数理解析研究所講究録
36巻 1968年 19-28

Walshの函数による近似について

東北大 理　　渡利 千波

まえがき　よく知られているように，与えられた周期函数を三角多項式で近似する際には，「函数のなめらかさが大きいほど，得られる近似度がよい」という現象が見られる。この際，与えられた函数の連続率と，三角多項式による最良近似との間には，ほぼ平行した関係があるが，完全に平行した関係があるわけではない。まず，連続率にはtrivialな限界がある：　$f(x+h)-f(x)=o(h) \Rightarrow f(x)=\mathrm{const.}$　であるから。

この限界を，連続率の定義に導函数を持ち込んで，乗り越えることは一応可能である。たとえば，ある（負でない）整数 r に対して $f^{(r)}(x)$ がいたるところ存在し，しかも

$$f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)=O(h^{\alpha})\quad(\text{as } h\to 0,\ \text{unif. in } x)$$

が成立するとき　$f\in \mathrm{Lip}(\alpha+r)$　と定義すれば，この定義は通常の $\mathrm{Lip}\,\alpha$ の拡張になっている。けれども，「函数のなめらかさはConvolutionによって得られる函数に『遺伝』する」という命題は，不完全にしか成立しない。この簡単な例として，Weierstrass型の函数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\cos 4^{n}x$ がある。これを f とすれば，$f\in \mathrm{Lip}\,\frac{1}{2}$ であるが，$f*f \notin \mathrm{Lip}\,1$ である。

最良近似を，そのままもとの函数の性質をあらわすもの と考える立場（「よく近似される函数はよい函数である」）に立てば，「Convolutionによる遺伝」は簡明である。　$f-P_n=O(\varphi_n)$，　$g-Q_n=O(\psi_n)$　であれば

$$(f-P_n)*(g-Q_n) = f*g - (P_n*g + f*Q_n - P_n*Q_n)$$

で、右辺の（ ）の中は一つの三角多項式であり、左辺から容易に大きさが評価できて、 $f*g-(\ )=O(\varphi_n\psi_n)$ が得られる。

S. B. Stechkin [3] は、高階の階差を用いる連続率を考えて、函数のなめらかさと、三角多項式による最良近似の平行関係を記述したが、何階の階差を用いればよいかは a priori には決定できない。（「よい函数」の場合には高階の階差を考える必要がある）

ここでは、高階の階差を考える必要のない（あるいは、そのようなものが考えられない）場合に、函数のなめらかさと、多項式近似のよさとの間に完全な平行関係が成立する一例を提示する。

§1. dyadic group と Walsh の函数

以下においては、いわゆる dyadic group G 上の函数を G の characters の一次結合すなわち Walsh 多項式で近似する問題を考える。

dyadic group G とは、0 または 1 を項とする数列 $x=(x_n)_{n=1,2,\cdots}$ の集合に、

$$x\dotplus y = z = (z_n) \overset{\text{def}}{\iff} z_n = x_n+y_n \pmod{2} = |x_n-y_n| \quad (n=1,2,\cdots)$$

で演算を定義し、単位元 $0=(0,0,\cdots)$ の近傍

$$V_0=G,\qquad V_n=\{x\in G;\ x_1=\cdots=x_n=0\}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

あるいは距離

$$d(x,y)=\lambda(x\dotplus y),\qquad \lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x_n$$

によって topology を定義して得られる compact Abelian group である。

$\phi_{n-1}(x) = (-1)^{x_n}$ $\quad (x \in G,\ n = 1, 2, \dots)$

とおくと $\{\phi_n\}$ は G の fundamental [illegible] である（これは Rademacher の函数という）。G の指標 (character) [illegible]（Walsh の函数）は ϕ の有限積であらわされる。具体的には

$$\psi_0(x) = 1$$

$$\psi_n(x) = \phi_{n_1}(x) \cdot \cdots \cdot \phi_{n_r}(x) \qquad (n = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_r} \geqq 1, \quad n_1 > \cdots > n_r \geqq 0)$$

である。以下 Walsh の函数にはこの「順序」（$\hat{G}$ の演算と compatible でない）をつけて考えることにする。

§2 連続率と最良近似

つぎのようにおく。

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \psi_\nu \ ; \ c_\nu \in \mathbb{C} \ (\nu = 0, 1, \dots, n-1) \right\}$$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_G |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sup\{ |f(x)| \ ; \ x \in G \} & (p = \infty) \end{cases}$$

$$(\tau_h f)(x) = f(x \dotplus h) \qquad (h \in G)$$

$$\omega^{(p)}(V_n ; f) = \sup\{ \|f - \tau_h f\|_p \ ; \ h \in V_n \}$$

$$f \in \mathrm{Lip}^{(p)} \alpha (W) \overset{\mathrm{def}}{\iff} \|f - \tau_h f\|_p = O(\lambda(h)^\alpha) \qquad (\alpha > 0,\ h \to 0)$$

$$E_n^{(p)}(f) = \inf\{ \|f - P_n\|_p \ ; \ P_n \in \mathcal{P}_n \}$$

定理 1. α を正の定数とするとき、つぎの4つの命題はたがいに同値である。

(1) $\quad f \in \mathrm{Lip}^{(p)} \alpha (W)$

(2) $\omega^{(p)}(\nabla_n ; f) = O(2^{-n\alpha})$

(3) $E_m^{(p)}(f) = O(m^{-\alpha})$

(4) $\| f - S_{2^n}(\cdot ; f)\|_p = O(2^{-n\alpha})$

ここに $S_{2^n}(\cdot ; f)$ は f の Walsh-Fourier series の 2^n 項までの和である。

証明 (1) ⇒ (2) はあきらかである。(2) ⇒ (1) も容易に示される。すなわち、$0 \neq h \in G$ を任意に与えるとき、$\exists n ;\ h \in \nabla_n - \nabla_{n+1}$.

$$\therefore \quad \| \tau_h f - f \| \leqq A \cdot 2^{-n\alpha} \leqq B \cdot \lambda(h)^{\alpha}$$

(4) ⇒ (3) : 与えられた m に対して、$2^n \leqq m < 2^{n+1}$ となる n をとる。$\mathcal{P}_{2^n} \subset \mathcal{P}_m$ であるから

$$E_m^{(p)}(f) \leqq E_{2^n}^{(p)}(f) \leqq \| f - S_{2^n}(\cdot ; f)\|_p = O(2^{-n\alpha}) = O(m^{-\alpha}).$$

したがって、定理の証明を完結するには (3) ⇒ (4), (2) ⟺ (4) を示せばよい。これをつぎの三つの補題に分けて証明する。

補題 1. (i) $D_m(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \psi_\nu(x)$ とおくとき

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n & x \in \nabla_n \\ 0 & x \notin \nabla_n \end{cases}$$

(ii) $f \in L^p(G)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ に対して

$$\| S_{2^n}(\cdot ; f)\|_p \leqq \| f \|_p$$

証明 (i) は $D_{2^n}(x) = \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \phi_j(x))$ からあきらかである。

(ii) は (i) と Minkowski の不等式からあきらかである.

補題 2. $E_{2^n}^{(p)}(f) \leqq \| f - S_{2^n}(\cdot\,; f) \|_p \leqq 2\, E_{2^n}^{(p)}(f)$.

証明. 前半は trivial である. 後半を示すには, $E_{2^n}^{(p)}(f) = \| f - P \|_p$ $(P \in \mathcal{P}_{2^n})$ とするとき, $S_{2^n}(\cdot\,; P) = P$ に注意して

$$\| f - S_{2^n}(\cdot\,; f) \|_p = \| f - P - S_{2^n}(\cdot\,; f - P) \|_p$$

$$\leqq \| f - P \|_p + \| S_{2^n}(\cdot\,; f - P) \|_p \leqq 2 \| f - P \|_p \quad (\text{補題 } 1, \text{(iii)})$$

補題 3. $E_{2^n}^{(p)}(f) \leqq \omega^{(p)}(\nabla_n; f) \leqq 2\, E_{2^n}^{(p)}(f)$.

証明. $1 \leqq p < \infty$ の場合を考える. $p = \infty$ の場合はより容易である.
補題 2 から

$$E_{2^n}^{(p)}(f) \leqq \| f - S_{2^n}(\cdot\,; f) \|_p = \left(\int_G \left| f(x) - \int_G f(x \dotplus y)\, D_{2^n}(y)\, dy \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\leqq \left\{ \int_G \left(\int_G | f(x) - f(x \dotplus y) |\, D_{2^n}(y)\, dy \right)^p dx \right\}^{1/p}$$

$$= 2^n \left\{ \int_G \left(\int_{\nabla_n} | f(x) - f(x \dotplus y) |\, dy \right)^p dx \right\}^{1/p}$$

$$\leqq 2^n \int_{\nabla_n} \| \tau_y f - f \|_p\, dy \leqq \omega^{(p)}(\nabla_n; f)$$

これで前半が得られた. 後半を示すために $h \in \nabla_n$ を任意に与える.
$P \in \mathcal{P}_{2^n}$ に対しては $P(x \dotplus h) = P(x)$ $(\forall\, x \in G)$ であるから

$$\| f - \tau_h f \|_p = \| f - P - \tau_h f + \tau_h P \|_p$$

$$\leq \| f - P \|_p + \| \tau_h P - \tau_h f \|_p = 2 \| f - P \|_p$$

$P \in \mathcal{P}_n$ に関して下限をとり, $h \in D_n$ に関して上限をとればよい。
これで定理1の証明も完了した.

系　$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p \geq 1$, $q \geq 1$ で $1 \geq 1/r \geq (1/p) + (1/q) - 1$
であるとする. このとき

$$f \in \mathrm{Lip}^{(p)} \alpha(\mathbb{W}), \quad g \in \mathrm{Lip}^{(q)} \beta(\mathbb{W}) \Rightarrow f * g \in \mathrm{Lip}^{(r)} (\alpha + \beta)(\mathbb{W}).$$

証明　$E_n^{(r)}(f * g) = O(n^{-\alpha-\beta})$ を示せばよいが, 近似度は convolution によって「遺伝」するから, ほとんどあきらかである.

§ 3　Linear methods による近似

$f \in L^1(G)$ の Walsh Fourier series を（WFS と略記）

$$f \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \psi_\nu$$

とし, 形式的に作った級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\lambda c_\nu \psi_\nu$$

がそれぞれ

essentially bounded function $f^{[\lambda]}$ の WFS である　$(p = \infty)$

$L^p(G)$ に属する函数 $f^{(\lambda)}$ の WFS である　$(1 < p < \infty)$

G 上の bounded Borel measure $f^{(\lambda)}$ の Walsh-Fourier-Stieltjes series である　$(p = 1)$

ような f の全体を $\mathbb{W}^\lambda$ あるいは $\mathbb{W}^{(p)\lambda}$ と書く.

$\xi(t)$ を $t>0$ に対して定義された正の連続非減少函数とし、$\frac{\xi(t)}{t}$ は十分大きな t に対しては非増加で、かつ

$$\int_1^n \frac{\xi(t)}{t}\,dt = O(\xi(n))$$

をみたしているとする。このとき、つぎの定理が成立する。

定理2　$\lambda>0$ とし、$T=(T_n)$ を $L^p(G)\to L^p(G)$ の linear operators の列とする。もし

(1)　$\|T_n f\|_p \leqq M_1 \|f\|_p \qquad (\forall f\in L^p(G))$

(2)　$\|f_n - T_n f\|_p \leqq M_2 n^{-\lambda} \|f^{(\lambda)}\|_p \qquad (\forall f\in W^\lambda)$

が成立していれば、$0<\alpha<\lambda$ に対して

$$E_n^{(p)}(g) = O(n^{-\alpha}\xi(n)) \Rightarrow \|g - T_n g\|_p = O(n^{-\alpha}\xi(n))$$

である。すなわち、g は T によって最良近似と同じ order まで近似される。

補題4　(Bernstein の不等式)

$$P\in\mathscr{P}_n \Rightarrow \|P^{[\alpha]}\|_p \leqq A_\alpha n^\alpha \|P\|_p.$$

証明　$2^k \leqq n < 2^{k+1}$ である k を定める。$\|f*g\|_p \leqq \|f\|_1\|g\|_p$ が成立するから、$P^{[\alpha]} = D^{[\alpha]}_{2^{k+1}} * P$ に注意して、$\|D^{[\alpha]}_{2^{k+1}}\|_1 \leqq A_\alpha n^\alpha$ を示せば十分である。Abel 変換を2度用いて

$$D^{[\alpha]}_{2^{k+1}} = (2^{k+1}-1)^\alpha D_{2^{k+1}} - \left((2^{k+1}-1)^\alpha - (2^{k+1}-2)^\alpha\right)(2^{k+1}-1) F_{2^{k+1}-1} + \sum_{\nu=1}^{2^{k+1}-2} \Delta_\nu^2 \nu F_\nu$$

ここに $\Delta_\nu^2 = (\nu+1)^\alpha - 2\nu^\alpha + (\nu-1)^\alpha \sim \nu^{-2+\alpha}$

$$\nu F_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} D_j$$

で，$\|F_\nu\|_1 \leqq 2 \quad (\nu = 1, 2, \cdots)$ は知られている（Yano [5]）．

したがって

$$\|D_{2^{k+1}}^{[\alpha]}\|_1 \leqq 2^{(k+1)\alpha} + A \cdot 2^{(k+1)\alpha} + B \sum_{\nu=1}^{2^{k+1}-2} \nu^{-1+\alpha} \leqq A_\alpha n^\alpha \quad \text{q.e.d.}$$

補題5　$\alpha > 0$ とし，$\eta(t)$ は $t > 0$ に対して定義された正の連続函数で，十分大きな t に対しては非増加であるとする．$P_n \in \mathcal{P}_n$ が

$$\|f - P_n\|_p \leqq \eta(n)/n^{\alpha-1} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

をみたしていれば

$$\|P_n^{[\alpha]}\|_p \leqq A + B n \eta(n) + C \int_1^n \eta(t)\,dt$$

である．

証明　η は $t \geqq 2^{a-1}$ に対して非増加であるとする．$j \geqq a$ に対しては（以下ノルムの添数 p を省く）

$$\|P_{2^j} - P_{2^{j+1}}\| \leqq \|P_{2^j} - f\| + \|P_{2^{j+1}} - f\|$$
$$\leqq 2^{j(1-\alpha)} \eta(2^j) + 2^{(j+1)(1-\alpha)} \eta(2^{j+1})$$
$$\leqq (1 + 2^{1-\alpha}) 2^{j(1-\alpha)} \eta(2^j)$$

$P_{2^j} - P_{2^{j+1}} \in \mathcal{P}_{2^{j+1}}$ であるから，補題4によって

$$\|P_{2^j}^{[\alpha]} - P_{2^{j+1}}^{[\alpha]}\| \leqq A_\alpha \eta(2^j) \cdot 2^{(j+1)\alpha} \cdot 2^{j(1-\alpha)} = A'_\alpha \eta(2^j) 2^j$$

これを $j = a, a+1, \cdots, m-1$ に対して加えあわせて

$$\|P_{2^m}^{[\alpha]} - P_{2^a}^{[\alpha]}\| \leqq A'_\alpha \sum_{j=a}^{m-1} 2^j \eta(2^j) \leqq A'_\alpha \int_{2^{a-1}}^{2^{m-1}} \eta(t)\,dt$$

$n \geqq 2^{a-1}$ を考えるとき, m を $2^m \leqq n < 2^{m+1}$ から定めて $P_n - P_{2^m}$ について同じ評価をすると

$$\| P_n^{[\alpha]} - P_{2^m}^{[\alpha]} \|_p \leqq A_\alpha n^\alpha \{ \eta(n) n^{-\alpha+1} + \eta(2^m) 2^{-m(\alpha-1)} \}$$
$$\leqq A''_\alpha \left(n\eta(n) + \int_{2^{m-1}}^{2^m} \eta(t)\, dt \right)$$

これらを加え合わせれば, 求める評価が得られる. q.e.d.

定理2 の証明

最良近似多項式 P_n をとる.

$$\| g - P_n \| \leqq M_3 n^{-\alpha} \xi(n) = M_3 n^{-(\alpha-1)} \xi(n) n^{-1}$$

であるから, 補題5において $\eta(n) = \xi(n)/n$ とおいて

$$\| P_n^{[\alpha]} \| \leqq A + B\xi(n) + C \int_1^n \frac{\xi(t)}{t} dt \leqq M_4 \xi(n).$$

他方, 補題4 から

$$\| P_n^{[\lambda]} \| = \| (P_n^{[\alpha]})^{[\lambda-\alpha]} \| \leqq M_5 n^{\lambda-\alpha} \| P_n^{[\alpha]} \| \leqq M_6 n^{\lambda-\alpha} \xi(n).$$

$P_n \in W^\lambda$ であるから, 仮定 (2) によって

$$\| P_n - T_n P_n \| \leqq M_2 n^{-\lambda} M_6 n^{\lambda-\alpha} \xi(n) = M_7 n^{-\alpha} \xi(n).$$

定理の仮定 (1) から

$$\| f - T f \| \leqq \| f - P_n \| + \| P_n - T_n P_n \| + \| T_n (f - P_n) \|$$

の右辺第3項が第1項と同じ order になり, 証明が終る.

定理の仮定(1) は, 多くの operator (T_n) によってみたされる自然な条件であり, 仮定(2) は たとえば (T_n) による近似が W^λ という模に対して飽和近似であれば(そして飽和近似度が $n^{-\lambda}$ であれば) みたされる.

文 献

[1] N. J. Fine. On Walsh function. Trans. Amer. Math. Soc.,65(1949),372-414.

[2] R. E. A. C. Paley. A remarkable system of orthonormal functions, Proc. London Math. Soc.,34(1932),241-279.

[3] S. B. Steckin, On the best approximation of continuous functions, Izv. Akad. Nauk. 15(1951),219-242.

[4] C. Watari. Best approximation by Walsh polynomials, Tôhoku Math. J., 15(1963),1-5.

[5] ________, A note on saturation and best approximation, Tôhoku Math. J.. 15(1963),273-276.

[6] S. Yano, On approximation by Walsh function, Proc. Amer. Math. Soc.,2(1951), 962-967.