数理解析研究所講究録
37巻 1968年 19-34

境界値問題の積分方程式による解法

日大 理工　林　嘉男

1。この報告では，Helmholtz方程式の境界値問題の解法と，対数特異核をもつ第一種Fredholm積分方程式の解法とについてのべる。こゝで境界値問題というのは次のものをいう。

「Sを与えられた二次元領域，Cを区分的滑かな曲線弧の和からなるSの境界とする。$u \in C^2(S)$，$u \in C^1(S \cup C)$で，

(1) $$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \qquad x \in S$$

(2) $u(x) = \gamma(x)$　又は　(3) $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = \gamma(x)$，　$x \in C$

を満足するものを求めよ。ただし，Δは二次元のLaplacian，kは複素定数，nはC上のSの外向法線，$\gamma(x)$はC上に与えられたHölder連続な函数とする。もしSが無限遠点を含むならば，そこでuは次の輻射条件，即ち，rを原点からの距りとして

(4) $$\lim \sqrt{r}\left\{\frac{\partial u}{\partial r} + iku\right\} = 0 \ , \quad r \to \infty$$

を満足するものとする。」

周知のように，(1)は平面Sでの二次元調和振動の基本方程式であって，Cが閉曲線の場合には，数理物理学の古典的な問題であり，Weyl[1]等による，C上の第二種Fredholm方程式による一般論がある。しかしながらCが互に共通点をもたぬ有限長又は半無限長の曲線弧Lを含む場合には，特にその端点における解の特異性まで考慮した理論は未だないように思わ

れるので，こゝではこのような場合の一般論を考察する。結論として，解がexplicitな形で求められ，解の存在や一意性も同時に論ぜられる。

筆者がこの種の問題をはじめた発端は，NASAから依託された宇宙船との通信障害に関するある実際問題の解決のためであって[2]，このときはLが開口をもつ一つの円である場合を解いた。[3] これはLが任意個の任意巾の開口をもつ任意個の同心円の場合[4]，任意の開口をもつ平行直線の場合[5]，更に一般に任意の曲線弧の場合[6]に拡張され，そして各領域でのparameter kが必ずしも等しくはない場合も論じられた。

2.では任意の曲線弧の和を境界とする領域での境界値問題が，ある一つの，対数的特異核をもつ第一種Fredholm積分方程式を解く問題と同値なことを示し，3では，この積分方程式の解法理論を述べる。従来，第二種積分方程式については詳しく論ぜられているのに反し，第一種方程式はあまり顧みられなかったように思われるが，3は境界値問題の解析とは独立に積分方程式それ自身の問題として興味があると思われる。こゝでは対数的特異性

のある核をもつ第一種方程式の解で，積分路Lの端点において指定された特異性をもつものが，ある連立一次方程式をとくことによつてexplicitlyに求まり，従つてその解の存在一意性も同時に論じられることが示される。このことは境界値問題も結局は，連立一次方程式の解法に帰せられることを示し，しかもこのようにして求まつた解が S のすべての点で(1)を，L上の点で境界条件を，Lの端点で端点条件を，そして無限遠で(4)を，すべて満足する所要の解であることが証明出来る。[実際には積分方程式の核のregular partをその展開式の部分和で近似するという意味で近似解である。しかしこの近似解はiterationによつて真の解に収束する。]

2。境界値問題の積分方程式への変換

まず領域Sが閉曲線Cで囲まれている場合を考える。$v(x,y)$を(1)の素解，即ち

$$v(x,y)=\frac{1}{4i}H_0^{(2)}(k|x-y|)$$

とする。$H_0^{(2)}$は第2種Hankel函数である。Sで(1)を満足し無限遠点で(4)を満足する函数uの存在を仮定すると

Greenの公式によつて，よく知られているように $x\in S$ における $u(x)$ が，

(5) $$u(x)=-\int_C\left\{u(y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial n(y)}-v(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\right\}ds_y\quad,\quad x\in S$$

と表される。こゝに ds_y は C の線素である。更に $u(x)$ が(2)を満足するとすれば(5)から

(6) $$u(x)=\int_C\sigma(y)v(x,y)ds_y-u^*(x),\qquad x\in S$$

ただし $\sigma(y)=\frac{\partial u}{\partial n}(y)$, $u^*(x)=\int_C\gamma(y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial n(y)}ds_y$。をうる。

逆に，もし $\sigma(x)$ が C 上の第一種積分方程式

(7) $$\int_C\sigma(y)v(x,y)ds_y=f(x),\qquad x\in C$$

$$f(x)=u^*(x)+\gamma(x)/2$$

の解であるならば，それから作られる $u(x)$ は (2) および (4) を満足する (1)の解であることがわかる。

このように S における Dirichlet 問題 (1)(2) の解は (6) のように一重層ポテンシャルで表され，その密度函数 σ は第一種方程式(7) の解であり，逆も真である。

一方 Weyl は Kellogg 以来のやり方に従つて，解 $u(x)$ を C 上の二重層ポテンシャル

(8) $$u(x)=\int_C\mu(y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial n(y)}ds_y,\qquad x\in S$$

であると仮定してその密度函数μを決定すべきものとして次の第二種方程式を導いた。

(9) $$\frac{1}{2}\mu(x) = \int_C \mu(y)\frac{\partial V(x,y)}{\partial n(y)}ds_y - \gamma(x), \qquad x \in C$$

このやり方ではよく知られている第二種方程式の理論を直ちに適用しうる利点はあるが、(1)の解が(8)で表されるという必然性がない。そのため別に解の一意性の証明を必要とした。更に注目すべきことは、この方法が、境界Cが開曲線弧Lである場合には適用出来ないことである。すなわち(8)で定義される$u(x)$が、L上で、その正負いずれの側から近づいても常に境界値$\gamma(x)$をとることが要求されるとすればμは(9)ではなくて、

(10) $$\pm\frac{1}{2}\mu(x) = \int_L \mu(y)\frac{\partial V(x,y)}{\partial n(y)}ds_y - \gamma(x)$$

を満足せねばならぬであろう。これは$\mu(x) \equiv 0$ 従って$u(x) = 0$を導いて一般に$\gamma(x) \neq 0$のときに(2)を満足し得ないことは明かである。

Lをν個の，滑かな，互に共通点をもたぬ曲線弧の和とする。$C^{\pm}$をLに平行でLに充分近い曲線弧，C^{0}をLの端

点を中心とする円弧で，$C=C^0+C^++C^-$ が L を囲む閉曲線となるようにとる。$C^\pm$ を L に近ずけた極限をとれば (5) から

(11) $$u(x)=\int_L \tau(y)\, v(x,y)\, ds_y, \qquad x\in S$$

が導かれる。ただし τ は，$\frac{\partial u}{\partial n}$ の L の正負の側からの極限値をそれぞれ $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+$, $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^-$ としたときその差である：
$\tau(y)=\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^- - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+$.

(11) を導くとき C^0 上の積分が消滅するものと仮定した。これは，ρ を L の端点からの距りとして，u および $\frac{\partial u}{\partial n}$ が $\rho\to 0$ のとき $\rho^{\alpha-1}$ $(\alpha>0)$ の量であることを要請したことであつて，物理的には端点の近傍でのエネルギーが有限なことを意味し，Lord Rayleigh 以来のいわゆる edge condition に相当するものである。これから更に $\tau(y)$ が L の端点 y_j $(j=1,2,\cdots,2\nu)$ の近傍で

(12) $$\tau(y)=\tau_j(y)\Big/\sqrt{|y-y_j|}$$

の形であることが示される。こゝに $\tau_j(y)$ は $\bar{L}$ で Hölder 連続な函数とする。

(11) から $\tau(y)$ の満足すべき方程式として

(13) $$\int_L \tau(y)\, v(x,y)\, ds_y = \gamma(x), \qquad x \in L$$

が導かれる。

逆にτがL上の第一種積分方程式(13)の解で，端点条件(12)を満足するものであれば，それを用いて(11)で定義される函数u(x)は(1),(2),(4)のすべてを満足する所要の解であることが証明出来る。このようにしてDirichlet問題は積分方程式(12)(13)と同値であることがわかった。

Neumann問題(3)についても，L^cを，$L+L^c$が一つの単純閉曲線となるように選び，$L+L^c$で囲まれる領域でのNeumann Green函数をとれば，積分路をLの代りにL^cとして(13)と同じ形の積分方程式が導かれ，これがもとの境界値問題と同値なことが示される。

次節においてこれらの積分方程式の解法を考える。

3。対数特異核をもつ第一種Fredholm積分方程式の解法

νを正整数，bを正実数とし，$\{a_j\}$を

$0 \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_{2\nu} < 2b$ なるように与えられるものとする。区間lを

$$l = \bigcup_{j=1}^{\nu} \{ s \mid a_{2j-1} < s < a_{2j} \}$$

とし，l 上で定義された第一種Fredholm積分方程式

(14) $$K\tau \equiv \int_l K(s,\sigma)\tau(\sigma)\,d\sigma = g(s), \qquad s\in l$$

を考える。こゝに g は $\frac{dg}{ds}$ が $\bar{l}$ 上でHölder連続である如き既知函数，$\tau(\sigma)$ は l 上でHölder 連続で，l の端点 a_j の近傍で

(15) $$\tau(\sigma) = \tau_j(\sigma)\Big/\sqrt{\sigma-a_j}, \qquad j=1,2,\cdots,2\nu$$

と表されるような未知函数とし，核 $K(s,\sigma)$ は，

(16) $$K(s,\sigma) = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2-2\cos\beta(s-\sigma)} - k_0(s,\sigma), \qquad \beta=\frac{\pi}{b}$$

とおいたとき

$$k_0(s,\sigma)\in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial k_0(s,\sigma)}{\partial s}\in L^2(\Omega), \qquad \Omega=[0,2b]\times[0,2b]$$

となる如きものとする。前節に導いた境界値問題の基本積分方程式はこの形である。

$k_0(s,\sigma)$ および $\frac{\partial k_0(s,\sigma)}{\partial s}$ のFourier 級数をそれぞれ $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\sum k_{mn}e^{i\beta ms-i\beta n\sigma}$ および $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\sum K_{mn}e^{i\beta ms-i\beta n\sigma}$ とする。

(16)で $k_0(s,\sigma)$ の代りにその第 N 部分和

(17) $$k_N(s,\sigma) = \sum_{-N}^{N}\sum k_{mn}e^{i\beta ms-i\beta n\sigma}$$

をとつて得られる積分方程式を

(18) $K_N\tau \equiv \int_l \left\{ \frac{1}{2}\log\frac{1}{2-2\cos\beta(s-\sigma)} - k_N(s,\sigma) \right\} \tau(\sigma)\, d\sigma = g(s)$

とする。区間 l 上の点 s, σ に対し

(19) $t = e^{i\theta}, \quad t_0 = e^{i\phi}, \quad \theta = \beta\sigma, \quad \phi = \beta s$

とおくと，区間 l 上の点と複素 t 平面上の単位円弧上の点との間に一対一の対應がつく。

$$\tau(t) = i\pi\, \tau(\sigma), \qquad \frac{dg(s)}{ds} = f(s) = f(t_0)$$

とおき，(18) の両辺を S で微分すると

(20) $\frac{1}{i\pi}\int_l \tau(t) \left\{ \frac{1}{t-t_0} - \sum_{-N}^{N}\sum K_{mn}\, t_0^{m}\, t^{-n-1} \right\} dt = f(t_0)$,

が得られる。(15) は

(21) $\tau(t) = \tau_j(t) \big/ \sqrt{t-t_j}\ , \quad t_j = e^{i\beta a_j}$

のようにかき直される。(20) で l は複素平面上の円弧を意味する。

(20) の解 $\tau(t)$ が存在するものと仮定して，それを用いて函数

(22) $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \tau(t) \left\{ \frac{1}{t-z} - \sum_{-N}^{N}\sum K_{mn}\, z^{m}\, t^{-n-1} \right\} dt$

を考える。これは次の性質をもつ。

(23) (i) $\Phi(z)$ は $z \neq 0$, $z \neq \infty$, $z \notin l$ で正則.

(ii) $\Phi(z) = O(|z|^{-N})$, $|z| \to 0$,

$\Phi(z) = O(|z|^{N})$, $|z| \to \infty$.

(iii) $\Phi(z) = O(1/\sqrt{z - t_j})$, $z \to t_j$.

(iv) $\Phi^{+}(t_0) + \Phi^{-}(t_0) = f(t_0)$, $t_0 \in l$.

(v) $\Phi^{+}(t_0) - \Phi^{-}(t_0) = \tau(t_0)$, $t_0 \in l$.

ただし $\Phi^{\pm}(t_0)$ は $\Phi(z)$ の, z が $t_0 \in l$ に正負の側から近ずいたときの極限値を表すものとする。

(23) の (v) は, (20) の解 τ が存在すれば, それは (i) ～(iv) なる性質で規定される函数 $\Phi(z)$ の, l 上での極限値の差で与えられねばならぬことを意味する。一方 (23) の (i)～(iv) なる性質をもつ函数の最も一般な形は次式で与えられることが証明出来る。

(24) $$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2i\pi}\int_l \frac{1}{t-z}\frac{f(t)}{X(t)}\,dt + \frac{X(z)}{2}\sum_{-N}^{N+\nu} p_n z^n.$$

ただし, $\{p_n\}$ は未定定数であり $X(z)$ は次の (25) で定義される函数, 又被積分函数の $X(t)$ は $X(z)$ の z が $t \in l$

に正の側から近ずいたときの極限値；$X(t)=X^{+}(t)$ である。

(25) $X(z)=1\Big/\sqrt{\prod_{j=1}^{2\nu}(z-t_j)}$

従って，(24)の，zを$t\in l$に近ずけた極限値を計算することにより（20）の解τはもしあるとすれば

(26) $\tau(t)=\dfrac{X(t)}{i\pi}\displaystyle\int_l \frac{1}{\zeta-t}\frac{f(\zeta)}{X(\zeta)}d\zeta+X(t)\sum_{-N}^{N+\nu}p_n t^n$

でなくてはならぬ。逆に(26)を(20)に代入すると，(26)が(20)の解であるために定数$\{p_n\}$の満足すべき必要充分条件として

(27) $-\displaystyle\sum_{-N}^{N+\nu}p_n H_n(t_0)+\sum_{-N}^{N}t_0^m\sum_{-N}^{N}K_{mn}\sum_{-N}^{N+\nu}p_l\,\alpha_{l-n}$

$$=\frac{1}{i\pi}\sum_{-N}^{N}t_0^m\sum_{-N}^{N}K_{mn}\int_l\frac{f(\zeta)}{X(\zeta)}H_{-n-1}(\zeta)d\zeta+\frac{1}{i\pi}\int_l\frac{1}{\zeta-t_0}\frac{f(\zeta)}{X(\zeta)}\{H_0(t_0)-H_0(\zeta)\}d\zeta$$

が得られる。こゝに

(28) $H_n(t)=\dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_l\frac{X(\zeta)\zeta^n}{\zeta-t}d\zeta,\qquad \alpha_n=\frac{1}{i\pi}\int_l X(\zeta)\zeta^n d\zeta$

とおいた。(27)はt_0についての多項式であるがこれはt_0の如何に拘らず成立せねばならぬから両辺のt_0の同じ巾の係数がそれぞれ等しいことが必要且充分である。こゝ

で (27) を t_0 の多項式として表すために次の補題が重要な役割を果す。

$$
(29) \qquad H_n(t) = \begin{cases} -\sum\limits_{m=0}^{\infty} \beta_{m-n} t^m, & (n \geqq \nu \geqq 0) \\ 0, & (\nu-1 \geqq n \geqq 0) \\ -\sum\limits_{n}^{-1} \gamma_{m-n} t^m, & (-1 \geqq n) \end{cases}
$$

ただし，$\{\beta_m\}$, $\{\gamma_m\}$ は $X(z)$ の Laurent 展開の係数である:

$$
(30) \qquad X(z) = \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{-\nu} \beta_m z^m, & |z| \to \infty \\ \sum\limits_{0}^{\infty} \gamma_m z^m, & |z| \to 0 \end{cases}
$$

こゝでは $\nu \geqq 0$ 即ち L のすべての端点で (21) が成立つとしているから (29) も $\nu \geqq 0$ に対する結果である。そうでなくて $\nu \leqq -1$ の場合 (29) はすこし変る。証明は Cauchy の定理をつかつて出来るが詳しいことは省く。

(29) を代入して (27) の両辺の t_0^m の係数を等しいとおくと $\{p_n\}$ についての次の連立一次方程式が得られる。

$$
(31) \qquad \sum_{-N}^{N} p_n \sum_{-N}^{N} K_{m\ell}\, \alpha_{n-\ell} + \begin{cases} \sum\limits_{m+\nu}^{N+\nu} p_n \beta_{m-n} & (0 \leqq m \leqq N) \\ \sum\limits_{-N}^{m} p_n \gamma_{m-n} & (-N \leqq m \leqq -1) \end{cases} = g_m,
$$

ただし g_m は既知定数である：

$$(32)\qquad g_m = -\sum_{-N}^{-\nu-1} K_{mn} \sum_{l=1}^{-n-\nu} \beta_{n+l} f_l - \sum_{0}^{N} K_{mn} \sum_{-n}^{0} \gamma_{n+l} f_l,$$

$$f_l = \frac{1}{\pi}\int_l \frac{f(\sigma)}{X(\sigma)} e^{i\beta l\sigma} d\sigma$$

逆に $\{p_n\}$ が (31) を満足するものであれば (26) は (20) の解であることは明かである。しかし (26) を (18) に代入した場合，すなわち $K_N\tau - g$ に代入したときこれは必ずしも 0 とならず $K_N\tau - g = \mathrm{const.}$ となる。この const. が 0，つまり (26) が (20) のみならず (18) の解でもあるためには (31) の他に更に次式の成立つことが必要充分である。

$$(33)\qquad \sum_{-N}^{N} p_n \Gamma_n(s_0) = \Lambda(s_0).$$

ただし，s_0 を l 上の任意の値として

$$\Gamma_n(s_0) = \int_l X(\sigma) e^{i\beta n\sigma} \left\{ \frac{1}{2}\log\frac{1}{2-2\cos\beta(s_0-\sigma)} - \sum_{-N}^{N}\sum k_{pq} e^{i\beta p s_0 - i\beta q\sigma} \right\} d\sigma,$$

$$\Lambda(s_0) = i\pi g(s_0) - \frac{1}{b}\int_l \frac{f(\sigma')}{X(\sigma')} d\sigma' \int_l \frac{X(\sigma)\, d\sigma}{1-e^{i\beta(\sigma-\sigma')}} \left\{ \frac{1}{2}\log\frac{1}{2-2\cos\beta(s_0-\sigma)} - \sum_{-N}^{N}\sum k_{pq} e^{i\beta p s_0 - i\beta q\sigma} \right\}$$

すなわち，(18)；$K_N\tau - g = 0$ は連立一次方程式 (31)，(33) を満足する $\{p_n\}$ を用いて (26) でつくられる函数で与えられこれ以外にはない。$\{p_n\}$ は $2N+\nu+1$ 個の未知数

であり，(31)(33) は $2N+2$ 個の方程式である。(18) の解の存在，一意性は連立方程式 (31)(33) のそれらと同じものである。

最後に例として格子による平面波の廻折の問題を考えよう。格子は $L=\{(x,y)\mid x=0,\ -\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}\}$ を周期 2π で $-\infty<y<\infty$ に配列したものとし，平面波 e^{-ikx} が入射するものとする。この波動現象は L 以外の各点で (1) を，そして L 上で (2) を満足する函数 u で与えられるが，境界の周期構造を考えるとそれは

$$u(x,y)=\sum \alpha_n e^{\pm ik_n x+iny}+e^{-ikx},\quad (\pm \text{ は } x \gtrless 0 \text{ に対応する})$$

である。こゝに

$$k_n^2=k^2-n^2,\quad \mathrm{Im}\,k_n\leqq 0.\qquad \alpha_n=\frac{-i}{2k_n}\sum p_m\alpha_{m-n}$$

で与えられる。$\{p_m\}$ は (31)(32) に相当する次の連立方程式により定められる定数である。

$$K_m\sum_{-N}^{N+1}p_n\alpha_{n-m}+\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{m+1}^{N+1}p_n\beta_{m-n}\\ \displaystyle\sum_{-N}^{m}p_n\gamma_{m-n}\end{array}\right\}=0\qquad \begin{array}{l}(0\leqq m\leqq N)\\ (-N\leqq m\leqq -1)\end{array}$$

ただし　$K_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{\sqrt{n^2-k^2}}\right)$，$K_{-n}=-K_n$　$(n\geqq 0)$。

端点 a_j の座標は $y_j=\pm\frac{\pi}{2}$ だから $X(z)=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ となりこれから定数 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ は次のように与えられる。

$$\beta_{-2p-1}=\gamma_{2p}=\frac{(-1)^p(2p)!}{(2^p p!)^2}, \qquad \beta_{-2p}=\gamma_{2p+1}=0.$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{1+e^{i2\theta}}}d\theta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}.$$

最後に (33) は

$$\Gamma_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{1+e^{i2\theta}}}\log\frac{1}{2-2\cos\theta}\,d\theta-\frac{i}{2k}\alpha_n-\sum_{\substack{m=-N\\m\neq 0}}^{N}\frac{1}{m}K_m\alpha_{n-m}.$$

$$\Lambda=1.$$

とすればよい。

文献

[1]. H. Weyl ; Math. Z. 55 (1952) 187–198

[2]. A. Olte & Y. Hayashi : Tech. Rep. Rad. Lab. Univ. Michigan 5825-1-F (1964)

[3]. Y. Hayashi : Jour. Appl. sci. Res. (Netherland) B12 (1955) 331–359

[4] Y. Hayashi : Proc. Japan Acad. 42 (1966) 725–130

[5]. Y. Hayashi: Proc. Japan Acad. 42 (1966) 731-736.

[6] Y. Hayashi: Proc. Japan Acad. 42 (1966) 91-94.