

Dispersivity に関する注意

東京教育大 佐藤健一

§1. Dispersivity の定義

E を Banach 束とする。すなわち、 E は実 Banach 空間 E_x の束 $\pi: E \rightarrow X$ であって、(i) $f \geq g$ なら $f + h \geq g + h$, (ii) $f \geq g$ かつ $a \in \mathbb{R}^+$ (非負の実数の全体) ならば $af \geq ag$, (iii) $f \geq g$ ならば $-f \leq -g$, (iv) $|f| \geq |g|$ ならば $\|f\| \geq \|g\|$ という4つの性質をもつとする。次の記号を用いる:

$$f \vee g = \sup\{f, g\}, \quad f \wedge g = \inf\{f, g\},$$

$$f^+ = f \vee 0, \quad \bar{f} = -(f \wedge 0), \quad |f| = f \vee (-f).$$

一般の Banach 空間における線形作用素の半群に關しては、Hille- Yosida の定理が基本的な結果であるが、確率論等に関連に便利なる Banach 空間は硬な Banach 束である。半群の非負性が重要である。R. S. Phillips [2] は二十五年頃、 E における作用素が線形作用素の強連続非負縮小半群 (半群 $\{T_t\}$ が $\|T_t\| \leq 1$ である可縮小半群 (contraction semigroup) という) の生成作用素に関する条件を与えた。彼の (4) Lumer の seminner-product の群別を用いたが、

これには自由性がありまた Hahn-Banach の定理を用いて
 抽象的に定義されたものの、具体的に函数空間を取ると不便
 がある。この場合「[1]」は semi-inner-product の「 τ 」
 には

$$\tau'(f, g) = 2^{-1} (\tau(f, g) - \tau(f, -g))$$

に注意

$$\tau(f, g) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} (\|f + \varepsilon g\| - \|f\|)$$

を用いることに着目し、Phillips の結果に類似の結果を証明
 する。

本問上の問題を考慮すると、「[1]」の $\tau'(f, g)$ は次の
 ような形式で表すことができる

$$\sigma(f, g) = \inf \tau(f, (g+r) \vee (-r-f)), \quad f \geq 0$$

を新たに導入するのが便利である。ここで \inf は、 $f \wedge |r|$
 $= 0$ となるような r の値と、 $r \leq 0$ の $r \in \mathbb{R}^+$ による。
 この σ は次のような性質をもつことを証明する。

命題 1.1. $f \geq 0$ とする。

(i) $-\|g\| \leq \sigma(f, g) \leq \|g\|$

(ii) $a \in \mathbb{R}^+$ とする $\sigma(f, ag) = a\sigma(f, g)$

(iii) (任意 a に対し) $\sigma(f, af+g) = a\|f\| + \sigma(f, g)$

(iv) $\sigma(f, g+r) \leq \sigma(f, g) + \sigma(f, r)$

(v) $g \leq r$ とする $\sigma(f, g) \leq \sigma(f, r)$

$$(vi) \quad f \wedge |R| = 0 \text{ ならば } \sigma(f, g) = \sigma(f, g+R).$$

これらの性質のうちいくつかは τ を modify して σ をつ
くったことにより、はじめに得られたものであり、 τ は
(ii), (iii), (iv) を満たすが (i), (v), (vi) を満たすしもみ
たす。また τ' は, (ii), (iii) を満たすが (iv) を満たすしも
みたす。 (τ' が (i), (v), (vi) を満たすかどうか筆者は知
らない.)

σ を用いた次のように定義をする。

定義. A における作用素 A が 散乱 dispersive である
とは、すべての $f \in \mathcal{D}(A)$ に対し $\sigma(f^+, Af) \leq 0$ が成り
立つこととする。 反散乱 dispersive であるとは、すべての
 $f \in \mathcal{D}(A)$ に対し $\sigma(f^+, -Af) \geq 0$ が成り立つこととする。

以下、散乱 dispersive を $\text{disp}(s)$, 反散乱 dispersive
を $\text{disp}(w)$ とかくことにする。 (i) から $\sigma(f, 0) = 0$ であ
り、従って (vi) により $\sigma(0, g) = 0$ であるから、 $f^+ = 0$
ならば $f \in \mathcal{D}(A)$ に対し $\sigma(f^+, Af) = \sigma(f^+, -Af) = 0$
である。 故に、 $\text{disp}(s)$ または $\text{disp}(w)$ である
には、 $f^+ \neq 0$ の $f \in \mathcal{D}(A)$ をとらねばよい。

$\sigma(f, 0) = 0$ と (iv) とから、 $-\sigma(f, -g) \leq \sigma(f, g)$
である。 従って、 $\text{disp}(s)$ ならば必ず $\text{disp}(w)$ である。

上の定義を用いて、次のことがいえる。

1° A が線形作用素の強連続非負縮小半群の生成作用素と
 して、 A は $\text{disp}(A)$ である。

2° A が線形、 $\mathcal{D}(A)$ が \mathcal{D} -稠密、ある $\lambda > 0$ に対し
 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{D}$ (I は恒等作用素) とする。 A が $\text{disp}(w)$
 とする、ある線形強連続非負縮小半群の生成作用素とある。

3° A, B が共に $\text{disp}(A)$ とする、 $A+B$ (定義域は
 $\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$) と $\text{disp}(A)$ である。 A が $\text{disp}(A)$ 、
 B が $\text{disp}(w)$ とする、 $A+B$ は $\text{disp}(w)$ である。

3° の証明は命題 1.1 (iv) から得られる。 まず左向きは
 $\sigma(f^\dagger, (A+B)f) \leq \sigma(f^\dagger, Af) + \sigma(f^\dagger, Bf) \leq 0$ により、後
 向きは $\sigma(f^\dagger, -(A+B)f) \geq \sigma(f^\dagger, -Bf) - \sigma(f^\dagger, Af) \geq 0$
 による。 1°, 2° は命題 1.1 と Hille-吉田の定理を用いて
 [1], [2] と似た方法で証明できる。 (ただし [3] は中
 断)。

具体的に Banach 束に与いた τ, σ の形は次の通りであ
 る。(以下 \mathcal{D} は実数値連続関数の全体とする。)

(a) \mathcal{D} が、compact 空間 X 上の連続関数の全体 $\mathcal{C}(X)$
 である Banach 束 $C(X)$, $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$ の場合、 $\forall f \neq 0$
 に対し

$$(1.1) \quad \tau(f, g) = \max_{x \in X(f)} (\text{sgn } f(x)) g(x)$$

$\mathcal{E} \mathcal{E} \mathcal{L} \quad X(f) = \{x : |f(x)| = \|f\|\}$ である。 また

(1.2) 任意の $f \neq 0, f \geq 0$ に対し $\tau(f, g) = \tau(f, g)$ である。

(b) $\mathcal{L} = C_0(X)$, 任意の X は compact でない局所 compact 空間, $C_0(X)$ は $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (∞ は X 上 compact 化する点) をみたす連続関数 f の全体, の場合も, (a) と同じことになりえる。

(c) $\mathcal{L} = B(X)$, ただし X は任意の集合, $B(X)$ は X 上の有界関数の全体, $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ の場合には, $\forall f \neq 0$ に対し

$$(1.3) \quad \tau(f, g) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x \in X(f, \varepsilon)} (\operatorname{sgn} f(x)) g(x)$$

ただし $X(f, \varepsilon) = \{x : |f(x)| > \|f\| - \varepsilon\}$, である。また (1.2) がやはり成り立つ。

(d) (X, \mathcal{B}, m) が測度空間, $\mathcal{L} = L_\infty(X, \mathcal{B}, m)$ の場合にも (c) と同じことになりえる。ただし (c) の \sup を $\operatorname{ess\,sup}$ でおきかえろ。

(e) (X, \mathcal{B}, m) が測度空間, $\mathcal{L} = L_1(X, \mathcal{B}, m)$ の時にはすべての f, g に対し

$$\tau(f, g) = \int_{X_+(f)} (\operatorname{sgn} f(x)) g(x) m(dx) + \int_{X_0(f)} |g(x)| m(dx)$$

であり, $f \geq 0$ に対し

$$\sigma(f, g) = \int_{X_+(f)} g(x) m(dx)$$

である。ただし、 $X_0(f) = \{x : f(x) = 0\}$, $X_1(f) = X - X_0(f)$ とする。

(f) $\mathcal{B} = L_p(X, \mathcal{B}, m)$, $1 < p < \infty$, の時 $f \neq 0$ に対し

$$(1.4) \quad \tau(f, g) = \int_X (\operatorname{sgn} f(x)) |f(x)|^{p-1} g(x) m(dx) / \|f\|^{p-1}$$

であり, (1.2) が成り立つ。

(g) (X, \mathcal{B}) は measurable space, \mathcal{B} を \mathcal{B} 上の有限 signed measure の全体が全変動の L_1 による \mathcal{B} 上の Banach 束 $A(\mathcal{B})$ とする。 $|f|$ に属する f の絶対連続部分, 特異部分をそれぞれ g_f^c, g_f^s とし, f による X の Hahn 分解における正集合, 負集合をそれぞれ X_f^+, X_f^- とすると

$$\tau(f, g) = g_f^c(X_f^+) - g_f^c(X_f^-) + \|g_f^s\|$$

である。 $f \geq 0$ の場合は

$$\sigma(f, g) = g_f^c(X)$$

である。

以上の証明は [3] に与えられている。 σ の具体的な表現を用いた場合, $\operatorname{disp}(s), \operatorname{disp}(w)$ の具体的な表現を \mathcal{B} 上の \mathcal{B} 上の Banach 束において τ が成り立つことを示す。特に, (a) の $C(X)$ または (b) の $C_0(X)$ の場合には, A が $\operatorname{disp}(s)$ であることは

$$(1.5) \quad f \in \mathcal{D}(X), \quad f(x_0) = \max_{x \in X} f(x) > 0 \text{ ならば} \\ Af(x_0) \leq 0.$$

成り立つことは同様にあり、 A が disp(w) ならば $f(x_0) = 0$ ならば $Af(x_0) \leq 0$ である。

$$(1.6) \quad a = \max_{x \in X} f(x) > 0 \text{ ならばある } x_0 \in X \text{ が存在} \\ \text{して } f(x_0) = a \text{ かつ } Af(x_0) \leq 0.$$

成り立つことはある。(1.3) は確率論の (1) (1) 用いられ
る性質であるが、境界条件の問題を扱うには (1.4) を使
う方が適当である。Ventcel [5] にはその例がある。

§2. 定義 dispersive 作用素の閉包。

X が compact 距離空間、 $\mathcal{L} = C(X)$ の場合、 A が線形、
dispersive (w) の稠密な定義域をもつ A の閉包が存在
し、 A の最小閉包 \bar{A} は disp(s) になる。このことは [4]
の Theorem 1.2 と 3 の後の Remark により、一般の Ban-
nach 束はこの結果を拡張する必要があることを考察しよう。

定理 2.1. \mathcal{L} は任意の Banach 束とする。 A が \mathcal{L} におけ
る線形かつ disp(w) の作用素 $\mathcal{D}(A)$ が稠密ならば、 A
の閉包 \bar{A} である。

証明. $f_n \in \mathcal{D}(A)$, $n=1, 2, \dots$ が 0 に強収束、
 Af_n が g に強収束するとし、 $g=0$ ならばよい。 $g \neq 0$

とす。 $g^+ \neq 0$ とし、 $\|g^+\| = 1$ と (2) の一般性を失わず
 11. $D(A)$ の稠密性から、 $\|g-r\| < 1/3$ となる $r \in D(A)$
 が存在する。一般に $(r_1+r_2)^+ \leq r_1^+ + r_2^+$ であるから、
 $1 = \|g^+\| \leq \|r^+ + (g-r)^+\| \leq \|r^+\| + \|(g-r)^+\| < \|r^+\| + 1/3,$
 従って $\|r^+\| > 2/3$ である。任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -g - \varepsilon Ar) \leq \sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -\varepsilon^{-1} f_n - r) \\ + \varepsilon^{-1} \|f_n^+\| + \|(r-g)^+\| + \varepsilon \|(Ar)^-\|$$

である。これは命題 1.1 の (i) と (iv) を繰返して (A) であるとし、
 更に (iii) と (vi) を一般に (2) の不等式

$$(2.1) \quad |(r_1+r_2)^+ - r_1^+| \leq |r_2|$$

から

$$\sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -\varepsilon^{-1} f_n - r) = -\varepsilon^{-1} \|(f_n + \varepsilon r)^+\| \rightarrow -\|r^+\|, n \rightarrow \infty$$

である。従って、 ε を十分小さくすれば、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -g - \varepsilon Ar) \leq -\|r^+\| + \|(r-g)^+\| + \varepsilon \|(Ar)^-\| \\ < -1/3 + \varepsilon \|(Ar)^-\| < 0$$

である。一方、(i) (iv) から一般に

$$(2.2) \quad |\sigma(f, g) - \sigma(f, r)| \leq \|g-r\|$$

である。これは注意 1.1 (ii) から、 A の $\text{disp}(w)$ から

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -g - \varepsilon Ar) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -(Af_n + \varepsilon Ar)) \\ \geq 0$$

であるから、矛盾が生じる。故に $g=0$ である。証明終。

定理 2.1 にあつた仮定の F に \bar{A} があつて $\text{disp}(w)$ にあつた
 かどうかは確かめ得ないから、一つだけ条件を足さ
 した。

定義. $f_n \geq 0, n=1, 2, \dots$, かつ $f \neq 0$ に強収束するもの
 に対して g に対し

$$(2.3) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma(f_n, g) \leq \sigma(f, g)$$

となつた時、Banach 束 E が $(SC\sigma)$ をあつたといふ (Semi-continuity of σ with respect to the first variable).

定理 2.2. E が $(SC\sigma)$ をあつたとする。 A が線形
 $\text{disp}(w)$ の閉部分 $E \in \mathcal{L}$ かつ、最小閉部分 $\bar{A} \in \text{disp}(w)$ とな
 る。

証明 $f \in E(\bar{A}), \bar{A}f = g$ となる。 $f \neq 0$ であるから
 $\sigma(f, -g) \geq 0$ である。最小閉部分 \bar{A} があるから f_n
 $\in \mathcal{D}(A), n=1, 2, \dots$, かつ $f_n \rightarrow f$ かつ $Af_n \rightarrow g$
 がある。 (2.1) によつて $f_n \rightarrow f$ があるから $(SC\sigma)$ を用
 いて

$$\sigma(f, -g) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma(f_n, -g),$$

右辺は (2.2) によつて $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma(f_n, -Af_n) \geq 0$ であるから、
 \bar{A} の $\text{disp}(w)$ である。

§1 への応用として、(a), (b), (c), (d) かつ v
 $2 \leq p < \infty$ の (f) は $(SC\sigma)$ をあつた、(e), (g) は

trivial な例外を除いて $(SC\sigma)$ を示すことができる。このことを示そう。

(a) X compact 且 $\mathcal{L} = C(X)$ または (b) X が compact 且 \mathcal{L} 毎 \mathcal{L} compact 且 $\mathcal{L} = C_0(X)$ の場合, (c) と同じく $\tau(f, g)$, $f \neq 0$, が (1.3) に f_n とも表わされることをまず示そう。(1.3) の右辺を a とおくと, $a \geq \tau(f, g)$ は明らかであるから, \leq を示す。 $h(x) = (\text{sign } f(x))g(x)$ とおくと, $\varepsilon > 0$ に対し $x_n \in X(f, 1/n)$, $n=1, 2, \dots$, を $a - \varepsilon < h(x_n)$ とする。 $\{x_n\}$ はある compact set に含まれるから, $\exists x_\infty$ が存在して x_∞ の任意の近傍に $\{x_n\}$ を無限回含む。従って $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ は $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_\infty)$ かつ $g(x_{n_k}) \rightarrow g(x_\infty)$ に収束する。故に $|f(x_\infty)| = \|f\| \neq 0$, 更に $h(x_{n_k}) \rightarrow h(x_\infty)$ となり, 従って $a - \varepsilon \leq h(x_\infty)$ である。 ε の任意性により, $a \leq h(x_\infty) \leq \tau(f, g)$ である。故に (a), (b) の場合は (c) の場合と帰着する。

(c) $\mathcal{L} = B(X)$ の場合 $(SC\sigma)$ の証明: $f_n \rightarrow f$, $f_n \geq 0$, $f \neq 0$ とし, $g \in \mathcal{L}$ とする。 $f_n \neq 0$ としうる。
 $(1.3)_{\wedge}$ により $\exists x_n \in X$ に対し $f_n(x_n) > \|f\| - 1/n$
 かつ $|\sigma(f_n, g) - g(x_n)| < 1/n$ である。 $\varepsilon_n = \frac{1}{n} + 2\|f_n - f\|$ とおくと

$$|f(x_n) - \|f\|| \leq |f(x_n) - f_n(x_n)| + |f_n(x_n) - \|f_n\|| + |\|f_n\| - \|f\|| < \varepsilon_n$$

であるから

$$\sup_{x \in X(f, \varepsilon_n)} g(x) \geq g(x_n) \geq \sigma(f_n, g) - \frac{1}{n}$$

である。 $n \rightarrow \infty$ とすると $\varepsilon_n \rightarrow 0$ であるから (2.3) である。

(d) $\mathcal{L} = L_\infty$ の場合は、本質的には (c) と同じである。

(f) $\mathcal{L} = L_p, 2 \leq p < \infty$ の場合、 $f_n \rightarrow f, f_n \geq 0,$

$f \neq 0$ ならば $\forall g$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f_n, g) = \sigma(f, g)$ である。
 これは証明しよう。(1.4) により $\sigma(f, g)$

は g についての線形関数である、 $\sigma(f, g) = \sigma(f, g^+) - \sigma(f, g^-)$ である。
 故に $g \geq 0$ としこれに注意する。 $g \geq 0$ を固定し、 $f \in L_p$ に対し

$$\|f\|' = \left(\int_X |f(x)|^{p-1} g(x) m(dx) \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

である。 $\|f_n\|' \rightarrow \|f\|'$ であることを示す。Hölder の不等式を用いる。

$$(\|f\|')^{p-1} \leq \|f\|^{p-1} \|g\|$$

であるから $\|f_n - f\|' \rightarrow 0$ である。 $p \geq 2$ であるから

$\| \cdot \|'$ は三角不等式を満たし、 $|\|f_n\|' - \|f\|'| \leq \|f_n - f\|' \rightarrow 0$ である。

次に (e) の $\mathcal{L} = L_1(X, \mathcal{B}, m)$ の場合とは、trivial な例外を除いて (S(σ)) を満たす。すなわち、 $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ かつ $0 < m(B_i) < \infty, i=1, 2$ なる $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ が存在すれば (S(σ)) を満たす。すなわち、 $f_n(x) = \chi_{B_1}(x)$

$+ \frac{1}{n} \chi_{B_2}(x)$, $f(x) = \chi_{B_1}(x)$, $g(x) = \chi_{B_1 \cup B_2}(x)$ とおけば,
 $f_n \rightarrow f$ かつ $\sigma(f_n, g) = \int_{B_1 \cup B_2} g \, d\mu = \mu(B_1) + \mu(B_2)$,
 $\sigma(f, g) = \int_{B_1} g \, d\mu = \mu(B_1)$ であるから, (g) の \mathcal{L}
 $= A(B)$ の場合も同様である.

注意. §1, 2° の仮定を弱め, " $R(\lambda I - A) = \mathcal{L}$ " を
 " $R(\lambda I - A)$ が \mathcal{L} で稠密" にか之ると, 結論として,
 A が線形強連続非負縮小半群の生成作用素となる. 筆者は
 これを \mathcal{L} が $(SC\sigma)$ をみたすという仮定の証明(左が, 渡
 辺毅氏の注意を便うと, 任意の Banach 束に於いて).

§3 $C(X)$ または $C_0(X)$ における dispersivity と最大値 原理との関係

X を局所 compact Hausdorff 空間とし, X が compact
 の時は $\mathcal{L} = C(X)$, X が compact でない時は $\mathcal{L}_0 = C_0(X)$
 とする. $A \in \mathcal{L}$ における線形作用素 $V = -A^{-1}$
 とおく. A の $\text{disp}(A)$ または $\text{disp}(w)$ という性質と V の
 種々の最大値原理との間には, 密接な関係がある.

定義 V が complete maximum principle をみたすとは
 (3.1) a が非負の実数, f, g が共に $\mathcal{D}(V)$ に属しかつ
 $f \geq 0, g \geq 0$ とする時, $a + Vf(x) \geq Vg(x)$
 が g の support において成り立つならば X 全体に

成り立つ,

ということができる. V の positive maximum principle をみたすとは,

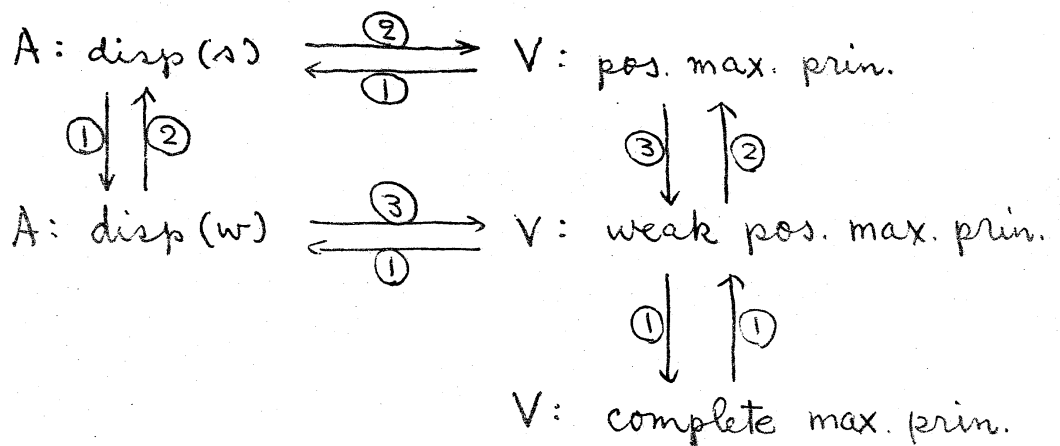
$$(3.2) \quad f \in \mathcal{D}(V) \quad \text{で} \quad Vf(x_0) = \max_{x \in X} f(x) \geq 0 \quad \text{ならば} \\ f(x_0) \geq 0 \quad \text{である,}$$

ということができる. V の weak positive maximum principle をみたすとは

$$(3.3) \quad f \in \mathcal{D}(V) \quad \text{で} \quad \sup_{x \in X} Vf(x) = a > 0 \quad \text{ならば} \\ Vf(x) \text{ の } \{x : f(x) > 0\} \text{ における } \sup \text{ は } a \\ \text{に等しい.}$$

ということができる.

$\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{R}(A)$ が共に稠密ならば, V に対する上の3つの最大値原理と, A の $\text{disp}(s)$ があることと, A の $\text{disp}(w)$ があることは, 互いに同値である. 更に C を $C \subset \dots$ ならば, 次のことが成り立つ.



ただし ① は常に (1) であることを示し, ② は $D(A)$ が稠密であることが成り立つことを示し, ③ は $R(A)$ が稠密であることが成り立つことを示す.

ここで \mathcal{D} は, $\text{disp}(A)$ または $\text{disp}(w)$ と関係 (E 部分 E) して証明しよう. (1.5) により, A が $\text{disp}(A)$ であることは

$$(3.4) \quad f \in D(V), \quad Vf(x_0) = \max_{x \in X} Vf(x) > 0 \quad \text{ならば} \\ f(x_0) \geq 0,$$

と同値である. また (1.6) により, A が $\text{disp}(w)$ であることは

$$(3.5) \quad f \in D(V), \quad \sup_{x \in X} Vf(x) = a > 0 \quad \text{ならば}, \quad Vf(x) \\ \text{が } \{x: f(x) \geq 0\} \text{ における } \sup \text{ は } a \text{ である},$$

と同値である. 故に, V が pos. max. prin. (3.2) のとき常に A が $\text{disp}(A)$ であり, V が weak pos. max. prin. (3.3) のとき常に A が $\text{disp}(w)$ である.

$A: \text{disp}(A) \xrightarrow{\text{②}} V: \text{pos. max. prin}$ の証明: $Vf(x_0) = \max_{x \in X} Vf(x) = 0$ の時 $f(x_0) \geq 0$ であることを示す. X が完全正則空間であることと $D(A)$ の稠密性を用いると, x_0 の任意の近傍 U に対し, $\exists h \in D(A)$ が存在して $h(x_0) > \sup_{x \in U} h(x) \geq 0$ である. しかる $\|Ah\| \leq 1$ にとれる. $\varepsilon > 0$ とすると $(Vf + \varepsilon h)(x_0) = \varepsilon h(x_0) > 0$ であるから $x \in U$ ならば $(Vf + \varepsilon h)(x) \leq \varepsilon h(x) < \varepsilon h(x_0)$ である. 故に $x_1 \in U$ が存在して $(Vf + \varepsilon h)(x_1) = \max_x (Vf + \varepsilon h) > 0$

≥ 0 である。 $\text{disp}(s)$ に より $(-f + \varepsilon A h)(x_1) \leq 0$ であるから、
 $f(x_1) \geq -\varepsilon \|A h\| \geq -\varepsilon$ である。 \cup と ε の任意性により
 $f(x_0) \geq 0$ を得る。

$A: \text{disp}(w) \xrightarrow{\textcircled{3}} V: \text{weak pos. max. min.}$ の証明:

$\sup_{x \in X} V f(x) = a > 0$ とする。 $\exists \varepsilon < a$ なる $\varepsilon > 0$ を任意にと
 する。 compact 集合 $K \subseteq X$, $x \notin K$ ならば $V f(x) \leq \varepsilon$ とするよ
 うにとする。 X の局所 compact 性と $\mathcal{D}(V)$ の稠密性により
 $h \in \mathcal{D}(V)$ が存在して K ならば $h(x) > 0$ である。 \cup により
 $\|V h\| \leq \varepsilon$ にとれる。 $\sup_{x \in X} V(f-h) \geq \sup_{x \in X} V f - \varepsilon = a - \varepsilon$
 > 0 であるから (3.5) に より, $x_0 \in X$ が存在して
 $(f-h)(x_0) \geq 0$ かつ $V(f-h)(x_0) \geq a - \varepsilon$ である。 すると、
 $V f(x_0) \geq a - 2\varepsilon$ 。 K の外ならば $V f(x) \leq \varepsilon < a - 2\varepsilon$ であるから
 $x_0 \in K$ とする。 従って、 $f(x_0) \geq h(x_0) > 0$ 従って、 $\{x:$
 $f(x) > 0\}$ に属する $V f(x)$ の \sup は $\geq a - 2\varepsilon$ である
 ε の任意性により証明終。

$A: \text{disp}(w) \xrightarrow{\textcircled{2}} A: \text{disp}(s)$ の証明: A が $\text{disp}(s)$
 になることを示す。 $\exists a > 0$ とする $f \in \mathcal{D}(A)$ が存在する。 $\sigma(0, \cdot) = 0$ であるから $f^+ \neq 0$ とす
 り、 従って、 $f(x_0) = \|f^+\|$ かつ $A f(x_0) = a$ とする x_0
 が存在する。 x_0 の近傍 $U \subseteq X$, \cup により $A f(x) > a/2$ にとる。
 X の完全正則性と $\mathcal{D}(A)$ の稠密性から、 $h \in \mathcal{D}(A)$ が存在

もし $R(x_0) > 1/2$ ならば \cup の外では $R(x) < 1/2$ である。

任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\begin{aligned} \sigma((f + \varepsilon R)^+, -Af - \varepsilon AR) &\leq \sup_{x \in \cup} (-Af - \varepsilon AR)(x) \\ &\leq -a/2 + \varepsilon \|AR\| \end{aligned}$$

が成り立つ、これは ε を十分小さくとれば < 0 であるから

よ、 A の $\text{disp}(w)$ は負値である。

最後の証明では、 A が 1:1 であることを用いた。

文献

- [1] M. Hasegawa, On contraction semi-group and (di) -operators, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 290-302.
- [2] R. S. Phillips, Semi-groups of positive contraction operators, Czechoslovak Math. J. 12(87) (1962), 294-313.
- [3] K. Sato, On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices, to appear.
- [4] K. Sato-T. Ueno, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1965), 529-605.
- [5] A. D. Ventcel', On lateral conditions for

multi-dimensional diffusion processes, Teor.
Veroyat. Prim. 4 (1959), 172-185 (12 = 7 $\frac{1}{10}$).