

Hunt の定理の紹介

東大 教養 宮本宗實

§1. 完全最大値の原理

$(E, \mathcal{B}) \in$ measurable space とする. E 上の kernel $V_p = V_p(x, dy)$ ($p > 0$) の系が次の条件をみたすとき, Markovian pseudo-resolvent と呼ぶことにする.

1. $V_\lambda - V_\mu + (\mu - \lambda)V_\lambda V_\mu = 0$ (resolvent equation)

2. $V_\lambda \geq 0, \lambda V_\lambda 1 \leq 1$

$f \geq 0$ ならば, $V_\lambda f$ は $\lambda \downarrow 0$ のとき単調に増加する. 其の極限 $V_0 f = \lim_{\lambda \downarrow 0} V_\lambda f$ とおく. 一般に f に > 0 ならば, $V_0 f^+ < +\infty, V_0 f^- < +\infty$ のときは, $V_0 f = V_0 f^+ - V_0 f^-$ と定義する. V_0 に対して (2 次) Proposition (the complete maximum principle) が成り立つ.

Proposition. $a \in$ non-negative constant, $f, g \in$ measurable $\&$ non-negative function $\&$ $V_0 f < +\infty, V_0 g < +\infty$ ならば $a \leq 1$ とする. $a < 1$ のとき,

$$a + V_0 f(x) \geq V_0 g(x) \quad \text{for } x : g(x) > 0$$

ならば,

$$a + V_0 f \geq V_0 g \quad \text{everywhere.}$$

Proof. $u \equiv a + V_0 f$, $g_n \equiv g \wedge n$ とおく. $\forall \lambda > 0$ $\exists \delta > 0$ ならば,

$$u \geq V_\lambda g_n \quad \text{everywhere}$$

となることを示せばよい.

$p > 0$ を任意に fix して, $N \equiv p V_{\lambda+p}$ とおく. $\lambda > 0$ のとき,

$$p V_\lambda g_n = \sum_{k=1}^{\infty} N^k g_n$$

が成り立つことは見易い. 実際, resolvent equation から,

$$\begin{aligned} p V_\lambda &= p V_{p+\lambda} + p^2 V_{p+\lambda} V_\lambda = N + N(p V_\lambda), \\ &= N + N^2 + \dots + N^{k-1} + N^k (p V_\lambda). \end{aligned}$$

従って, $k \rightarrow \infty$ のとき, $N^k (p V_\lambda) g_n$ は単調減少である. $\bar{h} \equiv$

$\lim_{k \rightarrow \infty} N^k (p V_\lambda) g_n$ とおけば, Lebesgue's theorem により

$$\bar{h} = p V_{\lambda+p} \bar{h} (= N \bar{h}) \leq p V_\lambda g_n. \quad \text{また, resolvent equation}$$

より,

$$\begin{aligned} V_{g+\lambda} \bar{h} &= V_{p+\lambda} \bar{h} + (p-g) V_{g+\lambda} V_{p+\lambda} \bar{h} \\ &= \bar{h}/p + (p-g)/p V_{g+\lambda} \bar{h} \quad \text{for } g > 0. \end{aligned}$$

従って, $g V_{g+\lambda} \bar{h} = \bar{h}$. 上に $g \rightarrow 0$ とおくと, $\bar{h} \leq p V_\lambda g_n \leq \frac{pN}{\lambda}$.

$$\bar{h} = g V_{g+\lambda} \bar{h} \leq g \cdot \frac{pN}{\lambda} V_{g+\lambda} 1 \leq g \frac{pN}{\lambda} \cdot \frac{1}{g+\lambda} \rightarrow 0 \quad (g \downarrow 0).$$

従って $\bar{h} = 0$, $p V_\lambda g_n = \sum_{k=1}^{\infty} N^k g_n$ が成り立つ.

$n \geq g_n, u(x) \geq V_\lambda g_n(x)$ for $x: g_n(x) > 0$ であるから

$$n + pu(x) \geq g_n + pV_\lambda g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} N^k g_n(x) \quad \text{for } \sqrt[p]{g_n(x)} > 0$$

であるから, $n + pu(x)$ は $N = |N|$ である N -excessive, であるから,

$n + pu \geq N(n + pu)$, であるから, 次の Lemma に依り

$$n + pu \geq g_n + pV_\lambda g_n \quad \text{everywhere}$$

従って,

$$n/p + u \geq g_n/p + V_\lambda g_n$$

であるから $p \rightarrow +\infty$ であるから, $u \geq V_\lambda g_n$ everywhere.

Lemma. $N \in E$ 上の non-negative kernel である。 $h \in$ non-negative 連続函数, $v \in E$, N -excessive, であるから, $Nv \leq v$, である non-negative function である。 であるから,

$$v(x) \geq \left(\sum_{k=0}^{\infty} N^k \right) h(x) \quad \text{for } x: h(x) > 0$$

であるから,

$$v \geq \left(\sum_{k=0}^{\infty} N^k \right) h \quad \text{everywhere.}$$

§2. 原理の間の関係

E は locally compact, σ -compact, Hausdorff space, C_K は E 上の compact support の連続函数の全体, C_0 は E の uniform norm $\|\cdot\|$ に依り completion である。 $V \in E$, E 上の non-negative kernel であるから $C_K \in C_0$ であるからである。

V is a second order condition is (a), (b) is before $\varepsilon > 0$ is.

(a) $V(C_K)$ is C_0 is dense.

(b) $0 \leq \exists h_m \in C_K : \nabla h_m \uparrow 1$ everywhere.

is K , V is a second order is the "principle" is considered. But, a is non-negative constant, $f, g \in C_K$.

(Pi) the complete maximum principle

$f, g \geq 0$ is $\exists \varepsilon > 0$,

$$a + \nabla f(x) \geq \nabla g(x) \quad \text{for } x: g(x) > 0$$

$\Rightarrow \exists \varepsilon$,

$$a + \nabla f \geq \nabla g \quad \text{everywhere.}$$

(Pii) the domination principle

$f, g \geq 0$ is $\exists \varepsilon > 0$,

$$\nabla f(x) \geq \nabla g(x) \quad \text{for } x: g(x) > 0$$

$\Rightarrow \exists \varepsilon$

$$\nabla f \geq \nabla g \quad \text{everywhere.}$$

(Piii) the weak principle of the positive maximum

$\sup \nabla f(x) > 0$ is $\exists \varepsilon$,

$$\sup \nabla f(x) = \sup_{x \in P} \nabla f(x), \quad \text{where } P = \{x: f(x) > 0\}.$$

(Piv) the principle of the positive maximum

$$\nabla f(x) = \sup \nabla f \quad \text{is } \exists \varepsilon, \quad f(x) \geq 0.$$

これらの原理の間には次のような論理的包含関係が成立する。

Proposition 1.

$$\begin{array}{ccc}
 (\pi_1) & \xleftarrow[2]{(1)} & (\pi_2) \\
 \uparrow 3 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 (\pi_3) & \xleftarrow[5]{} & \xrightarrow[b]{(2)} (\pi_4) \\
 \downarrow 4 & &
 \end{array}$$

Proof.

1. (π_1) として $a=0$ とおけばよい。

2. 任意に $b > a \in \mathbb{R}$ を fix する。 a と b を $m \rightarrow +\infty$ に対して

$$V(f + b h_m)(x) \geq b + Vf(x) > a + Vf(x) \geq Vg(x)$$
 が $x: g(x) > 0$ に対して成り立つ。 Dini の定理により、十分大なる m に対して、

$$V(f + b h_m)(x) \geq Vg(x) \quad \text{for } x: g(x) > 0.$$

(π_1) により、

$$V(f + b h_m) \geq Vg \quad \text{everywhere.}$$

最初 $m \rightarrow +\infty$ 、次に $b \downarrow a$ とする (= ϵ に対して)。

$$a + Vf \geq Vg \quad \text{everywhere.}$$

3. $a + Vf(x) \geq Vg(x)$ for $x: g(x) > 0$ とする。 $h \equiv g - f$ とおけば、 $f \geq 0$ 故に $\{h > 0\} \subset \{g > 0\}$ 。従って、

$$a \geq Vh(x) \quad \text{for } x: h(x) > 0.$$

すなわち, $a \geq \sup_{x \in P} \nabla h(x)$, 但し $P = \{h > 0\}$.

もし $\sup \nabla h \leq 0$ ならば $a \geq \nabla h$ everywhere. 従って, $a + \nabla f \geq \nabla g$ everywhere.

もし $\sup \nabla h > 0$ ならば, $(\pi_3) = F$, $\therefore \sup \nabla h = \sup_{x \in P} \nabla h(x) \leq a$. 従って, $a \geq \nabla h$ everywhere, すなわち $a + \nabla f \geq \nabla g$ everywhere.

4. $a \equiv \sup_{x \in P} \nabla f(x)$, $a^+ \equiv a \vee 0$ とおく.

$$a^+ \geq \nabla f(x) = \nabla f^+(x) - \nabla f^-(x) \quad \text{for } x \in P.$$

すなわち,

$$a^+ + \nabla f^-(x) \geq \nabla f^+(x) \quad \text{for } x: f^+(x) > 0$$

(π_1) = F).

$$a^+ + \nabla f^- \geq \nabla f^+ \quad \text{everywhere.}$$

すなわち,

$$a^+ \geq \nabla f \quad \text{everywhere,}$$

$$a^+ \geq \sup \nabla f.$$

右辺は仮定により positive. 故に, $a^+ > 0 \therefore a^+ = a$.

従って,

$$a \geq \sup \nabla f.$$

逆方向の不平等式は明らかだから, $\sup \nabla f = \sup_{x \in P} \nabla f(x)$.

5. $a \equiv \sup \nabla f > 0$ と仮定する. $0 < \varepsilon < \frac{a}{3}$ なる任意の ε

ε とする. $\nabla f \in \mathcal{C}$. だから, compact $F \ni z$ までとるにはおぼ,

$$|Vf(x)| < \varepsilon \quad \text{for } x \in F^c$$

とすることができる。そこで、ある δ かに、

$$\exists g \in C_K^+ : g > 0 \text{ on } F, \quad Vg < \varepsilon \text{ everywhere.}$$

(π_4) により、 $V(f-g)$ は $\{x : (f-g)(x) < 0\}$ 上では最大値 ε とり得ない。従って、 $\{f \leq 0\} \cap F$ 上では最大値 ε とり得ない。

— δ ,

$$V(f-g)(x) \leq Vf(x) \leq \varepsilon \quad x \in F^c$$

$$\sup V(f-g) \geq a - \varepsilon \geq 2\varepsilon$$

とあるから、 $V(f-g)$ は F^c 上では最大値 ε とり得ない。従

って、 $V(f-g)$ は $\{x : f > 0\} \cap F$ 上での最大値 ε とる。故に

$$\sup_{f(x) > 0} Vf(x) \geq \sup_{f > 0} V(f-g)(x) = \sup V(f-g) \geq a - \varepsilon.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とし、 $\sup_{f > 0} Vf \geq a$ を得る。

6. $Vf(x) = \sup Vf \geq 0$ とする。 $U \ni x$ の任意の compact neighbourhood とする。 (α) により、次の条件を満たす $g \in C_K$ が存在する:

$$Vg(x) > 0$$

$$Vg(x) > \sup_{y \in U^c} Vg(y).$$

$\varepsilon > 0$ を任意に fix する。

$$\sup V(f + \varepsilon g) \geq Vf(x) + \varepsilon Vg(x) > 0.$$

$y \in U^c$ に対して

$$V(f + \varepsilon g)(y) < Vf(x) + \varepsilon Vg(x) \leq \sup V(f + \varepsilon g).$$

従, z , $V(f+\varepsilon g)$ の positive \pm maximum は U の $\pm z$ att.

ain $\pm u$, U^c 上 z は attain $\pm u$ の u . 従, z , (π_3) は

$\exists x_0 \in U$ が存在し z , $V(f+\varepsilon g)(x_0) = \sup V(f+\varepsilon g)$,

$f(x_0) + \varepsilon g(x_0) > 0$. U, ε は任意 $\varepsilon > 0$, $f(x) \geq 0$.

Proposition 2 (π_2) は成立する.

$(I+V)f = 0$ ならば $f = 0$.

Proof. $(I+V)f = 0$ とする. $Vf^+ + f^+ = Vf^- + f^-$. $x = f^+(x) > 0$

には $f^-(x) = 0$ であるから, $Vf^+(x) \leq Vf^-(x)$. 故に (π_2) は

より, $Vf^+ \leq Vf^-$ everywhere. 従, z $f^+ \geq f^-$. 同様

$f^+ \leq f^-$. 故に $f^+ = f^-$, z の両側は $z = 0$ となる.

Proposition 3. (π_4) は成立する.

$Vf = 0$ ならば $f = 0$.

Proof は自明

§3. Hunt の定理

E, C_0, C_K は前章と同じ.

Theorem V は $C_K \in C_0$ による non-negative kernel z

the complete maximum principle (π_3) を満足するものとする.

このとき, C_0 上の pseudo-resolvent $\{V_p\}_{p>0}$ 列の条件をみた

するものが存在する.

$$1) \quad V_\lambda - V_\mu + (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu = 0$$

$$2) \quad Vf = V_\lambda (\lambda Vf + f) = (\lambda Vf + f) V_\lambda f \quad f \in C_K$$

$$3) \quad 0 \leq V_\lambda, \quad \|\lambda V_\lambda\| \leq 1$$

$$4) \quad \lim_{\lambda \downarrow 0} V_\lambda f = Vf \quad f \in C_K$$

Remark. 4) は 2, 3) より出る。

任意の $f \in C_K^+$ に対して (2), (2) より, $Vf - V_\lambda f = \lambda V_\lambda Vf \geq 0$. 故に, $\lambda V_\lambda f \leq \lambda Vf$. 従って, $s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda V_\lambda f = 0$. 故に任意の $f \in C_K$ に対して (2), $s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda V_\lambda f = 0$. C_K は C_0 の dense であり, $\|\lambda V_\lambda\| \leq 1$ であるから, 任意の $f \in C_0$ に対して (2), $s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda V_\lambda f = 0$. 従って, $f \in C_K^+$ に対して (2), $0 \leq Vf - V_\lambda f = \lambda V_\lambda (Vf) \rightarrow 0$ ($\lambda \downarrow 0$) ($\because Vf \in C_0$). 故に, 任意の $f \in C_K$ に対して (2), $s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} V_\lambda f = Vf$.

Proof of Theorem.

1.° Bounded case. $\|V\| < +\infty$ と仮定する. $\alpha > 0$ とし, V は C_0 上での拡張が可能で, C_0 上の complete maximum principle を満たす。

$$0 < \alpha < \|V\|^{-1} \text{ に対して, } V_\alpha \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k V^{k+1} \text{ とおく.}$$

1, 2, 4) は自明. V_α は non-negative であることは示す。

$g \in C_0$, $g \leq 0$ とする. (2) から, $V_\alpha g = V(g - \alpha V_\alpha g)$ であるから $V_\alpha g(\alpha) > 0$ とする。

$$0 < \sup V_\alpha g = \sup V(g - \alpha V_\alpha g)$$

右辺は, $(\pi) [= (\pi)] (= F)$, 次は等しい:

$$\begin{aligned} & \sup \{ V(g - \lambda V_\lambda g)(y) \mid y: g(y) - \lambda V_\lambda g(y) > 0 \} \\ & = \sup \{ V_\lambda g(y) \mid y: g(y) - \lambda V_\lambda g(y) > 0 \}. \end{aligned}$$

1. $\{ y \mid g(y) - \lambda V_\lambda g(y) > 0 \}$ に対し,

$$0 \leq g(y) > \lambda V_\lambda g(y)$$

従って, $\sup \{ V_\lambda g(y) \mid \dots \} \leq 0$. 2. $\{ y \mid g(y) - \lambda V_\lambda g(y) > 0 \}$ は矛盾. 従って,

$$V_\lambda g \leq 0.$$

次に V_λ の norm を評価する. $f \in C_K^+$, $\|f\| \leq 1$ に対し

2,

$$1 \geq f(x) \geq \lambda V_\lambda f(x) \quad \text{for } x: f(x) - \lambda V_\lambda f(x) > 0$$

右辺 = $V[\lambda(f - \lambda V_\lambda f)](x)$ であるから,

$$1 \geq V[\lambda(f - \lambda V_\lambda f)](x) \quad \text{for } x: f(x) - \lambda V_\lambda f(x) > 0.$$

(*) により,

$$1 \geq V[\lambda(f - \lambda V_\lambda f)] = \lambda V_\lambda f \quad \text{everywhere.}$$

$f \uparrow 1$ と (2), $1 \geq \lambda V_\lambda 1$. V_λ は non-negative であるから,

$$\|\lambda V_\lambda\| = \lambda V_\lambda 1 \leq 1.$$

2° General case. E は σ -compact であるから, compact な

集合 K_n が存在して, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. $f_n \in C_K^+$, $\|f_n\| \leq 1$,

K_n 上で $f_n = 1$ なる函数 f_n がある. 仮定から, $Vf_n \in C_0$.

正の実数列 λ_n を, $\sum \lambda_n < +\infty$, $\sum \lambda_n \|Vf_n\| < +\infty$ と

取り出す. $a = \sum \lambda_n f_n$ とおけば, $0 < a \in C_0$,

$\forall a \in C_0, \exists k, a_n \equiv (na) \wedge 1$ とおけば, $0 < a_n \in C_0,$
 $\forall a_n \in C_0.$

$f \in C_K$ に対し $(\tau, V^{(n)}f = V(a_n f))$ と定義すれば, $V^{(n)}$
 は, C_K から C_0 へ a bounded mapping τ , the complete
 maximum principle を満たす. 従, $\tau \neq \gamma$, pseudo-
 resolvent $V_\lambda^{(n)}$ が C_0 上に存在する. \therefore $V_\lambda^{(n)}$ に対し (τ)
 の不等式 (*) が成り立つ.

$$(*) \quad n < m, f \in C_K^+ \Rightarrow V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right) \geq V_\lambda^{(m)}\left(\frac{f}{a_m}\right)$$

\therefore $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $k_j \equiv V_\lambda^{(j)}\left(\frac{f}{a_j}\right)$ ($j = n, m$) とおく.

$$\begin{aligned}
 k_n &= V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right) = V^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right) - \lambda V^{(n)}V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right) \\
 &= V^{(n)}\left(\frac{f}{a_n} - \lambda V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right)\right) \\
 &= V(f - \lambda a_n k_n)
 \end{aligned}$$

同様に,

$$k_m = V(f - \lambda a_m k_m).$$

従, τ ,

$$k_m - k_n = \lambda V(a_n k_n - a_m k_m).$$

$\max(k_m - k_n) > 0$ とおけば, (π_3) the weak principle
 of the positive maximum を用い, ある $x \in E$ に対し τ ,

$k_m(x) - k_n(x) = \max(k_m - k_n) > 0$, $a_n(x)k_n(x) - a_m(x)k_m(x) > 0$ が成り立つ。 $a_n(x) \leq a_m(x)$ であるから、これは矛盾。従って、(5)が成り立つ。

$f \in C_c^+$ に対して $V_{\lambda_n}^{(n)}(\frac{f}{a_n})$ は $n \rightarrow +\infty$ のとき、単調減少であるから、その極限 $V_{\lambda} f = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\lambda_n}^{(n)}(\frac{f}{a_n})$ とおくと、 $V_{\lambda} f$ は upper semi-continuous であり、 $V_{\lambda} f = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\lambda_n}^{(n)} f$ となる。
 $\|\lambda V_{\lambda}^{(n)}\| \leq 1$ であるから、任意の $f \in C_0$ に対して、

$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\lambda_n}^{(n)} f$ が存在する、これは $V_{\lambda} f$ とおくとよい。 $0 \leq f \in C_0$ ならば、 $V_{\lambda} f$ は upper semi-continuous である。 $\Rightarrow \|\lambda V_{\lambda}\| \leq 1$ は自明である。

$f \in C_c^+$ に対して、仮定から $Vf \in C_0^+$ 。上述したことから、

$$\begin{aligned}
 V_{\lambda} Vf &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\lambda_n}^{(n)} Vf : \text{upper semi-continuous} \\
 \lambda V_{\lambda_n}^{(n)} Vf &= \lambda V_{\lambda_n}^{(n)} V_{\lambda_n}^{(n)}(\frac{f}{a_n}) \\
 &= V_{a_n}^{(n)}(\frac{f}{a_n}) - V_{\lambda_n}^{(n)}(\frac{f}{a_n}) \\
 &= Vf - V_{\lambda_n}^{(n)}(\frac{f}{a_n})
 \end{aligned}$$

上述の右辺は、上にのみ $\lambda = 1$ から、単調増大で、 Vf 以上からなるからわかる。従って、

$$\lambda V_{\lambda} Vf = \lim_{n \rightarrow \infty} (Vf - V_{\lambda_n}^{(n)}(\frac{f}{a_n})) : \text{lower semi-continuous}$$

従って、 $\lambda V_{\lambda} Vf$ は continuous で Vf 以上からなる。

3) 4) 2) 3). 故に, $\lambda V_\lambda V f \in C_0^+$. 従って, 2) 任意の $f \in C_K$ に対して, $\lambda V_\lambda V f \in C_0$.

$f \in C_K$ に対して,

$$V_\lambda^{(n)} f = V^{(n)} f - \lambda V_\lambda^{(n)} V^{(n)} f$$

2) 3) 4) 3). $n \rightarrow +\infty$ と (2),

$$V_\lambda f = V f - \lambda V_\lambda V f.$$

右辺第一項は仮定から, $\lambda = 0$ の場合と同じであるから, C_0 の函数である. 故に, $V_\lambda f \in C_0$. 従って, 2), $f \in C_0$ に対しては, $V_\lambda f \in C_0$.

1), 2) を示すためには, $V_\lambda^{(n)}$ によって (2) の 1), 2) が $n \rightarrow +\infty$ とすればよい.

Remark. $\bar{C} = \{f = \text{continuous on } E, \exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\}$ とおく.

V の $C_K \in \bar{C}$ に対する kernel 2) 3) と共に, E の Theorem は一般には成り立たない. 2) 4) 5) 6) 7) 8) 9) 10) 11) 12) 13) 14) 15) 16) 17) 18) 19) 20) 21) 22) 23) 24) 25) 26) 27) 28) 29) 30) 31) 32) 33) 34) 35) 36) 37) 38) 39) 40) 41) 42) 43) 44) 45) 46) 47) 48) 49) 50) 51) 52) 53) 54) 55) 56) 57) 58) 59) 60) 61) 62) 63) 64) 65) 66) 67) 68) 69) 70) 71) 72) 73) 74) 75) 76) 77) 78) 79) 80) 81) 82) 83) 84) 85) 86) 87) 88) 89) 90) 91) 92) 93) 94) 95) 96) 97) 98) 99) 100) 101) 102) 103) 104) 105) 106) 107) 108) 109) 110) 111) 112) 113) 114) 115) 116) 117) 118) 119) 120) 121) 122) 123) 124) 125) 126) 127) 128) 129) 130) 131) 132) 133) 134) 135) 136) 137) 138) 139) 140) 141) 142) 143) 144) 145) 146) 147) 148) 149) 150) 151) 152) 153) 154) 155) 156) 157) 158) 159) 160) 161) 162) 163) 164) 165) 166) 167) 168) 169) 170) 171) 172) 173) 174) 175) 176) 177) 178) 179) 180) 181) 182) 183) 184) 185) 186) 187) 188) 189) 190) 191) 192) 193) 194) 195) 196) 197) 198) 199) 200) 201) 202) 203) 204) 205) 206) 207) 208) 209) 210) 211) 212) 213) 214) 215) 216) 217) 218) 219) 220) 221) 222) 223) 224) 225) 226) 227) 228) 229) 230) 231) 232) 233) 234) 235) 236) 237) 238) 239) 240) 241) 242) 243) 244) 245) 246) 247) 248) 249) 250) 251) 252) 253) 254) 255) 256) 257) 258) 259) 260) 261) 262) 263) 264) 265) 266) 267) 268) 269) 270) 271) 272) 273) 274) 275) 276) 277) 278) 279) 280) 281) 282) 283) 284) 285) 286) 287) 288) 289) 290) 291) 292) 293) 294) 295) 296) 297) 298) 299) 300) 301) 302) 303) 304) 305) 306) 307) 308) 309) 310) 311) 312) 313) 314) 315) 316) 317) 318) 319) 320) 321) 322) 323) 324) 325) 326) 327) 328) 329) 330) 331) 332) 333) 334) 335) 336) 337) 338) 339) 340) 341) 342) 343) 344) 345) 346) 347) 348) 349) 350) 351) 352) 353) 354) 355) 356) 357) 358) 359) 360) 361) 362) 363) 364) 365) 366) 367) 368) 369) 370) 371) 372) 373) 374) 375) 376) 377) 378) 379) 380) 381) 382) 383) 384) 385) 386) 387) 388) 389) 390) 391) 392) 393) 394) 395) 396) 397) 398) 399) 400) 401) 402) 403) 404) 405) 406) 407) 408) 409) 410) 411) 412) 413) 414) 415) 416) 417) 418) 419) 420) 421) 422) 423) 424) 425) 426) 427) 428) 429) 430) 431) 432) 433) 434) 435) 436) 437) 438) 439) 440) 441) 442) 443) 444) 445) 446) 447) 448) 449) 450) 451) 452) 453) 454) 455) 456) 457) 458) 459) 460) 461) 462) 463) 464) 465) 466) 467) 468) 469) 470) 471) 472) 473) 474) 475) 476) 477) 478) 479) 480) 481) 482) 483) 484) 485) 486) 487) 488) 489) 490) 491) 492) 493) 494) 495) 496) 497) 498) 499) 500) 501) 502) 503) 504) 505) 506) 507) 508) 509) 510) 511) 512) 513) 514) 515) 516) 517) 518) 519) 520) 521) 522) 523) 524) 525) 526) 527) 528) 529) 530) 531) 532) 533) 534) 535) 536) 537) 538) 539) 540) 541) 542) 543) 544) 545) 546) 547) 548) 549) 550) 551) 552) 553) 554) 555) 556) 557) 558) 559) 560) 561) 562) 563) 564) 565) 566) 567) 568) 569) 570) 571) 572) 573) 574) 575) 576) 577) 578) 579) 580) 581) 582) 583) 584) 585) 586) 587) 588) 589) 590) 591) 592) 593) 594) 595) 596) 597) 598) 599) 600) 601) 602) 603) 604) 605) 606) 607) 608) 609) 610) 611) 612) 613) 614) 615) 616) 617) 618) 619) 620) 621) 622) 623) 624) 625) 626) 627) 628) 629) 630) 631) 632) 633) 634) 635) 636) 637) 638) 639) 640) 641) 642) 643) 644) 645) 646) 647) 648) 649) 650) 651) 652) 653) 654) 655) 656) 657) 658) 659) 660) 661) 662) 663) 664) 665) 666) 667) 668) 669) 670) 671) 672) 673) 674) 675) 676) 677) 678) 679) 680) 681) 682) 683) 684) 685) 686) 687) 688) 689) 690) 691) 692) 693) 694) 695) 696) 697) 698) 699) 700) 701) 702) 703) 704) 705) 706) 707) 708) 709) 710) 711) 712) 713) 714) 715) 716) 717) 718) 719) 720) 721) 722) 723) 724) 725) 726) 727) 728) 729) 730) 731) 732) 733) 734) 735) 736) 737) 738) 739) 740) 741) 742) 743) 744) 745) 746) 747) 748) 749) 750) 751) 752) 753) 754) 755) 756) 757) 758) 759) 760) 761) 762) 763) 764) 765) 766) 767) 768) 769) 770) 771) 772) 773) 774) 775) 776) 777) 778) 779) 780) 781) 782) 783) 784) 785) 786) 787) 788) 789) 790) 791) 792) 793) 794) 795) 796) 797) 798) 799) 800) 801) 802) 803) 804) 805) 806) 807) 808) 809) 810) 811) 812) 813) 814) 815) 816) 817) 818) 819) 820) 821) 822) 823) 824) 825) 826) 827) 828) 829) 830) 831) 832) 833) 834) 835) 836) 837) 838) 839) 840) 841) 842) 843) 844) 845) 846) 847) 848) 849) 850) 851) 852) 853) 854) 855) 856) 857) 858) 859) 860) 861) 862) 863) 864) 865) 866) 867) 868) 869) 870) 871) 872) 873) 874) 875) 876) 877) 878) 879) 880) 881) 882) 883) 884) 885) 886) 887) 888) 889) 890) 891) 892) 893) 894) 895) 896) 897) 898) 899) 900) 901) 902) 903) 904) 905) 906) 907) 908) 909) 910) 911) 912) 913) 914) 915) 916) 917) 918) 919) 920) 921) 922) 923) 924) 925) 926) 927) 928) 929) 930) 931) 932) 933) 934) 935) 936) 937) 938) 939) 940) 941) 942) 943) 944) 945) 946) 947) 948) 949) 950) 951) 952) 953) 954) 955) 956) 957) 958) 959) 960) 961) 962) 963) 964) 965) 966) 967) 968) 969) 970) 971) 972) 973) 974) 975) 976) 977) 978) 979) 980) 981) 982) 983) 984) 985) 986) 987) 988) 989) 990) 991) 992) 993) 994) 995) 996) 997) 998) 999) 1000) 1001) 1002) 1003) 1004) 1005) 1006) 1007) 1008) 1009) 1010) 1011) 1012) 1013) 1014) 1015) 1016) 1017) 1018) 1019) 1020) 1021) 1022) 1023) 1024) 1025) 1026) 1027) 1028) 1029) 1030) 1031) 1032) 1033) 1034) 1035) 1036) 1037) 1038) 1039) 1040) 1041) 1042) 1043) 1044) 1045) 1046) 1047) 1048) 1049) 1050) 1051) 1052) 1053) 1054) 1055) 1056) 1057) 1058) 1059) 1060) 1061) 1062) 1063) 1064) 1065) 1066) 1067) 1068) 1069) 1070) 1071) 1072) 1073) 1074) 1075) 1076) 1077) 1078) 1079) 1080) 1081) 1082) 1083) 1084) 1085) 1086) 1087) 1088) 1089) 1090) 1091) 1092) 1093) 1094) 1095) 1096) 1097) 1098) 1099) 1100) 1101) 1102) 1103) 1104) 1105) 1106) 1107) 1108) 1109) 1110) 1111) 1112) 1113) 1114) 1115) 1116) 1117) 1118) 1119) 1120) 1121) 1122) 1123) 1124) 1125) 1126) 1127) 1128) 1129) 1130) 1131) 1132) 1133) 1134) 1135) 1136) 1137) 1138) 1139) 1140) 1141) 1142) 1143) 1144) 1145) 1146) 1147) 1148) 1149) 1150) 1151) 1152) 1153) 1154) 1155) 1156) 1157) 1158) 1159) 1160) 1161) 1162) 1163) 1164) 1165) 1166) 1167) 1168) 1169) 1170) 1171) 1172) 1173) 1174) 1175) 1176) 1177) 1178) 1179) 1180) 1181) 1182) 1183) 1184) 1185) 1186) 1187) 1188) 1189) 1190) 1191) 1192) 1193) 1194) 1195) 1196) 1197) 1198) 1199) 1200) 1201) 1202) 1203) 1204) 1205) 1206) 1207) 1208) 1209) 1210) 1211) 1212) 1213) 1214) 1215) 1216) 1217) 1218) 1219) 1220) 1221) 1222) 1223) 1224) 1225) 1226) 1227) 1228) 1229) 1230) 1231) 1232) 1233) 1234) 1235) 1236) 1237) 1238) 1239) 1240) 1241) 1242) 1243) 1244) 1245) 1246) 1247) 1248) 1249) 1250) 1251) 1252) 1253) 1254) 1255) 1256) 1257) 1258) 1259) 1260) 1261) 1262) 1263) 1264) 1265) 1266) 1267) 1268) 1269) 1270) 1271) 1272) 1273) 1274) 1275) 1276) 1277) 1278) 1279) 1280) 1281) 1282) 1283) 1284) 1285) 1286) 1287) 1288) 1289) 1290) 1291) 1292) 1293) 1294) 1295) 1296) 1297) 1298) 1299) 1300) 1301) 1302) 1303) 1304) 1305) 1306) 1307) 1308) 1309) 1310) 1311) 1312) 1313) 1314) 1315) 1316) 1317) 1318) 1319) 1320) 1321) 1322) 1323) 1324) 1325) 1326) 1327) 1328) 1329) 1330) 1331) 1332) 1333) 1334) 1335) 1336) 1337) 1338) 1339) 1340) 1341) 1342) 1343) 1344) 1345) 1346) 1347) 1348) 1349) 1350) 1351) 1352) 1353) 1354) 1355) 1356) 1357) 1358) 1359) 1360) 1361) 1362) 1363) 1364) 1365) 1366) 1367) 1368) 1369) 1370) 1371) 1372) 1373) 1374) 1375) 1376) 1377) 1378) 1379) 1380) 1381) 1382) 1383) 1384) 1385) 1386) 1387) 1388) 1389) 1390) 1391) 1392) 1393) 1394) 1395) 1396) 1397) 1398) 1399) 1400) 1401) 1402) 1403) 1404) 1405) 1406) 1407) 1408) 1409) 1410) 1411) 1412) 1413) 1414) 1415) 1416) 1417) 1418) 1419) 1420) 1421) 1422) 1423) 1424) 1425) 1426) 1427) 1428) 1429) 1430) 1431) 1432) 1433) 1434) 1435) 1436) 1437) 1438) 1439) 1440) 1441) 1442) 1443) 1444) 1445) 1446) 1447) 1448) 1449) 1450) 1451) 1452) 1453) 1454) 1455) 1456) 1457) 1458) 1459) 1460) 1461) 1462) 1463) 1464) 1465) 1466) 1467) 1468) 1469) 1470) 1471) 1472) 1473) 1474) 1475) 1476) 1477) 1478) 1479) 1480) 1481) 1482) 1483) 1484) 1485) 1486) 1487) 1488) 1489) 1490) 1491) 1492) 1493) 1494) 1495) 1496) 1497) 1498) 1499) 1500) 1501) 1502) 1503) 1504) 1505) 1506) 1507) 1508) 1509) 1510) 1511) 1512) 1513) 1514) 1515) 1516) 1517) 1518) 1519) 1520) 1521) 1522) 1523) 1524) 1525) 1526) 1527) 1528) 1529) 1530) 1531) 1532) 1533) 1534) 1535) 1536) 1537) 1538) 1539) 1540) 1541) 1542) 1543) 1544) 1545) 1546) 1547) 1548) 1549) 1550) 1551) 1552) 1553) 1554) 1555) 1556) 1557) 1558) 1559) 1560) 1561) 1562) 1563) 1564) 1565) 1566) 1567) 1568) 1569) 1570) 1571) 1572) 1573) 1574) 1575) 1576) 1577) 1578) 1579) 1580) 1581) 1582) 1583) 1584) 1585) 1586) 1587) 1588) 1589) 1590) 1591) 1592) 1593) 1594) 1595) 1596) 1597) 1598) 1599) 1600) 1601) 1602) 1603) 1604) 1605) 1606) 1607) 1608) 1609) 1610) 1611) 1612) 1613) 1614) 1615) 1616) 1617) 1618) 1619) 1620) 1621) 1622) 1623) 1624) 1625) 1626) 1627) 1628) 1629) 1630) 1631) 1632) 1633) 1634) 1635) 1636) 1637) 1638) 1639) 1640) 1641) 1642) 1643) 1644) 1645) 1646) 1647) 1648) 1649) 1650) 1651) 1652) 1653) 1654) 1655) 1656) 1657) 1658) 1659) 1660) 1661) 1662) 1663) 1664) 1665) 1666) 1667) 1668) 1669) 1670) 1671) 1672) 1673) 1674) 1675) 1676) 1677) 1678) 1679) 1680) 1681) 1682) 1683) 1684) 1685) 1686) 1687) 1688) 1689) 1690) 1691) 1692) 1693) 1694) 1695) 1696) 1697) 1698) 1699) 1700) 1701) 1702) 1703) 1704) 1705) 1706) 1707) 1708) 1709) 1710) 1711) 1712) 1713) 1714) 1715) 1716) 1717) 1718) 1719) 1720) 1721) 1722) 1723) 1724) 1725) 1726) 1727) 1728) 1729) 1730) 1731) 1732) 1733) 1734) 1735) 1736) 1737) 1738) 1739) 1740) 1741) 1742) 1743) 1744) 1745) 1746) 1747) 1748) 1749) 1750) 1751) 1752) 1753) 1754) 1755) 1756) 1757) 1758) 1759) 1760) 1761) 1762) 1763) 1764) 1765) 1766) 1767) 1768) 1769) 1770) 1771) 1772) 1773) 1774) 1775) 1776) 1777) 1778) 1779) 1780) 1781) 1782) 1783) 1784) 1785) 1786) 1787) 1788) 1789) 1790) 1791) 1792) 1793) 1794) 1795) 1796) 1797) 1798) 1799) 1800) 1801) 1802) 1803) 1804) 1805) 1806) 1807) 1808) 1809) 1810) 1811) 1812) 1813) 1814) 1815) 1816) 1817) 1818) 1819) 1820) 1821) 1822) 1823) 1824) 1825) 1826) 1827) 1828) 1829) 1830) 1831) 1832) 1833) 1834) 1835) 1836) 1837) 1838) 1839) 1840) 1841) 1842) 1843) 1844) 1845) 1846) 1847) 1848) 1849) 1850) 1851) 1852) 1853) 1854) 1855) 1856) 1857) 1858) 1859) 1860) 1861) 1862) 1863) 1864) 1865) 1866) 1867) 1868) 1869) 1870) 1871) 1872) 1873) 1874) 1875) 1876) 1877) 1878) 1879) 1880) 1881) 1882) 1883) 1884) 1885) 1886) 1887) 1888) 1889) 1890) 1891) 1892) 1893) 1894) 1895) 1896) 1897) 1898) 1899) 1900) 1901) 1902) 1903) 1904) 1905) 1906) 1907) 1908) 1909) 1910) 1911) 1912) 1913) 1914) 1915) 1916) 1917) 1918) 1919) 1920) 1921) 1922) 1923) 1924) 1925) 1926) 1927) 1928) 1929) 1930) 1931) 1932) 1933) 1934) 1935) 1936) 1937) 1938) 1939) 1940) 1941) 1942) 1943) 1944) 1945) 1946) 1947) 1948) 1949) 1950) 1951) 1952) 1953) 1954) 1955) 1956) 1957) 1958) 1959) 1960) 1961) 1962) 1963) 1964) 1965) 1966) 1967) 1968) 1969) 1970) 1971) 1972) 1973) 1974) 1975) 1976) 1977) 1978) 1979) 1980) 1981) 1982) 1983) 1984) 1985) 1986) 1987) 1988) 1989) 1990) 1991) 1992) 1993) 1994) 1995) 1996) 1997) 1998) 1999) 2000) 2001) 2002) 2003) 2004) 2005) 2006) 2007) 2008) 2009) 2010) 2011) 2012) 2013) 2014) 2015) 2016) 2017) 2018) 2019) 2020) 2021) 2022) 2023) 2024) 2025) 2026) 2027) 2028) 2029) 2030) 2031) 2032) 2033) 2034) 2035) 2036) 2037) 2038) 2039) 2040) 2041) 2042) 2043) 2044) 2045) 2046) 2047) 2048) 2049) 2050) 2051) 2052) 2053) 2054) 2055) 2056) 2057) 2058) 2059) 2060) 2061) 2062) 2063) 2064) 2065) 2066) 2067) 2068) 2069) 2070) 2071) 2072) 2073) 2074) 2075) 2076) 2077) 2078) 2079) 2080) 2081) 2082) 2083) 2084) 2085) 2086) 2087) 2088) 2089) 2090) 2091) 2092) 2093) 2094) 2095) 2096) 2097) 2098) 2099) 2100) 2101) 2102) 2103) 2104) 2105) 2106) 2107) 2108) 2109) 2110) 2111) 2112) 2113) 2114) 2115) 2116) 2117) 2118) 2119) 2120) 2121) 2122) 2123) 2124) 2125) 2126) 2127) 212

V は $C_k \in \bar{C}$ により L , the complete maximum principle

をみたす. Theorem の (4) をみたす pseudo-resolvent

$\{V_p\}$ が \bar{C} 上に存在し $k \geq 1$ かつ

$f(x) = 0$ ならば $f \in C_k \in L$ ならば $k \geq 1$ かつ

$$g(x) = g_j(x) \equiv \begin{cases} U_p f|_{R^3}(x) & , x \in R^3 \\ 0 & , x = \partial \end{cases}$$

とすれば,

$$(I + pV)g = Vf$$

$$(I + pV)V_p f = Vf$$

をみたすから, §2 Proposition 2 により $g = V_p f$. U_p は conservative をみたすから, $f \uparrow \chi_{R^3}$ ならば, $g \uparrow \chi_{R^3}$.

従って, $\chi_{R^3} = pV_p \chi_{R^3}$. 一方,

$$pV_p (\chi_{R^3} + \chi_\partial) = pV_p 1 \leq 1 = \chi_{R^3} + \chi_\partial$$

従って, $pV_p \chi_\partial \leq \chi_\partial$. 故に, $x \in R^3$ ならば $(2, V_p \chi_\partial(x))$

$= 0$. これは (4) に反する. ($V \chi_\partial(x) = 1$).