

Title	三角多項式による函数の近似について (「近似理論の研究」報告集)
Author(s)	洲之内, 源一郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1968), 36: 29-36
Issue Date	1968-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/107595
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

三角多項式による函数の近似について

東北大理 洲之内源一郎

§1 はしがき

$f(x)$ を週期 2π の連続函数とし、ルムは C -ルムとする。凡ゆる m 次の三角多項式 $T_n(x)$ を考へ、 $\|f - T_n\|$ の下限を $f(x)$ の m 次の最良近似といひ $E_n(f)$ とかく。よく知られてゐるやうに $E_n(f)$ に到達する m 次の三角多項式 $B_n(x) \equiv B_n(x, f)$ が存在し、しかも唯一つである。すなわち

$$\|f - B_n\| = E_n(f).$$

しかし $B_n(x, f)$ は f の上の線形作用素と存らなりので、 f のフーリエ級数の部分和をほぼその線形演算による近似を調べることに有用である。

例えば $f \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) ならば $E_n(f) = O(n^{-\alpha})$ である。 f のフーリエ級数の m 次部分和 $s_n(x)$ による近似は L^2 -ルムの時は最良であるが、 C -ルムでは

$$\|f - s_n\| = O(n^{-\alpha} \log n)$$

となり、この $\log n$ の項を取去ることができな事は古く H. Lebesgue によつて示されてゐる。しかし $s_n(x)$ の算術平均

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(x)$$

いわゆる Fejér 和 $\sigma_n(x)$ をとると

$$\|f - \sigma_n\| = O(n^{-\alpha})$$

と存するところが S. Bernstein によって示された。しかし Fejér 和 σ_n による近似の最高次数は $O(n^{-1})$ でこれ以上よく存しない。もしも

$$\|f - \sigma_n\| = o(n^{-1})$$

ならば $f(x)$ は定数函数に限るのである。これは単位円に属する Dirichlet 問題の解のわゆる Poisson 積分 $f(r, x)$ についてと同様に, Poisson 積分から境界函数 $f(x)$ への半径方向での近づく方が

$$\|f(r, x) - f(x)\| = o(1-r), \quad (r \uparrow 1)$$

と存すれば $f(x)$ は定数函数に限るのである。

この現象に着目して J. Favard [1] は 1947 年 Nancy における調和解析のコロキユームで次のような問題を提出した。"函数の与えられた線形近似法に属して近似の最高次数 n , それに到達する函数族を決定せよ" というのである。その後 M. Zemaný [2], G. Alexits [3], P.L. Butzer [4] などによって特殊な場合について, 特殊な方法での問題が解かれたが, これの一般的な解法および最良近似との関係などについて述べたい。洲之内-渡利 [5], 洲之内 [6] 参照。

§2. 近似法の飽和について。

(定義) $P_n(x) \equiv P_n(x, f)$ を $f(x)$ のある線形近似法でパラメータ n を持つものとする。いま正の減少函数 $\varphi(n)$ とある trivial な非零函数族 \mathcal{F} とが存在して

$$(1) \quad \|f - P_n\| = o\{\varphi(n)\}$$

と存するのは f がこの近似法の不変要素の時に限り,

$$(2) \quad \|f - P_n\| = O\{\varphi(n)\}$$

と存在するのは $f \in R$ の時に限り存在し、この近似法は次数 $\varphi(n)$ の函数族 $\{A_k\}$ によって飽和に達し得る。

こゝでは f と他の周期的有界変動偶函数 $G_n(x)$ との乗積による線形作用素 $P_n(x, f) = (f * dG_n)(x)$ による近似に限つて考へる。こゝで f のフーリエ級数 S

$$S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x)$$

と $G_n(x)$ の Fourier-Stieltjes 級数 S

$$S(dG_n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(n)} \cos kx \quad (g_0^{(n)} = 1)$$

と f の時

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(n)} A_k(x)$$

を考へると x に依る。もちろん G_n が有界変動であるから n を固定すれば $P_n(x)$ は連続函数になっている。

(定理1) $\varphi(n)$ は正の減少函数、 $\psi(k) \neq 0$ ($k=1, 2, \dots$) とし

$$(3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - g_k^{(m)}}{\varphi(m)\psi(k)} = c \neq 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

と仮定する。この時

$$(4) \quad \|f - P_n\| = o\{\varphi(n)\}$$

と存在するのは $f(x)$ が定数に限る。

$$(5) \quad \|f - P_n\| = O\{\varphi(n)\}$$

ならば形式的に三角級数

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) A_k(x)$$

ある L^∞ に属する函数 $f^\psi(x)$ のフーリエ級数である。

従って (6) が $f^\psi \in L^\infty$ のフーリエ級数である。

$$(7) \quad \lambda_k(n) = \frac{1 - g_k(n)}{\varphi(n)\psi(k)}$$

が $n \rightarrow \infty$ 一様 (L^∞, L^∞) -連続因子存在は

$$\|f - P_n\| = O\{\varphi(n)\}$$

の近似度である。

(証明) $f(x) - P_n(x)$ のフーリエ級数は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{1 - g_k(n)\} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

であるから、フーリエ級数の計算によつて

$$(8) \quad \{1 - g_k(n)\} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - P_n) \cos kx dx.$$

k を固定し $n \rightarrow \infty$ とし、(3) と (4) を用ひて $a_k = 0$ ($k=1, 2, \dots$)

同様 $b_k = 0$ ($k=1, 2, \dots$).

(5) の仮定では $\|f - P_n\|/\varphi(n)$ が $n \rightarrow \infty$ 一様有界故、 C を $L^\infty \wedge$

embed L^∞ の弱*-compact 性を用ひる。(8) と (5) と (3) とから

$$\psi(k) a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(x) \cos kx dx \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\psi(k) b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(x) \sin kx dx \quad (k=1, 2, \dots)$$

なる $f^\psi \in L^\infty$ が存在する。

従って (7) が $n \rightarrow \infty$ (L^∞, L^∞) -連続因子存在は仮定から求むる近似度が成立することを容易に明らかである。

(注意) 定理1から多少の仮定の下で, (3)が成立すれば $\varphi(m)$ が飽和の次数を定め, $\psi(k)$ が飽和の函数柱を定めることが分る. (しかし A.H.)

Turetskii [7] は $P_n(x) = P_n(x, f)$ が $f \in L^\infty$ に対し

$$\|P_n(x, f)\|_\infty \leq M \|f\|_\infty$$

を満足するならば (3)の仮定の下で無条件に $\|f - P_n\| = O\{\varphi(m)\}$ の近似が成立するといつてゐるが, この証明は完全では無い. (真偽は不明)

§3. 近似の直接定理

上の一般定理で (6) が L^∞ の函数のフーリエ級数であるという事は f との f の語で表わすことが出来る. 特に $\psi(k) = k^m$ で m が正の偶数ならば f の m 次導函数 $f^{(m)}(x) \in L^\infty$ であり, m が正の奇数ならば f の共軛函数 \tilde{f} の m 次導函数 $\tilde{f}^{(m)}(x) \in L^\infty$ である.

しかし近似度を与える直接定理の条件 $\lambda_k(n)$ が (L^∞, L^∞) -持続因子であることの検証は複雑であるので, この問題を考えたり. いま $g_k(n)$ が特に $g(\frac{k}{n})$ の形をした時だけに限ることにする. 通常の線形和法の方法ではこの形の事が多い. この時は (7) は

$$\frac{1 - g(\frac{k}{n})}{\varphi(\frac{k}{n})} = \lambda(\frac{k}{n})$$

の形となるが, この時 $\lambda(u)$ ($0 \leq u \leq \infty$) が偶函数で有界変動函数の Fourier-Stieltjes 積分によつて表現されれば, Poisson の和の公式を用いて $\lambda(\frac{k}{n}) \in (L^0, L^0)$ がわかる.

$g(u)$ が $L(0, \infty)$ の函数の Fourier 積分として表現されるための十分条件はこの場合後にたつのは次の二つがある.

(1) Beurling の条件

$g(u)$ が絶対連続で g, g' が共に $L^2(0, \infty)$ に属する.

(2) B. Nagy の条件

$g(u)$ が絶対連続で $g' \in BV$, $\int_0^{\infty} u |dg'(u)| < \infty$.

ただし $0, a_1, \dots, a_s$ 以外の点の近傍で BV の時は, この特異点で

$$\int_0^{\infty} u |dg'(u)|, \int_0^{a_i-0} + \int_{a_i+0}^{\infty} |u-a_i| \log \frac{1}{|u-a_i|} |dg'(u)|,$$

$$\int_0^{\infty} u |dg'(u)| < \infty \quad \text{である.}$$

これらを用いて知られたる総和法による近似の大部分, 例えば次表の

ようにするのは総和の問題を完全に解決することが出来る.

近似法	$g_k(n)$	総和次数	総和後
Cesàro	$\begin{cases} (1-\frac{k}{n}) & (k < n) \\ 0 & (k \geq n) \end{cases}$	$n-1$	$f' \in L^\infty$
Poisson	r^k	$1-r$	$f \in L^\infty$
Gauss	$e^{-k^2 r}$	r	$f''(x) \in L^\infty$
Rogosinski	$\cos \frac{k\pi}{2n+1}$	$n-2$	$f''(x) \in L^\infty$
Riesz	$\begin{cases} \{1 - (\frac{k}{n})^\lambda\}^p & (k < n) \\ 0 & (k \geq n) \end{cases}$	$n^{-\lambda}$	$f^{(\lambda)}(x) \in L^\infty$

== $f^{(\lambda)}$ とは $\sum n^\lambda A_n(x)$ を γ -リ級数とす可函数のことである.

特に

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 1 - \left(\frac{k}{n+1} \right)^\lambda \right\} A_k(x) \equiv R_n(x)$$

とす子と, 飽和の次数は $O(n^{-\lambda})$ でありから λ が大きくおまほい ϵ としてもより近似が得られる。

§ 4. 飽和近似と最良近似.

飽和近似と最良近似との間には次の関係が成立つ。

(定理 2) $T_n(f)$ が線形近似法で

$$(1) \quad \|T_n(f)\|_{\infty} \leq M_1 \|f\|_{\infty}$$

$$(2) \quad \|f - T_n(f)\|_{\infty} \leq M_2 \cdot n^{-\lambda} \|f^{(\lambda)}\|_{\infty} \quad (\lambda > 0)$$

ならば $0 < \alpha < \lambda$ の時最良近似が

$$E_n(f) = O(n^{-\alpha})$$

なる函数 f に対し, T_n による近似は同じ次数の近似度をもつ。すなわち

$$\|f - T_n(f)\| = O(n^{-\alpha}).$$

この証明には次の補題がある。

(補題) $\|f - P_n\| = O(n^{-\alpha})$ ならば $\lambda > \alpha$ ならば

$$\|P_n^{(\lambda)}\| = O(n^{\lambda-\alpha}).$$

証明は Zygmund [2] にのびる ϵ による一つの定理と, 高次数の Bernstein の不等式を用いる。

(定理の証明) $P_n(x)$ を最良近似に到達する n 次の三角多項式とする。

$$\|f - T_n(f)\| \leq \|f - P_n\| + \|P_n - T_n(P_n)\| + \|T_n(f - P_n)\|$$

いぬから (1) を用いると右辺は $M_1 \|f - P_n\|$ を与える。(2) を用いて, 左辺は補題を用いると

$$\|P_n - T_n(P_n)\| \leq M_2 \cdot n^{-\lambda} \|P_n^{(\lambda)}\| \leq O(n^{-\lambda} \cdot n^{\lambda-\alpha}) = O(n^{-\alpha})$$

とある。よって証明は完了。

大ざっぱに言えば、飽和近似の次数が $O(n^{-\lambda})$ のような近似法は $0 < \alpha < \lambda$ の Lipschitz- α クラス に対して最良近似と同じ次数の近似度を持つというのである。特に前節の $R_n(x)$ をとると Lipschitz γ クラスに属しては $O(n^{-\lambda})$ の次数では最良近似の多項式の代用がとまらぬことが分る。

文献

- [1] J. Favard, *Analyse harmonique*, Coll. Internat. Centre Nat. Rech. Sci., Paris (1949).
- [2] M. Zemanek, *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.* 66 (1949), 19-93. 同誌 67 (1950), 161-198.
- [3] G. Alexits, *Acta Math. Acad. Sci. Hungarica*, 3 (1952), 29-30.
- [4] P. L. Butzer, *Math. Annalen*, 133 (1957), 410-425.
- [5] 洲之内一彦, *学士院紀事* 34 (1958), 477-481.
東北数学雑誌 11 (1959), 112-118.
- [6] 洲之内, *Oberwolfach* における近似理論に関する論文-4 記録集 (1964, Basel).
- [7] A. H. Turetskii, *Izvestija Akad. Nauk USSR* 25 (1961), 411-442.