数理解析研究所講究録
37巻 1968年 35-52

Navier-Stokes 初期値問題の E. Hopf の弱解の滑かさについて

柴垣和三雄　力丸久子　(九大理)

§1 序論

Ω を R^3 の有界領域とする。この形をした剛い容器を固定し、その中に粘性 ν のある非圧縮流体を満たす。もしこの流体にある初速度分布 u_0 を与えたならば、以後の速度分布はどのようになるか。ただし固定容器にふれている流体部分は動かないものとする。流体にある外力分布 f が働くとして、この Navier-Stokes 初期値問題を数学的に定式化すれば、未知の速度の場 $u=u(x,t)$ と圧力の場 $p=p(x,t)$ を次の条件で解くことになる。

$$
\begin{cases}
u_t - \nu\Delta u + u\cdot \operatorname{grad} u = f - \operatorname{grad} p & \text{in } \Omega\times(0,\infty) \quad (1)\\
\operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega\times(0,\infty) \quad (2)\\
u|_{\partial\Omega} = 0 & t\in(0,\infty) \quad (3)\\
u|_{t=0} = u_0 & x\in\Omega \quad (4)
\end{cases}
$$

物理学的には、$t>0$ に対して、大域的に、この問題の少くも上式中に現われている微係数が存在するような滑かな解があることを期待したいのであるが、非線型項 $u\cdot\operatorname{grad} u$ があるために、そのような大域的な解を数学的に見出すことは非常に困難であり、実際また達成されていない。このような状tain況にかかわらず、1951年 E. Hopf は函数解析の方法を用いて大域的な"弱解"の存在することを明らかにした。しからばこの弱解についてその滑らかさを吟味することが上に述べた困難を打開する突破口になるのではないか。

このようなアイディアは、Ωが全空間の場合についてはすでに1934年J. Lerayが着想して実行した。以下に紹介するM. Shinbrot and Sh. Kanielの1966年の論文はこのアイディアをΩがR^3の有界領域の場合に実現しようとするもので、その結果は本稿最後の§7に述べた形のものである。この研究はNavier-Stokes初期値問題の数値解を予備的に検討するのに有効な見通しを与えるものと考えるが、ここでは基礎とする函数空間および解の概念を明確に規定し、論理的思考の流れを見通すことを重視したいので種々な点で新たな私見を加えながら述べることにしたい。

§2. 弱解の入る空間の設定とその性質

Ω ; R^3の有界領域. 開区間 $(0,T)$ に於て T は $0<T<\infty$. $\hat{\Omega}=\Omega\times(0,T)$

ベクトル値函数 $u=u(x,t)$ $v=v(x,t)\in L^2(\hat{\Omega})$ に対し

$$(u,v)_{L^2(\hat{\Omega})}=\int_0^T\int_\Omega u\cdot v\,dx\,dt \qquad \|u\|^2_{L^2(\hat{\Omega})}=\int_0^T\|u\|^2_{L^2(\Omega)}dt$$ とかく。

(定義) $u\in L^1_{loc}(\hat{\Omega})$ が x について strongly differentiable :

$\exists_1$ locally summable tensor $u_x\equiv\nabla u=\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k},\ i,K=1,2,3\right)$

$$\int_0^T\int_\Omega u^i\frac{\partial w}{\partial x^k}dx\,dt=-\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial u^i}{\partial x^k}w\,dx\,dt,\qquad \forall w=w(x,t)\in C_0^\infty(\hat{\Omega})$$

(定義) $u\in L^1_{loc}(\hat{\Omega})$ が t について strongly differentiable :

$\exists_1$ locally summable vector $u_t=\left(\frac{\partial u^i}{\partial t},\ i=1,2,3\right)$

$$\int_0^T\int_\Omega u^i\frac{\partial w}{\partial t}dx\,dt=-\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial u^i}{\partial t}w\,dx\,dt \qquad \forall w=w(x,t)\in C_0^\infty(\hat{\Omega})$$

(定義) ベクトル値函数 $u=u(x,t)$ のヒルベルト空間 $\mathcal{E}^{1'}_{L^2}(\hat{\Omega})$

$$\|u\|_{1,L^2(\hat{\Omega})}=\left(\int_0^T\int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^3(u^i)^2+\sum_{i,K=1}^3\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^K}\right)^2\right\}dx\,dt\right)^{\frac12}$$
$$=\left(\int_0^T\|u\|^2_{1,L^2(\Omega)}dt\right)^{\frac12}$$

$u\in\mathcal{E}^{1'}_{L^2}(\hat{\Omega})$は ① $u\in L^2(\hat{\Omega})$ ② xについて strongly differentiable かつ $\nabla u\in L^2(\hat{\Omega})$

(定義) $\mathfrak{j}(\Omega)=\{u(x)\ /\ u\in C_0^\infty(\Omega),\ \operatorname{div}u=0\}$

$\mathfrak{j}(\Omega)$の $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{1,L^2(\Omega)}$ についての closure であるヒルベルト空間

をそれぞれ $\hat{\mathfrak{j}}(\Omega)$, $J_2^1(\Omega)$ とかく。

$L^2(\Omega)$は次のように直和分解できる　$L^2(\Omega)=\hat{\mathfrak{j}}(\Omega)\oplus G(\Omega)$

ここで　$G(\Omega)=\{\nabla\varphi\ :\ \varphi\in C^\infty(\Omega),\ \nabla\varphi\in L^2(\Omega)\}$の$L^2(\Omega)$での閉包。

$\mathfrak{j}(\Omega\times(0,\infty))=\{u(x,t)$; uはtに依らない compact support $\subset\Omega$ をもち,

$u\in C^\infty(\Omega\times(0,\infty)),\quad \operatorname{div}u=0\ \}$

$J_2^{1'}(\hat{\Omega})=\mathfrak{j}(\Omega\times(0,\infty))$の $\|\cdot\|_{1',L^2(\hat{\Omega})}$ についての closure。

$u\in J_2^{1'}(\hat{\Omega})$は ① $u\in L^2(\hat{\Omega})$ ② xについて strongly differentiable

かつ $\nabla u\in L^2(\hat{\Omega})$ ③ $\operatorname{div}u=0$ a.e. $(x,t)\in\hat{\Omega}$ ④ $^\exists u^n$:

$u^n\in\mathfrak{j}(\Omega\times(0,\infty))$ a.e. $t\in(0,T)$に対して $\|\nabla u^n(x,t)-\nabla u(x,t)\|_{L^2(\Omega)}$, $\|u^n(x,t)-u(x,t)\|_{L^2(\Omega)}\to 0$

§3 外力 $f=0$ の N-S 初期値問題の弱解の定義と性質.

(定義) 速度場 $u=u(x,t)$がある初期値$u_0(x)\in L^2(\Omega)$に対する、定義域 $\hat{\Omega}$ における

弱解であるとは、uが$\hat{\Omega}=\Omega\times(0,T)$で可測で、$J_2^{1'}(\hat{\Omega})$に属し任意のテスト

ベクトル $\varphi(x,t)\in C_0^\infty(\Omega\times[0,T))$, $\operatorname{div}\varphi=0$に対し、関係 :

$$\int_0^T\{(u,\varphi_t)+\nu(u,\Delta\varphi)+(u,u\cdot\operatorname{grad}\varphi)\}dt=-(u_0,\varphi_0)\qquad(5)$$

を満たすことである。(5)は成分で書けば、

$$\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}u_i\,dx\,dt+\nu\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}u_i\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\alpha}u_\alpha u_i\,dx\,dt$$
$$=-\int_\Omega u_{0i}(x)\varphi_i(x,0)\,dx\qquad(5')$$

テストベクトルとして $\varphi(x,t)\in C_0^\infty(\Omega\times(0,T))$, $\operatorname{div}\varphi=0$ なるものをとると、

弱解 u は 弱N-S 方程式 ：

$$\int_0^T \{ (u, \varphi_t) + \nu(u, \Delta\varphi) + (u, u\cdot \mathrm{grad}\,\varphi) \} dt = 0 \qquad (6)$$

を満たすことがわかる。

もし u が $\bar{\Omega}$ における div free な滑かな初期値 $u_0(x)$ の滑かな弱解であると，(6) は

$$\int_0^T \int_\Omega \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} u_\alpha \right\} \varphi_i \, dx\, dt = 0 \qquad (7)$$

に還元され，これよりもとの強方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} u_\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (8)$$

の成立がしたがう。したがって (5)' はこのとき

$$\int_\Omega \{ u_i(x,0) - u_{0i}(x) \} \varphi_i(x,0)\, dx = 0 \qquad (9)$$

に還元され，これより初期条件 $u(x,0) = u_0(x)$ の成立がしたがう。また

このときエネルギー等式

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\nu \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} dt = \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad t \in [0,T] \qquad (10)$$

の成立が導かれる。

(大域的弱解の定義)

(定義) 速度場 $u = u(x,t)$ が定義域 $\Omega \times (0,\infty)$ における弱解，あるいは時間に関して大域的弱解であるとは，u が $0<T<\infty$ なる任意の T に対して $\Omega \times (0,T)$ における弱解であることで，このとき (5) は任意のテストベクトル $\varphi(x,t) \in C_0^\infty(\Omega \times [0,\infty))$，$\mathrm{div}\,\varphi = 0$ に対する関係

$$\int_0^\infty \{ (u, \varphi_t) + \nu(u, \Delta\varphi) + (u, u\cdot \mathrm{grad}\,\varphi) \} dt = -(u_0, \varphi_0) \qquad (11)$$

でおきかえられる。

G. Prodi (1959) によれば

[定理] $u=u(x,t)$ が $\Omega\times(0,T)$ における弱解であって, $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}$ が $(0,T)$ において一様有界なものであれば, t の測度 0 の集合において u を適当に定義し直せば, $\forall\tau\in[0,T]$ に対し任意のテストベクトル $\varphi(x,t)\in C_0^\infty(\Omega\times[0,T])$, $\operatorname{div}\varphi=0$ に対し, 関係

$$\int_0^\tau\{(u,\varphi_t)+\nu(u,\Delta\varphi)+(u,u\cdot\operatorname{grad}\varphi)\}dt=(u(\tau),\varphi(\tau))-(u_0,\varphi_0) \qquad (12)$$

が成り立つ. したがって任意の $0\leqq\tau<\tau'\leqq T$ に対し

$$\int_\tau^{\tau'}\{(u,\varphi_t)+\nu(u,\Delta\varphi)+(u,u\cdot\operatorname{grad}\varphi)\}dt=(u(\tau'),\varphi(\tau'))-(u(\tau),\varphi(\tau)) \qquad (12)'$$

が成り立つ. この系として次ぎのことはいえる.

[系] 上の定理における定義し直された弱解 $u=u(x,t)$ は, 任意の $\tau\in[0,T]$ において $\mathring{J}(\Omega)$ の元として弱連続である, すなわち任意のテストベクトル $\psi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{div}\psi=0$ に対して

$$(u(t),\psi)_{L^2(\Omega)}\longrightarrow(u(\tau),\psi)_{L^2(\Omega)} \qquad (t\to\tau) \qquad (13)$$

が成り立つ. また $u_0\in\mathring{J}(\Omega)$ であれば, $u(0)=u_0$ となる。

§4. "E. Hopf の弱解"の存在定理

§2, §3 において N-S 初期値問題の弱解を定義し, もしそれが存在すればこれこれの性質をもつということが調べられた. E. Hopf の 1951 年の仕事は, 弱方程式(11)の代わりにそれに対応する(12)を用い, エネルギー等式に基いて, ヒルベルト空間論を巧妙に駆使して, つぎの大域的弱解を見出したことである.

["E. Hopf の弱解"の存在定理] 初期値 u_0 が $\mathring{J}(\Omega)$ に属すれば,

大域的弱解 u で，エネルギー不等式

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\nu\int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \leqq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \in (0,\infty) \tag{14}$$

および $\quad u \in \mathring{J}(\Omega) \quad , \forall t \in (0,\infty)$

を満たし，初期条件として

$$\lim_{t \downarrow 0} \|u - u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{15}$$

を満たすものが存在する．

その証明の流れは次ぎのようである．(12) のテストベクトル $\varphi(x,t) \in C_0^\infty(\Omega \times [0,\infty))$，$\mathrm{div}\,\varphi = 0$ を近似するため，$\mathring{J}(\Omega)$ を $\|\cdot\|_{4, L^2(\Omega)}$ に関して完備化したヒルベルト空間 $J_2^4(\Omega)$ を考え，$J_2^4(\Omega)$ における完全正規直交系で $\mathring{J}(\Omega)$ の元からなるもの（a^l, $l=1,2,\cdots$）をとり，フーリエ係数を $\varphi_l(t) = (\varphi(x,t), a^l(x))_{4, L^2(\Omega)}$ とおく．$\varphi_l(t) \in C_0^\infty([0,\infty))$，$\mathrm{car}\,\varphi_l(t) \subset \mathrm{car}\,\varphi(\cdot,t)$ である．$\Phi^m(x,t) = \sum_{l=1}^m \varphi_l(t) a^l(x) \longrightarrow \varphi(x,t)$ の収束は，$\|\cdot\|_{4, L^2(\Omega)}$ に関し $t \geqq 0$ において広義一様であるばかりでなく，ソボレフの lemma により，関数として一様に $\Phi^m_t \Longrightarrow \varphi_t$，$\dfrac{\partial \Phi^m}{\partial x_\alpha} \Rightarrow \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$，$\dfrac{\partial^2 \Phi^m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ in $\Omega \times [0,T]$，$\Phi^m(x,0) \Rightarrow \varphi(x,0)$ in Ω が成り立つ．よって，(12) は u に対し，$l=1,2,\cdots$ に対し関係

$$\int_0^\tau \{\nu(u, \Delta a^l) + (u, u\cdot\mathrm{grad}\, a^l)\}\, dt = (u(\tau), a^l) - (u_0, a^l) \tag{16}$$

が成り立つことでおきかえられる．さらにいま系 $\{a^l\}$ を $L^2(\Omega)$ で正規直交化したものを $\{e^l\}$ とすれば，これはヒルベルト空間 $\hat{J}(\Omega)$ における $\mathring{J}(\Omega)$ の元からなる完全正規直交系で，(16) は u に対し，$l = 1, 2, \cdots$ に対し，関係

$$\int_0^\tau \{\nu(u, \Delta e^l) + (u, u\cdot\mathrm{grad}\, e^l)\}\, dt = (u(\tau), e^l) - (u_0, e^l) \tag{17}$$

が成り立つことでおきかえられる．

そこでGalerkin法で、近似解を $u^k(x,t)=\sum_{l=1}^{k}\lambda_l^k(t)\,e^l(x)$ の形で、関係

$$\left.\begin{aligned} (u_t^k,\ e^l) &= \nu(u^k,\ \Delta e^l) + (u^k,\ u^k\cdot \mathrm{grad}\, e^l) \\ \lambda_l^k(0) &= (u_0,\ e^l) \equiv \lambda_l \qquad (l=1,2,\cdots,k) \qquad \text{ここに } u_0\in \mathring{J}(\Omega)\end{aligned}\right\}(18)$$

によって定義する。u^k についてはエネルギー等式(10)が成り立つことから、係数函数 $\lambda_l^k(t)$ が $0<t<\infty$ において定まることがいえて、$u^k(x,t)$ が $\Omega\times[0,\infty)$ において大域的に定義されることがしたがう。

さて $u^k(x,t)=\sum_{l=1}^{k}\lambda_l^k(t)\,e^l(x)$ の収束については、まず適当な部分列 $u^k(x,t)$ が $t\geqq 0$ において広義一様に $L^2(\Omega)$ において weakly に向うような $L^2(\Omega)$ の元 $v(x,t)$ の存在がいえる。このことから、Friedrichs の不等式から得られる補定理により、任意の $0<T<\infty$ に対し、$u^k(x,t)$ が $L^2(\Omega\times(0,T))$ において strongly な Cauchy 列をなすことになり、したがって $\Omega\times(0,T)$ で定義される可測函数 $u(x,t)$ があって、$u^k(x,t)\longrightarrow u(x,t)$ in $L^2(\Omega\times(0,T))$ がいえる。よって a.e. $t\in(0,T)$ において $u^k(x,t)\to u(x,t)$ in $L^2(\Omega)$ となる。この u を上に見出されている元 $v(x,t)$ を用いて、t の測度0の集合において再定義すれば、$t\geqq 0$ において広義一様に weakly に $u^k(x,t)\longrightarrow u(x,t)$ となり、この $u=u(x,t)$ が定理に述べられている性質をもつ弱解である。実際、まず u^k に対してエネルギー等式(10)があることから、適当な部分列 (u^k) について $L^2(\Omega\times(0,T))$ で weakly に $\frac{\partial u^k}{\partial x_\alpha}\longrightarrow\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ が出るが、Saks の定理により $u^n=\frac{u^{k_1}+u^{k_2}+\cdots+u^{k_n}}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ の形の $\mathring{J}(\Omega\times(0,\infty))$ の元からなる適当な系列をとれば、$u^n\to u$, $\nabla u^n\longrightarrow\nabla u$ in $L^2(\Omega\times(0,T))$ となるので、$u\in J_2^{1'}(\Omega\times(0,T))$。他の諸性質も証明される。

§5 強解の入る空間の設定とその性質

(定義) 空間 $L^{p,q}(\Omega;(0,T))$ $\quad 1\leq p, q\leq\infty$

$$\|u\|_{p,q} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_p^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

特に $\|u(t)\|_\infty = \underset{x\in\Omega}{ess.\ sup}\, |u(x,t)|$ $\qquad \|u\|_{p,\infty} = \underset{t\in(0,T)}{ess.\ sup}\, \|u(t)\|_p$

$L^{2,2}(\Omega;(0,T)) = L^2(\Omega\times(0,T))$

(定義) $\quad \dot{J}(\Omega) = \{\, u(x) \ ;\ u\in C^\infty(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega}),\ \ div\, u = 0 \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \,\}$

$\dot{J}(\Omega)$ の $\|\cdot\|_{1,L^2(\Omega)}$ についての closure を $\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ とかく。

$\overset{\circ}{J}(\Omega)\subset \dot{J}(\Omega) \subset \overset{\circ}{J}(\Omega)$, $\quad J_2^1(\Omega) \subset \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \subset \overset{\circ}{J}(\Omega)$ が成立する.

この定義および以下において, Ω は滑かな境界をもつ有界な領域とする.

(定義) $\quad \dot{K}(\Omega) = \{\, u(x)\ ;\ {}^\forall f(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$ に対する Stokes 問題 :

$$-\nu\Delta u = f - grad\, P, \quad div\, u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ の解 } \}$$

$u\in\dot{K}(\Omega)$ に対し一意に Pf が対応する。 P は $L^2(\Omega)$ の $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ への射影子

そこで $\|u\|_{K(\Omega)} = \|Pf\|_2 = \|\nu P\Delta u\|_2$ とおき, $\dot{K}(\Omega)$ のこのノルムに関する closure であるヒルベルト空間を $K(\Omega)$ とかく。 $\tilde{\Delta}\equiv P\Delta$: 作用素とかくと,

$\|u\|_{K(\Omega)} = \|\nu\tilde{\Delta}u\|_2$ となる。

① $K(\Omega)\subset \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \subset \overset{\circ}{J}(\Omega)$

② $u\in K(\Omega)$ に対し ${}^\exists u^n\in\dot{K}(\Omega)\longrightarrow u$ in $K(\Omega)$ この u^n に対して

$$u^n\to u,\quad \nabla u^n\to\nabla u, \quad P\Delta u^n\longrightarrow\tilde{\Delta}u \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

③ $\|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2 \leqq C\|\nabla u\|_6 \leqq C\|u\|_{K(\Omega)}$, $\qquad \|\nabla u\|_2 \leqq \|u\|_2^{\frac{1}{2}}\|u\|_{K(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$

④ $\gamma u = 0 \qquad \gamma$ は trace operator

(定義)　$\alpha \geqq 0$　$0<T\leqq\infty$ とする．　$\hat{\Omega}=\Omega\times(0,T)$

$\dot{K}_\alpha(\hat{\Omega})=\{u(x,t)\mid {}^\forall f(x,t)\in C_0^\infty(\overline{\Omega}\times[0,\infty)),\ {}^\forall u_0\in\dot{J}(\Omega)$ に対する Stokes 初期値問題；$u_t-\nu\Delta u=f-\nabla p,\ \mathrm{div}\,u=0,\ u|_{\partial\Omega}=0.\ u|_{t=0}=u_0$ の解 $\}$

$u\in\dot{K}_\alpha(\hat{\Omega})$ に対して　$\|u\|^2_{K_\alpha(\hat{\Omega})}=\|\nabla u_0\|_2^2+\|e^{\alpha t}Pf\|^2_{2,2}$　とおく。この値は一意に決まる。そこで $\dot{K}_\alpha(\hat{\Omega})$ のこのノルムに関する closure であるヒルベルト空間を $K_\alpha(\hat{\Omega})$ とかく。　$\alpha>0$ が十分小さければ，上のノルムは次に示すノルムと同値である。　：　$\|\nabla u_0\|_2^2+\|e^{\alpha t}u_t\|^2_{2,2}+\|e^{\alpha t}P\Delta u\|^2_{2,2}$

$K_\alpha(\hat{\Omega})$ の性質

① $u\in K_\alpha(\hat{\Omega})$ であれば　$u\in K(\Omega)$　a.e. $t\in[0,T)$

② $u\in K_\alpha(\hat{\Omega})$ に対し，${}^\exists u^n\in\dot{K}_\alpha(\hat{\Omega})\longrightarrow u$　in $K_\alpha(\hat{\Omega})$　この時，

$${}^\exists u_0\in\dot{J}_2^1(\Omega)\ ;\ \begin{cases}u^n(x,0)\to u_0\\ \nabla u^n(x,0)\to\nabla u_0 & \text{in } L^2(\Omega)\end{cases}$$

$$u^n\to u,\quad \nabla u^n\to\nabla u,\quad u^n\cdot\nabla u^n\to u\cdot\nabla u,\quad u^n_t\to u_t$$

$$P\Delta u^n\to P\Delta u\qquad \text{in } L^2(\hat{\Omega})$$

③ $\|\nabla u\|_2^2=\|\nabla u_0\|_2^2-2\int_0^t\int_\Omega u_t\cdot P\Delta u\,dx\,dt$　　${}^\forall t\in[0,T)$

④ ${}^\forall t\in[0,T)$ に対して　$\|u^n(x,t)-u(x,t)\|_2\longrightarrow 0$，　$\|\nabla u^n(x,t)-\nabla u(x,t)\|_2\longrightarrow 0$
したがって　${}^\forall t\in[0,T)$ に対し　$u\in\dot{J}_2^1(\Omega)$.

⑤ $u\in L^{4,\infty}(\hat{\Omega})$　即ち　$\operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,T)}\|u\|_4<+\infty$

⑥ $\mathrm{div}\,u=0$，　$\gamma u=0$ (a.e.t)。

注 1.　③，④ の証明を補遺で与える．

注 2. class $J_2^1(\hat{\Omega})$ の性質より，weak solution の $u(x,t)$ に対しては，

a.e. $t\in(0,\infty)$ に対して　$u(x,t)\in\dot{J}_2^1(\Omega)$

(定義)　$u_0\in\dot{J}_2^1(\Omega)$ に対して定まる集合 $K_\alpha(\hat{\Omega};u_0)$.　　$u\in K_\alpha(\hat{\Omega};u_0)\ \underset{def.}{\Longleftrightarrow}$

$u\in K_\alpha(\hat{\Omega})$ かつ ${}^\exists u^n\in\dot{K}_\alpha(\hat{\Omega})\to u$ in $K_\alpha(\hat{\Omega})$ に対し　$\nabla u^n(x,0)\to\nabla u_0$　in $L^2(\Omega)$

$K_\alpha(\hat{\Omega}; u_0)$は$K_\alpha(\hat{\Omega})$の凸閉部分集合である。Shinbrot-Kanielのように$u_0 \in \mathfrak{J}(\Omega)$かつ$\nabla u_0 \in L^2(\Omega)$なる$u_0$としないで、$u_0 \in \mathring{J}_2^1(\Omega)$としたので、$K_\alpha(\hat{\Omega}; u_0)$は空集合にならない。

§6 外力$f=0$の時のN-S初期値問題のShinbrot-Kanielの強解の存在と一意性。

(定義) $u = u(x,t)$が$\hat{\Omega}$における初期値$u_0 \in \mathring{J}_2^1(\Omega)$に対する強解であるとは、ある$\alpha \geq 0$があって、$u \in K_\alpha(\hat{\Omega}; u_0)$であり、$\hat{\Omega}$において方程式：

$u_t - \nu P\Delta u = -P(u \cdot \nabla u)$が満たされることである。

uが強解であれば、$\exists u^n \in \dot{K}_\alpha(\hat{\Omega}) \longrightarrow u$ in $K_\alpha(\hat{\Omega})$

① $\nabla u^n(x,0) \longrightarrow \nabla u_0$ in $L^2(\Omega)$ ② $\mathrm{div}\, u = 0$ a.e. $(x,t) \in \hat{\Omega}$

③ $u^n|_{\partial\Omega} = 0$ $u^n \to u$, $\nabla u^n \to \nabla u$ in $L^2(\hat{\Omega})$

①は初期条件 ②はdivergence free ③は境界条件を満足していることを意味する。

(定義) $K_\alpha(\hat{\Omega})$におけるoperator A

$\forall u \in K_\alpha(\hat{\Omega})$に対して、$\exists u^n \in \dot{K}_\alpha(\hat{\Omega}) \longrightarrow u$ in $K_\alpha(\hat{\Omega})$。$u^n \nabla u^n$を外力とし、$u^n(x,0)$を初期値とする線型問題の解$v^n \in \dot{K}_\alpha(\hat{\Omega})$を考える。

$$\begin{cases} v^n_t - \nu\Delta v^n = -u^n \nabla u^n - \nabla p^n & \text{in } \hat{\Omega} \\ \mathrm{div}\, v^n = 0 & \text{in } \hat{\Omega} \\ v^n|_{\partial\Omega} = 0 & t \in (0,T) \\ v^n|_{t=0} = u^n(x,0) & x \in \Omega \end{cases}$$

$\|v^n\|^2_{K_\alpha(\hat{\Omega})} = \|\nabla u^n(x,0)\|^2_2 + \|e^{\alpha t} P(u^n \cdot \nabla u^n)\|^2_{2,2}$。ここで$\nabla u^n(x,0)$は$L^2(\Omega)$で収束し、$e^{\alpha t} P(u^n \cdot \nabla u^n)$は$L^2(\hat{\Omega})$で収束するので、$v^n \longrightarrow \exists v \in K_\alpha(\hat{\Omega})$ in $K_\alpha(\hat{\Omega})$

uに対してこのvを対応させる対応をAとする ： $Au = v$。

Aの性質

① $A K_\alpha(\hat{\Omega}) \subset K_\alpha(\hat{\Omega})$ ② $A K_\alpha(\hat{\Omega}; u_0) \subset K_\alpha(\hat{\Omega}; u_0)$

③ Aは compact operatorである.

④ $\lambda \in [0,1]$ に対し $u^\lambda \in K_\alpha(\hat{\Omega}; u_0)$ を方程式 $u = \lambda A u$ の解すなわち $\hat{\Omega}$ における初期値 $u_0 \in \mathring{J}^1_2(\Omega)$に対するN-S方程式 $u_t - \nu P \Delta u + \lambda P(u \cdot \nabla u) = 0$ の強解とすれば、次の評価が言える。

- $T>0$が十分小さい時.

$$\|u^\lambda\|_{K_{\alpha=0}(\hat{\Omega})} \leqq C \|\nabla u_0\|_2 \left(1 + \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{(1 - C\|\nabla u_0\|_2^4 T)^{\frac{3}{4}}}\right).$$

- $\alpha>0$ および $\|\nabla u_0\|_2$ が十分小さい時.

$$\|u^\lambda\|_{K_\alpha(\Omega \times (0,\infty))} \leqq C \|\nabla u_0\|_2 \left(1 + \|\nabla u_0\|_2^2\right).$$

［"Shinbrot-Kaniel の強解"の存在および一意性定理］ 初期値 u_0 が $\mathring{J}^1_2(\Omega)$ に属すれば, ある $T>0$ に対し $\Omega \times (0,T)$ における強解 $u \in K_{\alpha=0}(\Omega \times (0,T); u_0)$ が存在し一意である. このときもし $\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}$ が十分小さいならば, ある $\alpha > 0$ があり, それに対し $\Omega \times (0,\infty)$ における強解 $u \in K_\alpha(\Omega \times (0,\infty); u_0)$ が存在し一意である.

証明のうち, 存在の方は, 上に述べた operator A の性質により Leray-Schauder の不動点定理が用いられて, $Au = u$ なる $u \in K_\alpha(\Omega \times (0,T); u_0)$ の存在が示されることからわかる. 一意性の方は, 次の§にあげる Serrin の"弱解 の 一意性定理"にもとずく (ただしそこの最後の付言を参照).

§7. "E. Hopf の弱解" の滑かさに関する定理

さて表題に掲げたテーマについて論じよう. われわれは §3 において N-S 初期値問題の弱解の定義を与えたが, $v=v(x,t)$ が $\Omega\times(0,T)$ における弱解ということで, 若干の性質があげられる. その一つとして $v\in \mathcal{J}_2^1(\hat{\Omega})$ なることから a.e. $t\in(0,T)$ において $v\in J_2^1(\Omega)$ なること, したがって $v\in \mathcal{J}_2^1(\Omega)$ なることがしたがうことを注意しよう. §4 においては初期値 $u_0\in \mathring{J}(\Omega)$ に対して $\Omega\times(0,\infty)$ を定義域とする "E. Hopf の弱解 $v=v(x,t)$" の存在が示された. よって $v=v(x,t)$ については $\forall t\in(0,\infty)$ に対し $v\in\mathring{J}(\Omega)$ で a.e. $t\in(0,\infty)$ に対し $v\in \mathcal{J}_2^1(\Omega)$ が成り立つ. ところが一方において §6 において $u_0\in \mathcal{J}_2^1(\Omega)$ を初期値とする Shinbrot-Kaniel の陽解 $u=u(x,t)$ が, 局所的にある $\Omega\times(0,T_1)$ において存在し, u が $\forall t\in(0,T_1)$ において $\in \mathcal{J}_2^1(\Omega)$ なることが明かにされた. さて $\mathcal{J}_2^1(\Omega)\subset\mathring{J}(\Omega)$ であるので, $u_0\in \mathcal{J}_2^1(\Omega)$ を初期値とする E. Hopf の弱解 $v=v(x,t)$ が $\Omega\times(0,\infty)$ において存在するが, 上述の状況にもとずいて, この v の滑かさを調べることが, 表題に掲げたテーマの正確な意味である. そのさい Serrin の弱解に関する一意性定理

「u, v を N-S 初期値問題の二つの弱解で, $\frac{3}{s}+\frac{2}{s'}=1$ ($3<s<\infty$, この 3 は Ω の次元数である) なる対 (s,s') に対して $u\in L^{s,s'}$ であり, v は エネルギー不等式

$$\|v\|_2^2+2\nu\int_0^t\|\nabla v\|_2^2\,dt \leqq \|v_0\|_2^2 \quad , \quad t\in[0,T]$$

を満たすものとする. そのとき

$$\|u-v\|_2 \leqq \|u_0-v_0\|_2\, e^{c\int_0^t\|u\|_s^{s'}dt} \quad , \quad t\in[0,T]$$

が成り立つ. よって特に $u_0 = v_0$ であれば, $\forall t \in [0,T]$ に対し $L^2(\Omega)$ の元として $u = v$ である」

が用いられる.

［定理］ $v = v(x,t)$ を初期値 $v_0 \in \mathring{J}_2^1(\Omega)$ に対する E. Hopf の弱解とすると, t 軸の正向 $(0,\infty)$ のある測度 0 の集合 E で, E の余集合は開区間の合併 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ であり, その最後の区間は半無限であるようなものがあって, v を各領域 $\Omega \times I_\lambda$ における測度 0 の集合で定義し直せば, v は $\Omega \times I_\lambda$ における強解となる. したがって t のある値以上では, v は強解になる.

（証明） $E = \{ t \in (0,\infty) \;/\; v(x,t) \overline{\in} \mathring{J}_2^1(\Omega) \}$

とおけば, E は $(0,\infty)$ の測度 0 の集合である. E' を E の余集合とし, E' の任意の1点 t_0 をとると, $v(x,t_0) \in \mathring{J}_2^1(\Omega)$ であるから, それを初期値とする一意な強解 $u = u(x,t)$ がある領域 $\Omega \times (t_0, t_0 + T(t_0))$ において存在する. ところで v はエネルギー不等式を満たし, u は $L^{4,\infty}(\Omega \times (t_0, t_0+T(t_0)))$ に入っていることから, この二つに対して Serrin の一意性定理が適用できて, $\forall t \in [t_0, t_0+T(t_0)]$ に対し, $L^2(\Omega)$ の元として $u = v$, すなわち $\| u(t) - v(t) \|_2 = 0$ が成り立つ. よって $\| u - v \|_{2,2} = 0$ で, したがって $v = v(x,t)$ を $\Omega \times (t_0, t_0 + T(t_0))$ の測度 0 の集合で定義し直せば $u = u(x,t)$ と一致する.

さて強解については $\forall t \in [t_0, t_0+T(t_0)]$ に対し $u \in \mathring{J}_2^1(\Omega)$ が成り立つから, $(t_0, t_0+T(t_0)) \subset E'$ である. したがって $E' = \bigcup_{t_0 \in E'} (t_0, t_0+T(t_0))$ である.

次に弱解 $v = v(x,t)$ が満たすエネルギー不等式

$$\|v\|_2^2 + 2\nu\int_0^t \|\nabla v\|_2^2\, dt \leqq \|u_0\|_2^2 , \quad \forall t \in (0,\infty)$$

から，$\int_0^\infty \|\nabla v\|_2^2\, dt < \infty$．よって $\forall \varepsilon > 0$ に対し，t_1 を十分大にしかも E' の点からとると，$\|\nabla v(x, t_1)\|_2 < \varepsilon$ となる．よって強解の存在定理の後半により，t_1 に対しては $t_1 + T(t_1) = \infty$ にとれる．

（付言）上において Serrin の一意性定理を用いたさい，Shinbrot-Kaniel の強解が弱解の空間 $\mathring{J}_2^{1'}(\hat{\Omega})$ に入るとしたのであるが，そのためには $\hat{J}_2^{1}(\Omega) = \mathring{J}_2^{1}(\Omega)$ なることが示されればよい．そのことの完全な証明はまだ与えることができなかった．

（議論）藤田宏氏から論文［7］において Shinbrot-Kaniel の強解よりさらによい性質をもった解が得られているとの発言があった．本§の定理において強解を藤田氏の解でおきかえることができると思われる。

(補遺)

空間$K_\alpha(\Omega\times(0,T);u_0)$に属する元$u$の性質 (*)と(**)に関し証明を与える。

(*) $\|\nabla u\|_2^2=\|\nabla u_0\|_2^2-2\int_0^t\int_\Omega u_t\cdot P\Delta u\,dx\,dt \qquad \forall t\in[0,T)$

(**) $u(x,t)\in \mathring{J}_2^1(\Omega) \qquad \forall t\in[0,T)$

$u\in K_\alpha(\Omega\times(0,T);u_0)\Rightarrow \exists u^n\in \mathring{K}_\alpha(\Omega\times(0,T))\longrightarrow u$ in $K_\alpha(\Omega\times(0,T))$, $\nabla u^n(x,0)\to\nabla u_0$ in $L^2(\Omega)$。

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega u_t\cdot P\Delta u\,dx\,dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_\Omega u_t^n\cdot P\Delta u^n\,dx\,dt\\ &=-\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_\Omega \nabla u_t^n\cdot\nabla u^n\,dx\,dt\\ &=-\frac12\lim_{n\to\infty}\int_0^t\frac{d}{dt}\|\nabla u^n\|_2^2\,dt\\ &=\frac12\lim_{n\to\infty}\left\{\|\nabla u^n(x,0)\|_2^2-\|\nabla u^n(x,t)\|_2^2\right\}\end{aligned}$$

a.e. t に対してではなく、任意の$t\in[0,T)$に対して等式(*)を得るために零集合の上で$u,\nabla u$を"redefine"しよう。上式の変形にならって次の式を得る。

$$\int_0^t\int_\Omega(u_t^n-u_t^m)(P\Delta u^n-P\Delta u^m)\,dx\,dt=\frac12\left\{\|\nabla u^n(x,0)-\nabla u^m(x,0)\|_2^2-\|\nabla u^n(x,t)-\nabla u^m(x,t)\|_2^2\right\}$$

ここで $\|\nabla u^n(x,0)-\nabla u^m(x,0)\|_2\to0$ $(n,m\to\infty)$。左辺の項の絶対値はtに依らないところの$\|u_t^n-u_t^m\|_{2,2}\cdot\|P\Delta u^n-P\Delta u^m\|_{2,2}$によっておさえられる。そしてそれが$n,m\to\infty$に対して零へ行く。∴ $\forall\varepsilon>0$に対して$\exists N(\varepsilon)$番号が定まり$n,m>N(\varepsilon)$ならば $C\|u^n(x,t)-u^m(x,t)\|_2\le\|\nabla u^n(x,t)-\nabla u^m(x,t)\|_2<\varepsilon$ for $\forall t\in[0,T)$

∴ $t\in[0,T)$をfix。tにdependしているxの関数$u^*(x,t)$, $u^{**}(x,t)\in \mathring{L}_2^2(\Omega)$があって $\|u^n(x,t)-u^*(x,t)\|_2\to0$, $\|\nabla u^n(x,t)-u^{**}(x,t)\|_2\to0$ $(n\to\infty)$。一方に於て

a.e. t に対しては $\|u^n(x,t)-u(x,t)\|_2\to0$ $\|\nabla u^n(x,t)-\nabla u(x,t)\|_2\to0$ $(n\to\infty)$

この時除かれるtの零集合をI_0とかく。

$$\overline{u}(x,t)=\begin{cases}u(x,t) & \text{in } \Omega\times I_0^c\\ u^*(x,t) & \text{in } \Omega\times I_0\end{cases}\qquad \overline{\nabla}(x,t)=\begin{cases}\nabla u(x,t) & \text{in } \Omega\times I_0^c\\ u^{**}(x,t) & \text{in } \Omega\times I_0\end{cases}$$

とおく。

$U(x,t)$, $V(x,t)$ は (x,t) の可測関数となる。

$U(x,t)=u(x,t)$ a.e. (x,t) $\quad V(x,t)=\nabla u(x,t)$ a.e. (x,t)

$\forall t\in[0,T)$ に対して $\|u^m(x,t)-U(x,t)\|_2\to 0$, $\|\nabla u^m(x,t)-V(x,t)\|_2\to 0$ $(m\to\infty)$

したがって u を redefine した U; ∇u を redefine した V をあらためて、それぞれ u, ∇u と書く。するとこのようにして得られた u, ∇u については、

$\|u^m(x,t)-u(x,t)\|_2\longrightarrow 0$ $\|\nabla u^m(x,t)-\nabla u(x,t)\|_2\longrightarrow 0$ $(m\to\infty)$ が $\forall t\in[0,T)$ に対して成立する。$\therefore$ 性質(*)が証明できる。

$\forall t\in[0,T)$ fix。 $\int_\Omega \nabla u^m(x,t)\varphi(x)\,dx=-\int_\Omega u^m(x,t)\nabla\varphi(x)\,dx$ $\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$

が成立する。そこで $m\to\infty$ を行う。

$$\int_\Omega \nabla u(x,t)\varphi(x)\,dx=-\int_\Omega u(x,t)\nabla\varphi(x)\,dx \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

この事は次の事を意味する。

$u(x,t)$ は t を fix して x だけの関数と考えた時、strong derivative を持つ事。さらにそれが、(x,t) の関数として strong derivative を考えて、そこで t を fix したものに等しい事を示している。その事に注意すると $\forall t\in[0,T)$ に対して $u(x,t)\in \mathring{J}_2^1(\Omega)$ となることが従う。(**)も示された。

文 献

〔1〕 J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63 (1934), pp. 193-248.

〔2〕 E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachrichten 4 (1951), pp. 213-231.

〔3〕 A.A. Kiselev and O.A. Ladyzhenskaya, On existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous incompressible fluid, Izvestiya Akad, Nauk SSSR 21 (1957), pp. 655-680.

〔4〕 J. Serrin, The initial value problem for the Navier-Stokes equations, Nonlinear Problems (R.E. Langer ed.), pp. 69-98 (1963).

〔5〕 H. Fujita, On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equation, Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo 9 (1961), pp. 59-102.

〔6〕 S. Itô, The existence and the uniqueness of regular solution of non-stationary Navier-Stokes equation, Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo 9 (1961), pp. 103-140.

[7] H. Fujita and T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem. I. Archive for Rational mechanics and Analysis 16 (1964), pp. 269-315.

[8] M. Shinbrot and Sh. Kaniel, The initial value problem for the Navier-Stokes equations, Archive for Rational Mechanics and Analysis 21 (1966), pp. 270-285.