

差分法による境界値問題の数值解の収束性について. I

早大 理工 中島 勝也

§ 1. 問題の提起

楕円型偏微分方程式の境界値問題の差分法による解法の基礎付けは、1941年の И. П. Петровский の論文<sup>[5]</sup> でなされたと言つてもよいであろう。この方法を かんたんのために 2次元有界領域  $G$  とその境界  $\Gamma$  上での連続な境界条件  $f$  に対する Laplace 方程式の内部 Dirichlet 問題について説明すると 大要つきになる。

$xy$  平面内の領域  $G$  を 幅  $h$  の 正方形網で蔽い、網の結び目の格子点上の函数  $U_h(p)$  を次のように定める。まず  $\varepsilon$  を  $0 < h < \varepsilon$  なるように 任意に (小さく) えらび、 $G$  の内部の単位正方形で、少なくとも1つの頂点が  $\Gamma$  からの距離  $\varepsilon$  以下であるような 辺境単位正方形全体を  $\Gamma_\varepsilon$  とせよ。  $\Gamma_\varepsilon$  に属する格子点では、その点から最も近い  $\Gamma$  上の点における  $f$  の値を  $U_h$  の値と定める。このとき、解  $u$  の  $\bar{G} = G + \Gamma$  における一様連続性から  $\Gamma_\varepsilon$  上でこのように定められた格子点函数  $U_h(p)$  の値は、解  $u$  を一様に近似する。 $G$  に属する格子点で  $\Gamma_\varepsilon$  に属さない 内部格子点における  $U_h(p)$  の値は、その4隣の格子点における  $U_h$  の値の平均値であるとする。これは 内部格子点の  $U_h$  の値を未知数とする連立1次方程式を定める。

この連立1次方程式は一意の解をもち、その解  $U_2(p)$  は内部格子点において Laplace 方程式の解  $u(p)$  と一様に近似する。この連立1次方程式は Gauss-Seidel の反復法で解を求めることができる。

ここで一様に解を近似するという意味は、任意の  $\delta > 0$  に対し、 $\varepsilon$  と  $h$  ( $\varepsilon > h > 0$ ) とを十分小さくとったとき、すべての  $\Gamma_\varepsilon$  の格子点で  $|u - U_h| < \delta$  となっていれば、内部の格子点でも  $|u - U_h| < 2\delta$  となっているということである。

以上のことは、Laplace 方程式の Dirichlet 問題に対し、上述の近似差分方程式の境界値問題が適正であり、また境界条件に関しても、方程式に関しても安定であることを意味する。<sup>[6]</sup> 一般の楕円型偏微分方程式の境界値問題も適当な附加条件のもとに同様の結果が示される。

さて実際問題として、この十分小さなきざみ幅  $h$  はなるべく大きく選ばれるし、現実には  $h$  が小さくできるものではない。したがって、ある与えられた  $h$  のもとで計算された解  $U_h$  のもつ誤差を評価することが重要な問題となる。実際にこの評価を省略して、0.1程度の誤差をもつ差分解の小数第5位まで収束させることは無駄なことである。

誤差に関して、その漸近形がわかっている場合には、その評価や補正ができる。Richardson の補正<sup>[1]</sup>がその例である。しかし誤差の評価は一般には未知である解の高階導関数の値の上界を含んでいる。誤差の評価にはこのような未知の量を含まない

ととが望ましい。つまり既知の境界条件から求められた  
 のものか。特別の場合として長方形領域での Dirichlet 問題があ  
 る。  $\Delta u = 0$  を  $h^{-2} \Delta_h U_h = 0$  で近似したとき、一辺の長さ  
 が  $a$  であるような正方形についての評価式は Wasow により

$$|u - U_h| \leq h^2 (1.4 Q_2 + 0.43 a Q_3)$$

と与えられた。<sup>[6]</sup> ここに  $Q_2$  は境界値  $f$  の4隅の頂点における2階  
 微係数の絶対値の最大値とし、 $Q_3$  は  $f$  の3階導函数の  
 辺上における絶対値の上限である。

この例におけるように、境界値が正確である場合は特殊な方法が適  
 用できるが、一般に境界条件が正確でなければ、差分方程式の解  
 は近似境界条件が持つ程度の誤差を内部格子点でもつことは  
 おおむね述べた通りである。したがって境界条件の近似度も高く  
 しなければならぬ。これらのことについて考察を試みる。始めに  
 すでに2の方面でなされた L. Collatz,<sup>[3]</sup> B. Hubbard,<sup>[2]</sup>  
 K. O. Friedrichs,<sup>[5]</sup> H. B. Keller<sup>[7]</sup> などの研究について紹介  
 しよう。

## §2. Dirichlet 問題の収束の Order について.

$G$  を  $(x, y)$ -平面内の有界な単連結領域とし、その境界  
 $\Gamma$  は有限個の正則弧からなるものとする。  $G$  を幅  $h$  の  
 正方形網で蔽い、  $G$  内の格子点全体を  $G_h$  とする。網系は  
 $x, y$  軸に平行になつてゐるものとし、これが境界  $\Gamma$  と交わる

点を  $\Gamma_h$  とする.  $\Gamma_h$  の点は 格子点上にあるとは限らない.

$G_h$  を 2組に分けて考える. その1は  $\Gamma_h$  境界にあるもので, 点  $p$  が, その4隣の格子点のうち  $G$  外のものを少なくとも一つもつとき,  $p$  を  $\Gamma_h$  境界格子点 といい, その全体を  $\Gamma_h^*$  とかく.  $G_h$  の格子点で  $\Gamma_h^*$  に属さない点全体を  $G_h'$  と呼ぶ.  $G_h'$  でその集合を表すこととする. さて,  $p = (x, y)$  とし

Poisson 方程式の Dirichlet 問題

$$\begin{aligned} -\Delta u(p) &= f(p) & \dots & p \in G \\ u(p) &= g(p) & \dots & p \in \Gamma \end{aligned} \quad (2.1)$$

を考える.  $\diamond_h$  を常用の記号

$$\diamond_h u(p) = u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(p) \quad (2.2)$$

として, 近似微分作用素を  $G_h$  の純内部では

$$\Delta_h u(p) = h^{-2} \diamond_h u(p) \quad \dots \quad p \in G_h' \quad (2.3)$$

と定義する. このとき  $u(p) \in C^4(\bar{G})$  つまり  $\bar{G} = G + \Gamma$  で4階の導函数まで連続であるような函数  $u(p)$  に対して,

$$|\Delta_h u(p) - \Delta u(p)| = O(h^2) \quad \dots \quad p \in G_h' \quad (2.4)$$

となる.

境界に近い  $\Gamma_h^*$  境界格子点,  $\Gamma_h^*$  の点では, 4隣の格子点の平均値とはできないから, 次のような加重平均をとる.  $p = (x, y) \in \Gamma_h^*$  のとき, たとえば,  $(x - \alpha h, y)$ ,  $(x, y - \beta h)$  が  $\Gamma_h$  の点であるとする. このとき  $\Delta u(p)$  の近似として次の2つの式,  $\Delta_h^{(0)} u$  と  $\Delta_h^{(1)} u$  とを考え, どちらか一方を (2.3) と組み合わせて用いる.

$$\Delta_h^{(1)} u(p) = \frac{2}{(\alpha+1)h^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} u(x-\alpha h, y) - \frac{\alpha+1}{\alpha} u(x, y) + u(x+h, y) \right\} \\ + \frac{2}{(\beta+1)h^2} \left\{ \frac{1}{\beta} u(x, y-\beta h) - \frac{\beta+1}{\beta} u(x, y) + u(x, y+h) \right\} \dots (2.5)$$

$$\Delta_h^{(0)} u(p) = \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} u(x-\alpha h, y) + \frac{1}{\beta} u(x, y-\beta h) + u(x+h, y) \right. \\ \left. + u(x, y+h) - \left[ \frac{\alpha+1}{\alpha} + \frac{\beta+1}{\beta} \right] u(x, y) \right\} \dots (2.6)$$

この 2 つの近似式に対して  $p \in \Gamma_h^*$  のとき  $u \in C^3(\bar{G})$  とす

$$|\Delta_h^{(1)} u(p) - \Delta u(p)| = O(h) \dots (2.7)$$

が成り立ち、また  $u(p) \in C^2(\bar{G})$  に対しては

$$|\Delta_h^{(0)} u(p) - \Delta u(p)| = O(1) \dots (2.8)$$

が成り立つ。[1]  $\Delta_h^{(0)}$  は対称形であつて、反復法を用

いるのにはつごうがよい。(2.8)の示す限りでは近似と

いい難いが、 $\Gamma_h^*$  つまり辺境のストリップのみ使うから

誤差が小さく押えられる。 $\Delta_h^{(0)}$ ,  $\Delta_h^{(1)}$  のどちらかを用いる

かに従がい、差分解も異なり、 $U_h^{(0)}$ ,  $U_h^{(1)}$  となくばまだが

混同のおそれがない限り、とくに区別しない。 $u \in C^4(\bar{G})$  で

$$\max_{p \in \bar{G}_h} |U_h(p) - u(p)| = O(h^2) \dots (2.9)$$

が成り立つ。[1] そこで近似解がつぎのような漸近形

$$U_h(p) = u(p) + \varphi(p) h^2 + \psi(h, p) h^3 \dots (2.10)$$

をもつとしよう。このとき Richardson の補正

$$U(p) = \frac{1}{3} \{ 4U_h(p) - U_{2h}(p) \} \quad \dots \quad p \in G_{2h} \subset G_h \quad \dots (2.11)$$

を行なつて、 $O(h^2)$  の項を消去すると、近似の Order が改善されるということが期待される。 [1], [6].

これについて知られてゐることは、 $u \in C^4(\bar{G}) \text{Lip}$ ,  $\varphi \in C^2(\bar{G}) \text{Lip}$  であるとき、近似差分作用素  $\Delta_h^{(1)}$  を用いた時に証明されてゐる。そのときは、1階差分作用素

$$U(p)_x = \frac{1}{\alpha h} [U(x+\alpha h, y) - U(x, y)], \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad \dots (2.12)$$

が近傍  $p \in \Gamma_h^*$  における  $\frac{\partial u}{\partial x}$  に  $O(h^2)$  で近似するということも知られてゐる。

$$|U(p)_x - \frac{\partial u}{\partial x}(p)| = O(h^2), \quad \bar{p} = (x + \frac{\alpha h}{2}, y) \quad \dots (2.13)$$

しかしながら、残念なことに  $\Delta_h^{(0)}$  を用いたとき Richardson の補正が効果をあげない例を Wasow が 1次元で示した。 [4]

つまり (2.1) の右辺の  $f(p)$  に対する条件をゆるめることを考へる。  $G$  の内点  $q$  の近傍で

$$|\partial^i f(p)| = O(|p-q|^{\alpha-2-i} + 1), \quad \alpha > 0; \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

であれば、 $G$  に対する Green 函数が存在すれば

$$|\partial^i u(p)| = O(|p-q|^{\alpha-i} + 1), \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \dots (2.15)$$

となる (2.1) の解  $u(p)$  が  $G$  上で存在する。

このとき  $f(p)$  が  $G_h$  上で計算できる値をもつとき、差分解の誤差評価式

$$\max_{p \in G_h} |U_h(p) - u(p)| = O(h^{\alpha-\varepsilon} + h^2), \quad \varepsilon > 0 \quad \dots (2.16)$$

が得られる。つまり誤差が  $O(h^2)$  であるということに変化を与えず  $u \in C^4$  をゆるめて  $\partial^4 u$  が 2次の特異点を有限個  $G$  内にもつることができる。 [11]

## § 3. Neumann 問題の差分近似と収束性.

Neumann 問題は, Laplace 方程式に対しては, つかのよう  
に定められる. 前節と同じく 2次元で考えることにし, 記号およびその意味  
を引きつぐ.

$(x, y)$  平面の 有界領域  $G$  で

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) = p \in G \quad \dots (3.1)$$

を満足し,  $G$  の境界  $\Gamma$  上で 内法線方向微分

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -g(x, y) \quad p \in \Gamma \quad \dots (3.2)$$

を満足する 函数を求めること.

問題の性質上,  $f$  と  $g$  とは つかの 関係式を満足しなければならない.  
らぬ.

$$\iint_G f(x, y) dx dy + \oint_{\Gamma} g(x(s), y(s)) ds = 0 \quad \dots (3.3)$$

$\Gamma, f, g$  に対する 適当な 滑らかさの条件のもとに, この解は  
附加定数を除いて 一意的に定まる. 附加定数を定めるために 条件

$$\iint_G u(x, y) dx dy = 0 \quad \dots (3.4)$$

をつける 2 が考えられる. 計算上は 特定の  $G$  内の 点  $p_0$  で

$$u(p_0) = 0 \quad \dots (3.5)$$

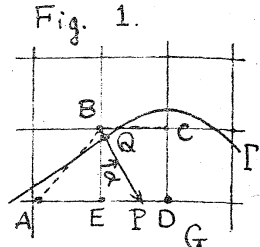
とするのがよい.

領域の境界が 線分である場合. しかも 領域が  $x, y$  軸に 平行な線分  
からなる場合, この問題の取り扱いは かなり 易しいといえる. [4]

しかし 領域の境界が 曲線である場合の取り扱いは なかなか 困難  
である. 境界の 法線方向が 変動し易い 場合には 特におつかしい.

しかし 実際には このような でこぼこの 境界は まれであつて、境界は かなり滑らかなと 仮定する ことが ふつうである。

図のように 領域  $G$  の境界曲線  $\Gamma$  が格子と交わつてゐるとき、内格子点の集合  $G_h$  の境界点としては  $A, B, C, \dots$  をえらぶ。点  $B$  における境界条件の あてはめ方 としては、 $B$  に最も近い  $\Gamma$



の点  $Q$  を えらふ。  $\vec{BQ}$  を 法線方向として その延長が 網系と交わる点を 図に示したように  $P$  とする。 又して

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{u(P) - u(B)}{h/\cos \alpha} \quad \dots \quad (3.6)$$

とする。  $u(P)$  の値は  $u(E), u(D)$  の 線形補間を 与えたと  $B, D, E$  における 函数値の 関係式

$$u(E)(\cos \alpha - \sin \alpha) + u(D)\sin \alpha - u(B)\cos \alpha = -hg(Q) \quad \dots (3.7)$$

を得る。 ここで  $\alpha \leq \pi/4$  と してよい。

(3.7) は  $u(B)$  を求める式として  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$  のとき 対角優位の非負形であり、これは すべての境界点について正しい。内格子点における (3.1) の 差分近似式も また のようになるから、結局 (3.1)~(3.2) の 差分近似で得られる 行列方程式  $AU = B$  は 対角優位の非負形となる。ただ 2 の 連立 1 次方程式は 無限個の解をもつはずで、一意的な解を定めるには ある点での  $u(P)$  の値を指定する。<sup>[4]</sup> この方法が適用できるためには、点  $Q$  が  $B$  に対して 一意的に定まることが必要である。また 境界上に 角点があるときは、その点における法線方向は、左右両方の法線方向の平均をとるようになる。



以上の方法は 法線方向の計算が複雑だし、誤差も  $O(h)$  以上になること  
 もあろう。そこで Friedrichs と Keller は 法線方向の計算にあまり  
 とらわれぬ方法を提案した<sup>[1]</sup>。その方法は 差分近似を作るのに変分  
 法を用いる。以下その方法を説明する。 常用の記号

$$D[\varphi, \psi] = \iint_G \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] dx dy \quad \dots \quad [3.8]$$

$$D[\varphi] = D[\varphi, \varphi] \quad \dots \quad [3.9]$$

を用いて

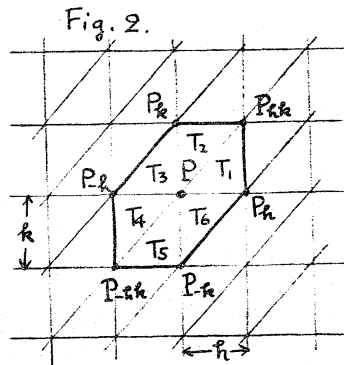
$$I[\varphi] = \frac{1}{2} D[\varphi] - \iint_G f \cdot \varphi dx dy - \int_r g \varphi ds \quad \dots \quad [3.10]$$

を最小にする函数  $\varphi(x, y)$  を,  $\bar{G} = G + \Gamma$  で連続で, 区分的に連続な  
 1 階導函数をもつ 許容函数の中から 見つけることにする。Neumann  
 問題 (3.1) ~ (3.3) の解  $u(x, y)$  は  $I[\varphi]$  を最小にし, その値は

$$I[u] = -\frac{1}{2} D[u] \quad \dots \quad [3.11]$$

となる。

(xy)-平面に 長方形網をばる。その糸は  
 $x, y$  軸に平行なものとよりなり,  $x$  方向が幅  $h$ ,  
 $y$  方向は幅  $k$  であるとする。これをさらに斜  
 線で図のように 三角形網にわけよ。格子点  
 $P$  は, そのとき 6 個の隣りの点をもち, 点  $P$



のまわりには 6 個の三角形  $T_1, T_2, \dots, T_6$  があり, これの合併である  
 平行 6 辺形を  $S_P$  とかく。  $S_P$  の  $G$  内の部分を

$$S'_P = S_P \cap G$$

とかこう。  $S'_P \neq \emptyset$  なる 6 辺形の頂点だけを考える。そのような

格子点を  $P_i, i=1, 2, \dots, N$  とし, その格子点  $P_i$  上の函数を  $\Phi(P_i)$  とかく.

格子点上では  $\Phi(P_i)$  と一致する. その補間函数を

$$\Phi^*(x, y) = \sum_{i=1}^N \Phi(P_i) \eta_{P_i}(x, y) \quad \dots \quad (3.12)$$

を考へる. ここに  $\eta_P(x, y)$  は  $S_P$  の外部および境界上で 0,  $P$  で 1 となる テント状の 平面のつなぎ合った六角錐の面を定める函数である.

$I[\Phi^*]$  を最小にする  $U$  が,  $h, \tau$  を 0 に近づけるときは Neumann 問題の解  $u$  に 強収束 することが示される. (3.12) のような 許容函数に対する 変分問題は, 連立 1 次方程式

$$\sum_{i=1}^N a(P_i, Q) U(P_i) = e(Q) \quad \dots \quad (3.13)$$

を とく 問題に 帰着 する. ここで

$$a(P, Q) = D[\eta_P, \eta_Q] \quad \dots \quad (3.14)$$

$$e(Q) = \iint_G f \eta_Q dx dy + \oint_{\Gamma} g \eta_Q ds \quad \dots \quad (3.15)$$

である. 明らかに  $a(P, Q) = a(Q, P)$ . したがつて (3.13) の 係数行列 は 対称 であるが, 正則 ではない. 実際, 各  $Q = P_i$  に対し

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N a(P_i, Q) &= \sum_{i=1}^N D[\eta_{P_i}, \eta_Q] = D[\eta_Q, \sum_{i=1}^N \eta_{P_i}] = D[\eta_Q, 1] \\ &= 0. \end{aligned}$$

かくて, (3.13) の 齊次方程式 は trivial でない 解  $U(P_i) = 1$  を もつ が, 他方

$$\sum_{i=1}^N e(P_i) \cdot 1 = \iint_G f dx dy + \oint_{\Gamma} g ds = 0$$

であるから (3.13) は ともかく 解を もつ (必ずしも 一意的でない).

さて  $a(P, Q)$  の 計算 は,  $\eta_P(x, y)$  が  $S_P$  外で 0 となる ことから

$$a(P, Q) = \iint_{S_P \cap S_Q} \left[ \frac{\partial \eta_P}{\partial x} \frac{\partial \eta_Q}{\partial x} + \frac{\partial \eta_P}{\partial y} \frac{\partial \eta_Q}{\partial y} \right] dx dy \quad \dots \quad (3.16)$$

より,  $\mathcal{J}_P \cap \mathcal{J}_Q \cap G \neq \emptyset$  でなければ 0 となる. したがって  $a(P, Q)$  が 0 でない値をもつのは, Fig. 2 において示される 3 角格子で  $P$  と  $Q$  とが隣り合っているときに限る. その図において 3 角形  $T_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) の面積を  $J_i$  とおき 2 個の 3 角形でできる 平行 4 辺形およびその面積を

$$\begin{aligned} P_h &= J_6 + J_1, & P_{-h} &= J_3 + J_4 \\ P_k &= J_2 + J_3, & P_{-k} &= J_5 + J_6 \end{aligned} \quad \dots (3.17)$$

で定める. それらの  $G$  内の部かを  $J' = J \cap G$ ,  $P' = P \cap G$  とかく.

すると, ぶたを  $U$  Fig. 2 の記号  $P_h$  などをつかい,

$$\begin{aligned} a(P, P_{\pm h}) &= -h^2 J'_{\pm h}, & a(P, P_{\pm k}) &= -k^2 J'_{\pm k} \\ a(P, P) &= h^{-2}(J'_h + J'_{-h}) + k^{-2}(J'_k + J'_{-k}), \\ a(P, P_{\pm(hk)}) &= 0. \end{aligned} \quad \dots (3.18)$$

となる. そして (3.13) 式は 次のようになる.

$$\begin{aligned} h^{-2}[P'_h(U_h - U) - P'_{-h}(U - U_{-h})] + k^{-2}[P'_k(U_k - U) \\ - P'_{-k}(U - U_{-k})] = -e \end{aligned} \quad \dots (3.19)$$

ここで  $U = U(P)$ ,  $U_h = U(P_h)$  などと書いた.

$P$  が その 6 隣と共に  $G$  内にあれば, 右辺の  $P' = hk$  であり

また  $\iint_{\mathcal{J}_P} \eta_P dx dy = hk$ ,  $\oint_P g \eta_P ds = 0$  であるから (3.19) は

$$h^{-2}[U_h - 2U + U_{-h}] + k^{-2}[U_k - 2U + U_{-k}] = -\bar{f} \quad \dots (3.20)$$

となる. ここに  $\bar{f}$  は  $f$  の  $\mathcal{J}_P$  での平均値である.

$$\bar{f} = \bar{f}(P) = \iint_{\mathcal{J}_P} \eta_P f dx dy / \iint_{\mathcal{J}_P} \eta_P dx dy \quad \dots (3.21)$$

(3.20) の左辺は  $\Delta U$  の 2 次近似であり, 右辺は十分滑らかな  $f$  に対する 2 次近似となる. 故に  $G_h$  の内点で (3.19) は (3.1) の 2 次近似である.

## 参考文献

- [1] Bramble, J. H. (ed.), "Numerical Solution of Partial Differential Equations." Academic Press, New York, 1966.
- [2] Bramble, J. H. and Hubbard, B. E., On the formulation of finite difference analogs of the Dirichlet problem for Poisson's equation. *Numer. Math.* 4, 313-327 (1962).
- [3] Collatz L. "Numerische Behandlung von Differentialgleichungen," 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1955.
- [4] Forsythe, G. E. and Wasow, W. R., "Finite Difference Methods for Partial Differential Equations," Wiley, New York, 1960.
- [5] Friedrichs, K. O., "A finite difference scheme for the Neumann and the Dirichlet problem," AEC Comp. and Appl. Math. Center, Courant Inst. Math. Sci., New York Univ., Rept. No. NYO-9760, 1962.
- [6] 加藤敏夫, 藤田宏, 橋本英典, 中田義元, 微分方程式の近似解法Ⅱ. 岩波書店, 1958.
- [7] Keller, H. B., On the solution of singular and semidefinite linear systems by iteration. *SIAM J. Numerical Analysis* 2, No. 2 (1965).
- [8] ポトロフスキー, "偏微分方程式" 吉田耕作校閲, 渡辺教記 東京図書 1958.
- [9] Wasow, W. R., Discrete approximations to elliptic differential equations. *Z. Angew. Math. Phys.* 6, 81-97 (1955).