

# 近似理論実行への Gleichverteilungの応用

日大理工 宇野利雄, 浜田伸植

パラメータの1次式として函数近似の公式を作ろうとするとき、基本となる Haar の理論がある。<sup>1)</sup> これを近似式作成に適用するための一実行手段を考察したものがこの報告の要旨である。最初にこの考察を検討するための基礎として、一応 Haar の理論を紹介する。

## § 1. 定義

$M$  : 任意の空間における有界閉集合

$P$  :  $M$  に所属する任意の点

$f(P)$  :  $M$  において定義された任意の実数値連続函数

$f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)$  :  $M$  において定義された、きまつた  $n$  個の連続函数 (実数値),  $\forall P \in M$  は  $f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)$  は 1 次独立なとしておく。

$$\text{Max}_{P \in M} | f(P) - \{ c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P) + \dots + c_n f_n(P) \} | \text{ を最小ならし}$$

めるような係数  $c_1, c_2, \dots, c_n$  を求めるのがわれわれの問題である。

$(n+1)$  次元空間  $E_{n+1}$ , その座標  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , において次の3つの集合を考える。

$$K : \text{Max}_{P \in M} | a_0 f(P) + a_1 f_1(P) + \dots + a_n f_n(P) | \leq 1 \quad \text{とす}$$

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$  の集合。

$f$  :  $P \in \mathcal{M}$  にゆきわたらせるとき  $(f(P), f_1(P), \dots, f_n(P))$

および  $(-f(P), -f_1(P), \dots, -f_n(P))$  をあわせ集合

$\bar{K}$  :  $f$  を含む最小の凸集合

あきらかにこれらの二つの集合はいずれも原点につき対称である。

## § 2. $\bar{K}$ の性質

i) まず  $\bar{K}$  は有界である。これは  $f, f_1, \dots, f_n$  が 1 次独立であることからきている。もし有界でない点列  $(a_i^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$  が  $\bar{K}$  の中にこれたとする。  $\text{Max}_i |a_i^{(k)}| = \alpha_k$  とすると、  $t_i^{(k)} = a_i^{(k)} / \alpha_k$  と作れば  $|t_i^{(k)}| \leq 1$  であり、且つ

$$\left| \sum_{i=0}^n t_i^{(k)} f_i(P) \right| \leq \frac{1}{\alpha_k}$$

となる ( $f(P) = f_0(P)$  としむ)。  $k \rightarrow \infty$  のときの  $(t_0^{(k)}, t_1^{(k)}, \dots, t_n^{(k)})$  の集積点の一つを  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  とすると

$$t_0 f(P) + t_1 f_1(P) + \dots + t_n f_n(P) = 0$$

となるが、  $t_i^{(k)}$  のうちのどれか一つは  $\pm 1$  であるので  $t_0, t_1, \dots, t_n$  の中にも  $\pm 1$  であるものがはくまれ、これら全部が 0 ということにならなうて  $f(P), \dots, f_n(P)$  の 1 次独立に反する。

ii)  $\bar{K}$  は凸集合である。正数  $\lambda, \mu$  を  $\lambda + \mu = 1$  として不等式

$$\begin{aligned} \left| \sum (\lambda a_i^{(1)} + \mu a_i^{(2)}) f_i(P) \right| \\ \leq \lambda \left| \sum a_i^{(1)} f_i(P) \right| + \mu \left| \sum a_i^{(2)} f_i(P) \right| \end{aligned}$$

から明白である。

iii)  $\bar{K}$  の境界上の点では

$$\text{Max}_{P \in \mathcal{M}} |a_0 f(P) + a_1 f_1(P) + \dots + a_n f_n(P)| = 1$$

である。また逆にこうなる点はいずれも  $\bar{K}$  の境界上にある。

$(a_0, \dots, a_n)$  を境界上の点としをとき, 任意の  $P \in \mathcal{M}$  に対しては

$$|a_0 f(P) + \dots + a_n f_n(P)| \leq 1$$

であるが, 左辺の  $\text{Max}$  を与えるような  $P$  に対しては, この  $\text{Max} = 1$  ということである. もし  $\text{Max} < 1$  であるとすると  $a_0, \dots, a_n$  に因する  $\text{Max}$  の連続性から,  $(a_0, \dots, a_n)$  の近傍でも  $\text{Max} < 1$  となり, この点が境界上の点であることに反する.

次に  $\mathcal{R}$  の内点  $(a_0, \dots, a_n)$  で  $\text{Max} = 1$  であつたとすると, この  $\text{Max}$  を与える  $P$  につき  $f_i(P)$  の全部が 0 であることはないから, そのうちの 0 でないどれか 1 つを  $f_{k_0}(P)$  とする. このとき  $a_{k_0}$  の代りに  $a_{k_0} + \delta$  とおき, 適當に  $\delta$  の符号をとれば,  $|\delta|$  がいかに小さくとも

$$\left| \sum_i a_i f_i(P) + \delta f_{k_0}(P) \right| > 1$$

とすることができて, 点

$$(a_0, \dots, a_{k_0-1}, a_{k_0} + \delta, a_{k_0+1}, \dots, a_n)$$

が  $\mathcal{R}$  の外にあることになる,  $(a_0, \dots, a_n)$  が内点であることに反する.

§ 3 上の  $\mathcal{R}$  を  $M$  倍に相似拡大した集合を  $\mathcal{R}_M$  とすると,  $\mathcal{R}_M$  において

$$\left| \sum_i a_i f_i(P) \right| \leq M \text{ となり, またその境界上では } \text{Max}_{P \in \mathcal{M}} |\sum_i a_i f_i(P)| = M \text{ である.}$$

もし  $f(P)$  の最良近似  $\sum_{i=1}^n c_i f_i(P)$  が求まり

$$\text{Max}_{P \in \mathcal{M}} \left| f(P) - \sum_{i=1}^n c_i f_i(P) \right| = \varepsilon$$

であつたとすると, まず点  $Q(1, -c_1, -c_2, \dots, -c_n)$  は  $\mathcal{R}_\varepsilon$  の境界に所ざくする点になつてゐる. 次にもしこの  $\mathcal{R}_\varepsilon$  の境界で  $x_0$  座標  $a_0$  が  $> 1$  である点があるとすると

$$\text{Max}_{P \in \mathcal{M}} \left| f(P) - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{a_0} f_i(P) \right| = \frac{\varepsilon}{a_0}$$

となって上の  $\sum_{i=1}^n c_i f_i(P)$  が最良近似で存在することになる。これらのことから、 $\bar{K}_\varepsilon$  は  $\alpha_0$  に垂直な平面  $\alpha_0 = 1$  を支持面 (Stützebene) とし、 $Q$  がその支持面と  $\bar{K}_\varepsilon$  との共通点であることがわかる。

すなわち最良近似を求めることは支持面が  $\alpha_0 = 1$  である凸集合  $\bar{K}_\varepsilon$  をさがし、次に  $\bar{K}_\varepsilon$  と  $\alpha_0 = 1$  との接点の座標をさがすことになる。あるいは相似変換をして考えれば

A)  $\bar{K}$  の支持面で  $\alpha_0$  軸に垂直なものを  $\alpha_0 = d$  を求め

B) 次に  $\alpha_0 = d$  との接点の座標  $(d, a_1, \dots, a_n)$  をさがす。

C) 最良近似の係数は (B) をつかって

$$c_1 = -\frac{a_1}{d}, \quad c_2 = -\frac{a_2}{d}, \quad \dots \quad c_n = -\frac{a_n}{d} \quad \text{となる。}$$

なおこのとき最良近似での最大誤差は  $\varepsilon = 1/d$  である。

#### §4 $\bar{K}$ と $\bar{K}^\circ$ との相反性

$\bar{K}$  の境界上の点を  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  とすると  $\mathcal{N}K$  における任意の  $P$  に対し、

$$-1 \leq a_0 f(P) + a_1 f_1(P) + \dots + a_n f_n(P) \leq 1$$

であるが、特に  $\max |a_0 f(P) + \dots + a_n f_n(P)|$  の値を与えるような  $P_0$  については

$$a_0 f(P_0) + a_1 f_1(P_0) + \dots + a_n f_n(P_0)$$

は +1 または -1 となる。このことから  $\bar{K}$  に属する任意の 1 点を  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  とすると

$$a_0 t_0 + a_1 t_1 + \dots + a_n t_n \leq 1$$

が成立し、同じく  $\bar{K}$  に属する 1 点  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$  があって

$$\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n = 1$$

であることがわかる。このことは

「 $\tilde{K}$  の境界上の点の座標を  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  として平面

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 1$$

を作ると、これは  $\tilde{K}$  の支持面になる。」

ということに他ならない。なおこの関係は単位球面  $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$  についての極 (pole) および極面 (polar) の関係になっているので、簡単のため以後この言葉をつかう。

$\tilde{K}$  は凸図形とは限らないが、それを包む最小凸図形  $\overline{\tilde{K}}$  にまで拡大しても支持面の関係はそのままに言える。すなわち

「単位球面について  $\tilde{K}$  の境界上の点の極面を作ると、これは  $\overline{\tilde{K}}$  の支持面である。」

逆に  $\overline{\tilde{K}}$  の任意の支持面の極が  $\tilde{K}$  の境界上の点になることも次のようにしてわかる。 $\overline{\tilde{K}}$  の任意の支持面を  $u_0x_0 + u_1x_1 + \dots + u_nx_n = \lambda$  とする。

$\tilde{K}$  の中に原点が包まれていないことから、 $\tilde{K}$  の境界上の点  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$

$$\text{で } \frac{u_0}{a_0} = \frac{u_1}{a_1} = \dots = \frac{u_n}{a_n}$$

となるものが必ずあり、これについて  $a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 1$  が  $\overline{\tilde{K}}$  の支持面になるが、これは前の支持面と平行であるから、前の支持面またはそれと対称なものと一致する。

次に

「単位球面について  $\tilde{K}$  の境界上の点の極面を作ると、これは  $\tilde{K}$  の支持面である。」

$\tilde{K}$  の境界上の点  $(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$  とする。この極面

$$\bar{a}_0x_0 + \bar{a}_1x_1 + \dots + \bar{a}_nx_n = 1$$

の上には、極、極面の相反性から  $(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$  を通る  $\tilde{K}$  の支持面の極となる  $\tilde{K}$  の境界上の点がある。もし上の極面が  $\tilde{K}$  の支持面でなければ、これ

と平行な支持面で  $\bar{a}_0 x_0 + \bar{a}_1 x_1 + \dots + \bar{a}_n x_n = d$

なるものがあり,  $d > 1$  である. この支持面上の  $\bar{K}$  の点を  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$

とすると,

$$a_0 \bar{a}_0 + a_1 \bar{a}_1 + \dots + a_n \bar{a}_n = d > 1$$

であるが, 一方

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 1$$

は前のことから  $\bar{K}$  の支持面上にあり, したがって  $\bar{K}$  に属する任意の点

$(x_0, x_1, \dots, x_n)$  に対して

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq 1$$

となって上のことと矛盾する. ゆえに上の極面は  $\bar{K}$  の支持面でなければ

ならない. 次に  $\bar{K}$  の任意の支持面の極が  $\bar{K}$  の境界上の点になること

は前の場合と同じように結論できる. 要約すれば

「 $\bar{K}$  と  $\bar{K}$  とは単位球について相反の關係になっている」

ということができる.

以上  $\bar{K}$  と  $\bar{K}$  との相反性を利用すると, §3 においてまとめ  
 たい A), B), C) 3つの手つづきが一歩のうちに轉換される

A\*)  $\bar{K}$  の境界と  $x_0$  軸との交点を求め, その交点の座標  
 を  $x_0 = \frac{1}{d}$  とする.

B\*) 上の交点を通る  $\bar{K}$  の支持面を求めて

$$d x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 1$$

とする

C\*) 最良近似の係数は B\*) をつかって

$$C_1 = -\frac{a_1}{d}, \quad C_2 = -\frac{a_2}{d}, \quad \dots, \quad C_n = -\frac{a_n}{d}$$

となる。

## §5 実行上の提案

最良近似を求めるための §3 での手づかき  $A)$ ,  $B)$ ,  $C)$  は  $\bar{\rho}$  を求めにくいのでやりにくい。相反性を利用して轉換した  $A^*)$ ,  $B^*)$ ,  $C^*)$  については  $\bar{\rho}$  の方がずうと具体的なので前よりは扱いやすいように思われる。それにしても  $\bar{\rho}$  を実際に作るのは実はさう簡単でない。そこで次のようなことを考えよう。

$\mathcal{M}$  内に  $n$  個の点  $P_0, P_1, \dots, P_n$  をとり、これをつかって  $E_{n+1}$  に  $(n+1)$  個の直

$$Q_0(\varepsilon_0 f(P_0), \varepsilon_0 f_1(P_0), \dots, \varepsilon_0 f_n(P_0))$$

$$Q_1(\varepsilon_1 f(P_1), \varepsilon_1 f_1(P_1), \dots, \varepsilon_1 f_n(P_1))$$

— — — — —

$$Q_{n+1}(\varepsilon_n f(P_n), \varepsilon_n f_1(P_n), \dots, \varepsilon_n f_n(P_n))$$

を作る。ここには  $\varepsilon_i = +1$  または  $-1$  のいずれかである。これら  $(n+1)$  個の直は互いに断交している。そこでこれらの点で定められる平面を作る。この平面の多角形  $Q_0 Q_1 \dots Q_n$  の内部にある直はもとより  $\bar{\rho}$  に断交する。この平面がこの多角形の内部において  $x_i$ -軸に交ればその交点の座標  $x_i = D$  は §4.  $A^*)$  における  $1/d$  より大きくならない。

今もし  $P_0, P_1, \dots, P_n$  を適当にとって交点の座標  $D$  がこの  $1/d$  に等しくなれば、この多角形が  $\bar{\rho}$  の 1 支持面となり且つ  $1/d = D$  となるわけである。そこで

$$\text{Max}_{P_i \in \mathcal{M}} D(P_0, P_1, \dots, P_n),$$

(ただし交点が多角形  $Q_0 Q_1 \dots Q_n$  の内部にある場合) を求めて

のよみの結果に到達しようというのである。

$D(P_0, P_1, \dots, P_n)$  は  $(n+1)$  個の点  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$  を通る平面と  $x_0$ -軸との交点である。この平面の方程式を

$$A_0 x_0 + A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = 1$$

とすると、 $A_0, A_1, \dots, A_n$  は連立 1 次方程式

$$A_0 \varepsilon_i f(P_i) + A_1 \varepsilon_i f_1(P_i) + \dots + A_n \varepsilon_i f_n(P_i) = 0$$

$$(i=0, 1, \dots, n)$$

の解として求まる。D は  $x_0$ -軸との交点の座標であるから、 $D = 1/A_0$  に外ならず、したがって  $A_0 = d$  ということになり、またこれに対応する最良近似の最大誤差は D のものになる。

ところでこの  $\text{Max } D(P_0, \dots, P_n)$  を求めるのは正攻法では容易でない。そこで手向をいとおすに試行錯誤法で片端から  $P_0, \dots, P_n$  を与えて  $A_0$  を計算し、その中で最大のものを見つけようとする。これにしても全くおたらのめ試行錯誤では取りとめもなくなるであろうと思われるので  $(P_0, \dots, P_n)$  の走査を Weyl の Gleichverteilung を応用したいわゆる擬モントテカル法によってたどろうと考へ、MC が 1 次元の実数区間である場合について実行してみた 1 例が次節の結果である。

## § 6. 一つの実行例

区間  $\left[ -\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}, +\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} \right]$ ,  $x$  の 7 次式による

$$f(x) = \log_{10} \frac{1+x}{1-x} \quad \text{の近似.}$$

対称性から  $x$  の奇数次項のみと考へるので本文での  $f_0(x)$  を  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^3$ ,  $f_3(x) = x^5$ ,  $f_4(x) = x^7$



のよりにとる。また対称性から  $x$  の正部分  $[0, +\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} = 0.51949385]$  についてのみ考察すればよい。

一方これらのチェビシェフ近似を作るとこれらの誤差最大の真値はほぼ

$$x_k = \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} \cos \frac{k\pi}{9}, \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

にある。§5 で動かす真値  $P_k$  をこの  $x_k$  の附近に動かしたとき、また目的に到達しように思える。なお端の真値は誤差最大であるのが通例であるので、ここでは  $P_0$  は  $x_0 = \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}$  の位置に固定した。

これにより

$$P_0 = 0.51949385$$

$$0.4782 \leq P_1 \leq 0.4982$$

$$0.3829 \leq P_2 \leq 0.4129$$

$$0.2397 \leq P_3 \leq 0.2797$$

$$0.0602 \leq P_4 \leq 0.1202$$

の向で、 $P_1, P_2, P_3, P_4$  を動かす。また §5 での  $\varepsilon_i$  は  $\varepsilon_i = (-1)^i$  とし、 $D(P_1, P_2, P_3, P_4)$  のできるなかで最大のものを求めることにした。

この探索が 4次元直方体の中で行われるために Gleichverteilung を利用し、 $P_1, P_2, P_3, P_4$  の座標がそれぞれ

$$0.4782 + 0.02 [t_{31}]$$

$$0.3829 + 0.03 [t_{32}]$$

$$0.2397 + 0.04 [t_{33}]$$

$$0.0602 + 0.06 [t_{34}]$$

となるように、 $k_2=0, 1, 2, \dots$  として直方体内を走査した。ここで  
 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  はいずれも無理数であり、かつ互にかいた比が無理数  
 であるものである。ここで

$\xi_1 = \sqrt{2} - 1, \xi_2 = \sqrt{3} - 1, \xi_3 = \sqrt{5} - 2, \xi_4 = \sqrt{7} - 2$   
 として実行した。

$k_2 = 320$  まで計算したところでは  $A_0$  の値は  $4.88 \times 10^5$  乃至  
 $5.32 \times 10^5$  の間を行きまわっていた。

$A_0$  については最小をさがすことにするが、その最小は  $k_2 = 202$   
 のとき

$$P_0 = 5.1949385 \times 10^{-1}$$

$$P_1 = 4.9162278 \times 10^{-1}$$

$$P_2 = 4.0912785 \times 10^{-1}$$

$$P_3 = 2.6712925 \times 10^{-1}$$

$$P_4 = 8.6705756 \times 10^{-2}$$

である。  $A_0 = 4.8819870 \times 10^5$  であった。

さらに小さくしよべるために、上に得られた値の附近をさらに  
 調べてさがすことにし、

$$0.484 \leq P_1 \leq 0.496, \quad 0.397 \leq P_2 \leq 0.413$$

$$0.260 \leq P_3 \leq 0.268, \quad 0.085 \leq P_4 \leq 0.097$$

の向で同じ方法により 64 回の計算を行った。今度は  $A_0$  は  
 $4.85 \times 10^5$  乃至  $4.97 \times 10^5$  の間を行きまわたり 最小は  
 $k_2 = 1$  のときであって

$$P_0 = 5.1949385 \times 10^{-1}$$

$$P_1 = 4.8897056 \times 10^{-1}$$

$$P_2 = 4.0171281 \times 10^{-7}$$

$$P_3 = 2.6188854 \times 10^{-7}$$

$$P_4 = 9.2749016 \times 10^{-2}$$

となり,  $A_0 = 4.8549712 \times 10^5$  であつた。この最後のもの  
につきさらに  $A_1, A_2, A_3, A_4$  を計算し近似の係数  $C_i = -A_i/A_0$   
を求めたものは次のおりにあつた。

$$C_1 = 8.6855417 \times 10^{-7}$$

$$C_2 = 2.9115339 \times 10^{-7}$$

$$C_3 = 1.5360268 \times 10^{-7}$$

$$C_4 = 2.1140665 \times 10^{-7}$$

近似式は

$$\log_{10} \frac{1+x}{1-x} \doteq C_1 x + C_2 x^3 + C_3 x^5 + C_4 x^7$$

であり、最大誤差は ほぼ

$$1/A_0 = 2.1 \times 10^{-6}$$

の近くになる見込みのものである。

実際にこれについて誤差曲線を計算してみると、ほとんど  
よく最良近似の条件(誤差の極大、極小が絶対値等しく、符号  
が交互であること)をみたしている。

