u(x) - u_n(x))$$

と表現される事が分る。更に $Gf_n(x) \leq 1 \quad \hookrightarrow \inf_{y \in K_1, x \in K_2} G(x, y) > 0$, K_1, K_2 , compact set に注意すれば $\{f_n(x)dx\}$ の部分列 $\{f_{n_k}(x)dx\}$ が存在してある測度 μ_K に弱収束する。今 f を B_K に属す非負の函数とすれば, $\hat{G}f(x) (= \int_{R^d} \hat{G}(x, y) f(y) dy, \hat{G}(x, y) = G(y, x))$ が連続である事より

$$\begin{aligned} \int_{R^d} f(x) u(x) dx &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{R^d} f(x) Gf_{n_k}(x) dx \\ &\geq \int_{R^d} \hat{G}f(y) \mu_K(dy) = \int_{R^d} G\mu_K(y) f(y) dy \end{aligned}$$

となる。更に $\{G_n\}$ を lemma 2 の compact set の列とすれば

$$\begin{aligned} \int_{R^d} f(x) u(x) dx &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{R^d} f(x) Gf_{n_k}(x) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f(x) \int_{G_n} G(x, y) f_{n_k}(y) dy dx + \\ &+ \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f(x) \int_{G_n^c} G(x, y) f_{n_k}(y) dy dx \end{aligned}$$

となるから lemma 3 を用いる事によって

$$\begin{aligned} \text{右辺} &\leq \int_{\mathbb{R}^d} G\mu_K(y) f(y) dy + \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \int_{G_n^c} E_x G(x_{G_n^c}, y) f_n(y) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} G\mu_K(y) f(y) dy + \int_{\mathbb{R}^d} E_x u(x_{G_n^c}) f(x) dx \end{aligned}$$

よって, lemma 2 によって

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) u(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} G\mu_K(y) f(y) dy.$$

以上あわせて

$$G\mu_K(x) = u(x)$$

が殆んどすべての x についてなりたつ。両辺共 $(G, 0)$ -excessive だから 至るところでなりたつ。

μ_K が \mathbb{R} に concentrate する事の証明. それを証明す

る前に 1 → lemma を注意しよう。

LEMMA 5. 任意の点 x_0 とそれを含む球 V に対して V に含まれ x_0 を中心とする球 $U(x_0)$ があって, 任意の $U(x_0)$ に属す点 x と y に対して

$$G(x, y) > E_x G(x_{\partial V}, y)$$

がなりたつ。

証明 任意の $x, y \in U(x_0)$ に對して $G(x, y) \geq \inf_{(x, y) \in U(x_0) \times U(x_0)} C(x, y)$
 $\times (U(x_0) \text{の直径})^{\alpha-d}$ であり, $E_x G(x_{2V}, y) \leq \sup_{y \in U(x_0), x \in V^c} G(x, y)$ である
 から, $U(x_0)$ の半径を十分小さくとりさえすればよい。

μ_K が K に concentrate している事を示そう。 $A \in K^c$
 に属す compact set とした時, $\mu_K(A) = 0$ を示せばよい。
 今, $\mu_K(A) > 0$ と仮定しよう。その時 A に含まれる点 x_0 が
 存在して x_0 を中心とする任意の球 V に對して $\mu_K(V) > 0$
 となる。そのような点 x_0 と球 V を固定しよう。lemma 5
 の不等式がなりたつような球 $U(x_0)$ を選ぶと

$$u_1(x_0) \equiv \int_{U(x_0) \cap A} G(x_0, y) \mu_K(dy) > E_{x_0} \int_{U(x_0) \cap A} G(x_{2V}, y) \mu_K(dy)$$

となる。 $u_2(x_0) \equiv \int_{\mathbb{R}^d - U(x_0) \cap A} G(x_0, y) \mu_K(dy) \geq E_{x_0} u_2(x_{2V})$ に
 注意すれば

$$\begin{aligned} u(x_0) &= u_1(x_0) + u_2(x_0) > E_{x_0} \{u_1(x_{2V}) + u_2(x_{2V})\} \\ &= E_{x_0} u(x_{2V}) \end{aligned}$$

となり, $u(x)$ が $\mathbb{R}^d - K$ で harmonic である事に矛盾する。
 従つて $\mu_K(A) = 0$ 。

§3. 定理の証明

この § は定理の証明にあてられる。断わりなしに
 ここでは, α -kernel $G(x, y)$ を Green 函数とする C_0 -process

のみを考える事にする。

Q を球とし ∂Q をその球面とする。 $E_{\partial Q}(dy)$ を ∂Q 上の一様測度とする；

$$E_{\partial Q}(dy) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} (\sin \theta)^{d-2} d\theta \quad 0 < \theta < \pi$$

r を Q の半径とし

$$L \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} 2^{\alpha-d} r^{\alpha-d} \int_0^\pi \sin^{\alpha-2} \frac{\theta}{2} \cos^{d-2} \frac{\theta}{2} d\theta$$

とおく。その時次の lemma がなりたつ。

LEMMA 1 $d > \alpha > 1$ とする。 Q' を Q と中心を同じにする半径 $2r$ の球とする。その時

$$\frac{1}{m_1} L^{-1} \geq \mu_{\partial Q}(\partial Q) \geq \frac{m_1}{m_2} \cdot L^{-1}$$

がなりたつ。但し $m_1 = \inf_{x,y \in Q'} C(x,y)$, $m_2 = \sup_{x,y \in Q'} C(x,y)$.

証明 定理の証明には、2番目の不等式しか用いないので、それを証明しよう。 $\{G_n\}$ を ∂Q の $\frac{1}{n}$ -近傍とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きい番号 n を選べば

$$r^{\alpha-d} - \varepsilon \leq \inf_{y \in G_n} |x_0 - y|^{\alpha-d}$$

$$\sup_{x \in \bar{G}_n} \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{\alpha-d} E_{\partial Q}(dy) \leq L(1+\varepsilon)$$

$P_{x_0}(\sigma_{G_n} < +\infty) \leq P_{x_0}(\sigma_{\partial Q} < +\infty) + \varepsilon$
 がなりたつ。従って十分大きい番号 n に對して

$$\begin{aligned}
 \mu_{G_n}(\bar{G}_n) &\geq \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{L} \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{\alpha-d} \varepsilon_{\partial Q}(dy) - \varepsilon \right\} \mu_{G_n}(dx) \\
 &\geq \frac{1}{m_2 \cdot L} \int_{\mathbb{R}^d} P_x(\sigma_{G_n} < +\infty) \varepsilon_{\partial Q}(dx) - \varepsilon \mu_{G_n}(\bar{G}_n) \\
 &= \frac{1}{m_2 \cdot L} - \varepsilon \mu_{G_n}(\bar{G}_n)
 \end{aligned}$$

かつ

$$m_2 \cdot r^{\alpha-d} \cdot \mu_{\partial Q}(\partial Q) + \varepsilon \geq m_1 \cdot \{r^{\alpha-d} - \varepsilon\} \mu_{G_n}(\bar{G}_n)$$

よって

$$\mu_{\partial Q}(\partial Q) \geq \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{1}{m_2 \cdot L} \left\{ 1 - \varepsilon \cdot r^{d-\alpha} \right\} \frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{m_2 \cdot r^{\alpha-d}}$$

となる。 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば lemma が証明される。

定理の証明 もし、(*)の形の kernel が完全最大値原理をみたしたとすれば、§1の Proposition 1より、それ Green 函数とする Co-process が存在し、したがって §2の Proposition 2より compact closure を持つ analytic set に対して平衡分布が定義できる。よって半径 r の任意の Q に對してその中心を x_0 とすれば

$$1 \geq P_{x_0}(\sigma_{\partial Q} < +\infty) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x_0, y) \mu_{\partial Q}(dy)$$

$$\geq m_1 \int_{\mathbb{R}^d} |x_0 - y|^{\alpha-d} \mu_{\partial Q}(dy) = m_1 r^{\alpha-d} \mu_{\partial Q}(\partial Q)$$

よれ由, Lemma 1 によつて

$$\begin{aligned} 1 &\geq m_1^2 (m_2^2)^{-1} \cdot r^{\alpha-d} \cdot L^{-1} \\ &= \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} \sqrt{\pi} 2^{2-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left(\int_0^\pi \sin^{\alpha-2\frac{\theta}{2}} \cos^{d-2\frac{\theta}{2}} d\theta\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} \sqrt{\pi} 2^{2-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{d+\alpha}{2}-1)}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{\alpha-1}{2})} \end{aligned}$$

となる。したがつて $C(x, y)$ の連続性より $\frac{m_1}{m_2}$ はいくらでも (1) を小さくする事によつて) 1 に近づける事ができるから, $\alpha > 2$ の時,

$$(**) \quad \sqrt{\pi} 2^{2-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+d}{2}-1)}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{\alpha-1}{2})} > 1$$

が言えさすればよい。それは次のようにして示せる。

まず $x \in \partial Q$ に対して

$$\int |x-y|^{\alpha-d} \varepsilon_{\partial Q}(dy) = L$$

かつ $\Delta \cdot |x-y|^{\alpha-d} < 0$ が $2 < \alpha < d$ についてなりたつ事に注意すれば

$$\int |x_0-y|^{\alpha-d} \varepsilon_{\partial Q}(dy) > L$$

となる。即ち $r^{\alpha-d} > L$ 。これは (**) を意味する。

References

- [1] O. Frostman ; Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. Meddel. Lunds Univ Math. Sem. 3 (1935).
- [2] M. Kanda ; Regular points and Green functions in Markov processes, J. Math. Soc. Japan, vol 19, No 1, (1967), 46-69.
- [3] H. Kunita and J. Watanabe ; Markov processes and Martin boundaries, Illinois J. Math., 7 (1965) 485-526.