数理解析研究所講究録
36巻 1968年 9-18

発展方程式の差分近似について

東大 理　藤田 宏

§1. 趣旨など

1.1. 差分方程式を用いる偏微分方程式の数値解法(以下,差分法とよぶ)が実用段階に入ってからすでに久しい.しかし,この近似解法の理論づけに関して解明されねばならないことが少くない.偏微分方程式の分野においても研究が完了したばかり,あるいは,完了していない問題が少くないことより,これは当然であろう.反面,差分法の理論づけに関して解明されてしまった事柄も極めて多い.したがって,それらを見通しよく整理することが必要である.

以下,今回の講演において展開するものは一種の抽象的な近似解法の理論,すなわち,近似理論であるが,それは発想において上記の差分法に由来すると同時に,完成時における主な応用分野として差分法の理論づけを念頭においている.ただし,今回の講演において到達する段階は完成とはほど遠く,むしろ,筆者が意図するプログラムの導入部であるにす

ぎない．羊頭をかかげて狗肉を売るそしりはまぬがれないものと観念するが，導入部にだけ留まった理由の一つには，差分法に初対面の方々にも興味を持って戴ける話題に限定しようとしたことがある．しかしながら，この導入部が導入部としての役割りを果たすと同時に，差分法への直接応用を離れても独自の興味を有するものであると認めて戴ければ幸いである

1.2. 我々がそれに対して近似解法を試みようとする問題は Banach 空間 $\mathfrak{X}$ において与えられた抽象的初期値問題

(1) $\dfrac{du}{dt} + A(t)u = f(t) \qquad (0 \le t \le T),$

(2) $u(0) = a$

である．$A(t)$ は $\mathfrak{X}$ の中で働く一般に有界でない線型作用素であり，後に述べる（あるいは口頭で）ように，しかるべき条件を満足するものである．上記の初期値問題の研究は本質的には次の性質をもつ *evolution operator* の構成，研究に帰着する：*evolution operator* $U = U(t, s)$ は $0 \le s \le t \le T$ で定義され有界作用素の値をとる関数で，しかるべき連続性のほかに

(3) $\begin{cases} U(t,s)\,U(s,r) = U(t,r) & (0 \le r \le s \le t \le T) \\ U(t,t) = I \end{cases}$

$$(4) \quad \frac{\partial U(t,s)x}{\partial t} = -A(t)U(t,s)x,$$

$$\frac{\partial U(t,s)y}{\partial s} = U(t,s)A(s)y$$

（ただし　x, y は，しかるべき条件をみたす元 $\in \mathfrak{X}$）

を満足するものである．

我々の課題は U を近似的に構成すること，U に関する近似理論を開発することである．（勿論，その一種を）

各種の条件のもとに U が構成できることを示した仕事が為されている．主要なものはこの講演に先立つ吉田先生のお話しにも出ることと思うが，Kato，Yosida，Tanabe，Sobolevskii，Lions 等によるものであろう．

なお，$A(t)$ が t によらない場合，$U(t,s)$ の構成は，Hille-Yosida の半群理論に帰着する．その際は $U(t,s) = \exp(-(t-s)A)$ と書ける．

約束．

以下において，時間的に homogeneous な問題といえば，(1) において $A(t)$ が t によらない場合（$A(t) \equiv A$）を意味する．

1.3. 我々の扱いの発想を了解して戴くためと，後の例示の便宜のために最も簡単な初期値問題について，いわゆる差分法の手順を説明しておくことが適当であろう．これは，口頭で行なう．

差分法による近似の諸段階は次のものが特色である．

i) 時間変数もの *discretization*．

ii) 空間的作用素の *discretization*．

iii) 空間変数への *discretization*．

実用上は本質的である空間変数の *discretization* を今回は考慮に入れない．

1.4. *discrete evolution operator* の定義．

Nを自然数とし，基本区間 $[0, T]$ のN等分分割を Δ_Nで表わす．すなわち，$\tau = \tau_N = T/N$ とおけば Δ_N の分点は $\{k\tau : \tau = 0, 1, \cdots, N\}$ である．Nを固定したとき，$V = V(k\tau, l\tau)$ が Δ_N に対応する *discrete evolution operator* であるとは

i) $V(k\tau, l\tau)$は $0 \leq l \leq k \leq N$ なる整数 k, l に対して定義され $\mathfrak{X}$ の有界作用素の値をとる関数（格子点上の関数）であり，

ii) $V(k\tau, j\tau)\, V(j\tau, l\tau) = V(k\tau, l\tau)$

$$(0 \leq l \leq j \leq k \leq N)$$

$$\nabla(k\tau, k\tau) = I$$

なる evolution property をもつことである．

Nに種々な自然数値を与えるごとに Δ_N に対応する discrete evolution operator $\nabla^{(N)}$ が与えられているとき，この系を $\{\nabla^{(N)}\}$ で表わす．$\nabla^{(N)}$ の変数を記すには本来 $k\tau^{(N)}$ のようにするべきであろうが略式に $\nabla^{(N)}(k\tau, l\tau)$ のような記法をみとめて戴く．

1.5. discrete evolution operator の quasi-generator の定義

$\nabla(k\tau, l\tau)$ $(0 \leq l \leq k \leq N)$ を Δ_N に対応する discrete evolution operator とするとき，∇の才一種の quasi-generator 関数および才二種の quasi-genarator 関数を次のように定義する．

（定義） $\nabla((k+1)\tau, k\tau)/\tau = -\tilde{A}(k\tau)$ $\quad (k = 0, 1, \cdots, N-1)$

で定義される有界作用素の列 $\tilde{A}(k\tau)$ （あるいは格子点上で定義された有界作用素値の関数）を ∇ の才一種 quasi-generator 関数という．

（定義） $$\frac{1}{1 + \tau\tilde{\tilde{A}}(k\tau)} = \nabla((k+1)\tau, k\tau) \quad (k = 0, 1, \cdots, N-1)$$

によって有界作用素の列 $\tilde{\tilde{A}}(k\tau)$ が定義されるとき，これを $\mathbb{V}$ の第二種 *quasi-generator* 関数とよぶ.

種々の N に対して $\mathbb{V}^{(N)}$ が与えられたときは $\tilde{A}^{(N)}$, $\tilde{\tilde{A}}^{(N)}$ などの記法を用いる.

1.6. $\{\mathbb{V}^{(N)}\}$ の安定性，一様有界性の定義.

簡単のために以下，あらゆる自然数 N に対して $\mathbb{V}^{(N)}$ が与えられたものとする.

(定義) $\{\mathbb{V}^{(N)}\} = \{\mathbb{V}^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ が安定であるとは，それが，一様有界であること，すなわち

$$\|\mathbb{V}^{(N)}(k\tau, l\tau)\| \leq M \quad (0 \leq l \leq k \leq N,\ N=1,2,\cdots)$$

が成立するような定数 M が存在することである.

1.7. $\mathbb{V}^{(N)}$ の $\mathbb{U}$ への収束の定義.

discrete evolution operator の列 $\{\mathbb{V}^{(N)}\}$ が (3), (4) であげた $\mathbb{U}(t,s)$ に収束するとは任意の $x \in \mathfrak{X}$ に対して，$N \to \infty$ のとき

$\mathbb{V}^{(N)}(k\tau, l\tau)x \to \mathbb{U}(t,s)x$，(ただし $k=[t/\tau]$, $l=[s/\tau]$)，が成立することとする.

1.8. 基本的な問題.

$V^{(N)}$ と U とが上のような意味で与えられた時，$N \to \infty$ に際し

$$\tilde{A}^{(N)}(k\tau) \longrightarrow A(t) \qquad (k = [t/\tau])$$

が何等かの意味で成立すれば $V^{(N)}$ が U に収束するであろうか．$\tilde{A}^{(N)}$ を $\tilde{\tilde{A}}^{(N)}$ でおきかえたときはどうか．

§2. Lax-Richtmyer の理論 および Trotter-Kato の理論の復習．

(定理)（Lax-Richtmyer）時間的に homogeneous な場合を考える．

i) $\{V^{(N)}\}$ が $U = U(t, s) = e^{-(t-s)A}$ に収束するならば $\{V^{(N)}\}$ は安定である．

ii) $\{V^{(N)}\}$ が安定であり 強収束の意味で

$$(*) \qquad \tilde{A}^{(N)} \cdot A^{-1} \longrightarrow I$$

ならば $\{V^{(N)}\}$ は U に収束する．

(定理)（Trotter-Kato）やはり時間的に homogeneous な場合を考える．このとき前定理は $(*)$ を，ある λ_0 における条件

$$(**) \qquad \frac{1}{\lambda_0 + \tilde{A}^{(N)}} \longrightarrow \frac{1}{\lambda_0 + A} \qquad \text{(強収束)}$$

でおきかえて，そのまま成立する．

上記の定理の証明を sketch することは有益であろうが，ここには記さない．

§3. Lax-Richtmyer の理論 および Trotter-Kato の理論の拡張．

上記の拡張とは勿論 $A(t)$ が t による場合への拡張である．$U(t, s)$ の構成自体が種々の仮定のもとに種々の方法で行なわれるのであるから，現在の拡張も種々の仮定のもとに種々の方法で行なわれる。途中で $U(t, s)$ の構成法にもどって $U(t,s)$ に関する評価を新に導く必要がおこる場合もあった。

3.1.

(定理)′

i) $\{V^{(N)}\}$ が U に収束するならば $\{V^{(N)}\}$ は安定である．

ii) $\{V^{(N)}\}$ が安定で，$N \to \infty$ に際して

$$\tilde{A}^{(N)}([s/\tau]\tau)\, A(s)^{-1} \to I \quad (\text{強収束}),$$

$$\|\tilde{A}^{(N)}([s/\tau]\tau)\, A(s)^{-1}\| \leq M \quad (M\text{は定数})$$

が成立するならば $\{V^{(N)}\}$ は U に収束する．

証明はここに記さない．また U の存在を保証する各条件

も口頭で述べる.

3.2.

(定理)''

i) は前定理と同様.

ii) $\{\mathbb{U}^{(N)}\}$ が安定で各 $\lambda>0$ に関し, $N\to\infty$ のとき

$$\frac{1}{\lambda+\hat{\hat{A}}^{(N)}([s/\tau]\tau)}\longrightarrow\frac{1}{\lambda+A(s)}\quad(\text{強収束})$$

が成立すれば, $\{\mathbb{U}^{(N)}\}$ は $\mathbb{U}$ に収束する.

この証明もここには記さない. ただ, 証明の key point の一つは $\mathbb{U}(t,s)$ に対する乗積表示を導くことにあることを注意しておく. すなわち, それ自身独立の興味もあるであろう次の補題が用いられる. $s=0$ の場合について記せば,

(補題)
$$\lim_{N\to\infty}\prod_{k=0}^{[t/\tau]}\frac{1}{1+\tau A(k\tau)}=\mathbb{U}(t,0)\qquad(\text{強収束})$$

が成立する. これは $-A(t)$ が contraction semi-group の generator でないようなとき, すなわち Tanabe, Sobolevskii, Tanabe-Kato によって扱われた Parabolic type のときには決して trivial ではない. これらの場合には上記の resolvent の連乗が一様有界であることを示すのさえ trivial でない. (方法論的には上記の人達の $\mathbb{U}$ の構成法からヒントを得た Volterra 型和分方程式を手段とすればよいので, 発見はやさしい.)