

微分方程式の数値解法における安定性

東京理科大 清水辰次郎
林 健児

§1 収束, 安定, 各種不安定

常微分方程式 $y' = f(x, y)$ の初期値 $y(0) = y_0$ なる解の数値解法の安定性について考える。

$f(x, y)$ は $0 \leq x \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ で適当な条件を満足し, 解は $x=0$ から $x=x_n$ まで存在するものとする。

数値解法につき, L. Fox: Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations には不安定性につき, Inherent instability, Partial instability, Strong instability, Weak instability と列挙してそれぞれ定義が載っている。

或る解法が収束 (Convergent) であるとは刻み h , ステップ数 n とし, $nh = x_n$ とするとき, $x_n \rightarrow \infty$ と定め, $h \rightarrow 0$ (したがって $n \rightarrow \infty$) とするとき $0 \leq x \leq x_n$ なる x について数値解 y_m が方程式の真の解 $y(x_m)$ に一様に収束することをいう。

或る解法が安定 (stable) であるとは刻み h を一定にして n を増やすとき十分大きな n については数値解の漸近的性質が真の解のそれと同じになるときをいう。

Inherent instability は計算途中の四捨五入等のためにお

くるもので数値解法には避けられないもの。

Partial instability は刻み h が或る値より大きければ不安定、或る値より小さければ安定となるようなもの。

Strong instability は収束もせず不安定でもあるもの。

Weak instability は収束はするが不安定なもの。

才一は方程式によらず方法のみにより、才二、才三は方程式によつて不安定が起つたりおこらなかつたりする。

才、才はベクトルとして、方程式の連立したものと考えてもいいが、簡単のため一階の方程式として考える。

§2 収束条件と数値解法

本節では主として線型多段法 (linear multi-step 法)

$$y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y_n = h (\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \cdots + \beta_0 f_n)$$

$$f_m = f(x_m, y_m)$$

を考える。そして $P(z) = z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \cdots + \alpha_0$, $\sigma(z) = \beta_k z^k + \beta_{k-1} z^{k-1} + \cdots + \beta_0$ とおく。

そのとき Dahlquist により方法が収束するための必要十分条件は $P(z) = 0$ の根の絶対値は 1 または 1 より小さく、絶対値 1 なる根は単根

$$P(1) = 0, \quad P'(1) = \sigma(1)$$

なることが知られている。(P. Henrici: Discrete Variable Method)

よ、 ϵ Strong instability のおこる方法は上記の条件を満足せぬものということができる。

以上のことは方法が収束すれば存在域内の x を定めるとき十分刻みを小さくすれば 0 から x までの真の解に数値解が限りなく近づくということでもあるが、実際の数値解法ではそのように刻みを小さくすれば四捨五入誤差が増大し、 ϵ も実用的ではない。

それゆえ実際には x の位置を定めるのではなく、刻み h を十分小さくし h を一定にして、 n を増して行く方法が採られる。(真の解は必要ならどこまで存在すると仮定する)

以下、数値解法は収束条件を満足する方法に限り、四捨五入誤差は考えない。

§3 Weak instability

刻み h を一定として数値解法をする場合には Weak instability と Partial instability が問題となる。

$y' = Ay$ (A は正または負の定数), $y(0) = 1$ なる真の解は $y = e^{Ax}$ であるが、 $A < 0$ なる場合方法によっては n が或る程度大となると数値解は絶対値の大きな正、負の向の振動を起す。中点則、Milne 法がこれに属する。これが weakly unstable (weakly stable) といわれられている。

いま中点法: $y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}$ を $y' = \pm y$ に適用すると $y_{n+2} = y_n \pm 2hf_{n+1}$ となり, これを定差方程式とみると, \pm に対応してそれぞれ $y_n^+ = C_1 \lambda_2^n + C_2 (-1)^n \lambda_1^n$, $y_n^- = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$; $\lambda_1 = -h + \sqrt{1+h^2}$, $\lambda_2 = h + \sqrt{1+h^2}$, (C_1, C_2 は任意定数) なる一般解を得る. さらに出発値として $y_1^+ = 1$, $y_1^- = e^{\pm h}$ にとれば \pm に応じて

$$C_1 \doteq 1 + \frac{h^3}{12}, \quad C_2 \doteq -\frac{h^3}{7} \quad ; \quad C_1 \doteq 1 - \frac{h^3}{6}, \quad C_2 \doteq \frac{h^3}{12}$$

となり, y_n^+ では $C_1 \lambda_2^n$, y_n^- では $C_1 \lambda_1^n$ が真の解を近似する項であり他の項が不安定性を起す成分である。(表1)

(表1)

$h=0.1$	$y' = y$			$y' = -y$		
x	$C_1 \lambda_2^n$	e_n	$\left \frac{C_1 \lambda_2^n}{e^x} \right $	$C_1 \lambda_1^n$	e_n	$\left \frac{C_2 \lambda_2^n}{e^x} \right $
0.5	1.6475 (0)	1.2769 (-3)	9.1299 (-5)	6.0699 (-1)	-4.5804 (-4)	7.4638 (-5)
1.0	2.7140 (0)	4.2589 (-3)	9.1374 (-5)	3.6846 (-1)	-5.8337 (-4)	7.4576 (-5)
2.0	7.3652 (0)	2.3808 (-2)	9.1526 (-5)	1.3577 (-1)	-4.3970 (-4)	7.4451 (-5)
3.0	1.9987 (1)	9.7907 (-2)	9.1678 (-5)	5.0032 (-2)	-2.4470 (-4)	7.4329 (-5)
4.0	5.4241 (1)	3.5621 (-1)	9.1830 (-5)	1.8436 (-2)	-1.2059 (-4)	7.4205 (-5)

この現象の抑制については多くの文献があり, たとえば, Stetter は Milne の修正子を反復させずに新しい予測子をつくら不安定の起らぬ方法を示し, Hamming は更に一般的研究より予測子は Milne のをつかい, 新しい修正子をつくら, 2.

不安定のおこらぬ方法を示した。(weakly stableでないものを strong stable という) 伊理氏は y_n, y_{n-1}, y_{n-2} 等の或る種の平均を考へることにより不安定のおこるのを防止する方法を提案した。

ところが strongly stable な方法, にとせば Euler 法, 梯型法, Hamming 法についても $y' = -xy$ ($y(0)=1$ なる真の解は $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$) の数値解法においては, h をいかに小さくとっても, n が (すなわち x が) 大になると数値解 y_n は正, 負の値の向を振動することになる。

何故ならば

$$\text{Euler 法; } y_{n+1} = y_n - 2h^2 y_n = (1 - 2h^2) y_n$$

ゆえに

$$y_{n+1} = (1 - 2nh^2)(1 - 2(n-1)h^2) \cdots (1 - 4h^2)(1 - 2h^2) y_1$$

$$\text{梯型法; } y_{n+1} = y_n - \frac{h}{2}(nh y_n + (n+1)h y_{n+1})$$

ゆえに

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{n}{2}h^2}{1 + \frac{n+1}{2}h^2} \frac{1 - \frac{n-1}{2}h^2}{1 + \frac{n}{2}h^2} \cdots \frac{1 - \frac{1}{2}h^2}{1 + h^2} y_1$$

Euler 法では x が増大すれば絶対値の無限に増大する正負の値の向を振動し, 梯型法では n とともに y_n は零に近づくか同じく正, 負の向を振動する。(しかも $|e^y/y_n|$ は無限大に増大する。

Hamming 修正子

$$y_{n+1} = \frac{9}{8} y_n - \frac{1}{8} y_{n-2} + \frac{3}{8} \{ (n-1) h^2 y_{n-1} - 2n h^2 y_n - (n+1) h^2 y_{n+1} \}$$

から定差方程式の性質からわかるが、 h が一定で n が増大するのであるから $nh = A$ と考え実数 A が十分大きな $y' = -Ay$ なる方程式に適用すれば

$$y_{n+1} (1 + \frac{3}{8} hA) = (\frac{9}{8} - \frac{6}{8} hA) y_n + \frac{3}{8} hA y_{n-1} - \frac{1}{8} y_{n-2}$$

この定差方程式の独立な三つの解を $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n$ とすれば、 A が大となると $\frac{3}{8} hA - \frac{42}{8} > 0$ となれば、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ のうち一つは負で絶対値が 1 より大きい。

よって Hamming の修正子も n が増大すれば y_n は正、負の値の間を無限に振動する。

このことからみると安定性が weak とか strong とかいってもそれは $y' = Ay$ なる特殊な方程式についてしか問題とならないことがわかる。

$$\S 4 \quad \frac{dy}{dx} = -xy$$

まづ §3 で述べた多段法の一つである中点則を適用した場合を考えてみると、 $y_{n+2} = y_n \pm 2(n+1)h^2 y_{n+1}$ なる定差方程式と見なされる。これらの一般解は + の場合 $y_n^+ = C_0 K_n(\frac{1}{h^2}) + d_0 (-1)^n I_n(\frac{1}{h^2})$ 、- の場合 $y_n^- = C_0 I_n(\frac{1}{h^2}) + d_0 (-1)^n K_n(\frac{1}{h^2})$ 、 I_n, K_n は変形ベッセル関数、となる。さらに虫食値として

$y_0^\pm = 1$, $y_1^\pm = e^{\pm \frac{h^2}{2}}$ とれば, それぞれ漸近的に

$$\begin{cases} C_0 \sim \frac{e^{\frac{1}{h^2}}}{2\sqrt{2\pi}} h (1 + o(h^2)) \\ d_0 \sim \frac{45\sqrt{2\pi}}{2} e^{-\frac{1}{h^2}} h^3 (1 + o(h^2)) \end{cases} \quad \begin{cases} C_0 \sim \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \sqrt{2\pi} (1 + o(h^2)) \\ d_0 \sim -\frac{11}{32} \frac{e^{\frac{1}{h^2}}}{\sqrt{2\pi}} h^3 (1 + o(h^2)) \end{cases}$$

で評価できる。特に $y' = -xy$ の場合の係数は $y' = -y$ の係数の場合と異った性質を持つことがわかる。(表2)

(表2)

h	$y' = y$		$y' = xy$		$y' = -y$		$y' = -xy$	
	C_1	C_2	C_0	d_0	C_1	C_2	C_0	d_0
0.2	1.000(0)	-7.839(+4)	2.887(11)	-3.410(-14)	9.995(-1)	5.262(-4)	1.732(+0)	-5.879(-7)
0.1	1.000(0)	-9.122(-5)	2.148(+4)	-1.159(+7)	9.999(-1)	7.470(-5)	9.313(+3)	-2.694(+3)
0.08	1.000(0)	-4.594(+5)	7.206(+8)	-4.415(+2)	9.999(-1)	3.915(-5)	4.336(+6)	-7.376(+3)

y_n^+ は $C_0 k^n$, y_n^- は $C_0 l^n$ が真の解を近似する項であり, 他の項が不安定性をおこす成分である。(表3)

つぎに一段法 (One step法) について考える。Euler法では前述のように $y_{n+1} = (1 - nh^2) y_n$ となり正, 負の向を振動する。

($y' = -xy$ の場合) また改良 Euler法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h [f_n + f(x_n + h, y_n + h f_n)]$$

については $y_{n+1} = (1 \pm \frac{2n+1}{2} h^2 + \frac{n(n+1)}{2} h^4) y_n$

(表3)

$h=0.1$	$y' = xy$			$y' = -xy$		
	$C_0 k_n$	e_n	$C_1 I_n / e^{-\frac{x^2}{2}}$	$C_0 I_n$	e_n	$C_1 k_n / e^{\frac{x^2}{2}}$
0.5	1.1324 (0)	7.1496 (-4)	1.2442 (-5)	8.8137 (-1)	5.2266 (-4)	1.2537 (-5)
1.0	1.6440 (0)	4.7156 (-3)	1.2422 (-5)	6.0527 (-1)	1.2643 (-3)	1.2509 (-5)
2.0	7.2697 (0)	1.1932 (-1)	1.2408 (-5)	1.3489 (-1)	4.4703 (-4)	1.2342 (-5)
3.0	8.5269 (1)	4.7483 (0)	1.2588 (-5)	1.1233 (2)	-1.2423 (-4)	1.1883 (-5)
4.0	2.5951 (3)	3.8537 (2)	1.3277 (-5)	3.5779 (-4)	-2.2326 (-5)	1.0921 (-5)

Modified Euler 法

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}f_n)$$

については $y_{n+1} = (1 \pm \frac{2n+1}{2}h^2 + \frac{n(2n+1)}{4}h^4) y_n$ となる。

いづれも, $y' = -xy$ の場合, はじめは減少するがついには無限に増大する。($h=0.1$, $x=20$ から) (表6参照)

同様な論法で Kutta 三階法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = f_1, \quad k_2 = f[x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f_n], \quad k_3 = f[x_n + h, y_n - hf_n + 2hf[x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f_n]]$$

では n^3 の項がきいて, $y' = -xy$ の場合, 正, 負の間を振動する。

また普通の Runge-Kutta 法では, $y' = -xy$ の場合, n^4 がきいて正の無限大になる。

すなわち $y' = -xy$ の場合には h を小さく定めても一定である限り必ず無限に振動するか或は無限に増大する。

それゆえ係数に独立変数を含んで (表6)

いる方程式については非線型方程式までいかずとも予想外の困難が数値解法には伴っていることを知る。

$y' = -xy \quad h = 0.1$		
x_n	y_n	e_n
5.	0.50648(-5)	0.13382(-5)
10.	0.18378(-18)	0.18359(-19)
15.	0.59615(-32)	0.59615(-32)
20.	0.23852(-37)	0.23852(-37)
25.	0.42254(-32)	0.42254(-32)
30.	0.76538(-17)	0.76538(-17)

§5 $\frac{dy}{dx} = -xy$ への平滑子の適用

多段法を用いる場合における振動現象の抑制方法の一つに或る種の平均値を利用する平滑方法が考えられている。その代表的な方法として、平滑子(I)

$$F_1(y_n) = \frac{1}{16} (y_{n+2} + 4y_{n+1} + 6y_n + 4y_{n-1} + y_{n-2})$$

と、平滑子(II) (中点則に対して)

$$F_2(y_n) = \frac{1}{16} (11y_n + 12y_{n-1} - 6y_{n-2} - 4y_{n-3} + 3y_{n-4})$$

がある。ここでは上記の方程式を中点則を用いて解く場合の平滑効果について考える。平滑間隔を N として $y_n = c_0 I_n + d_0 \bar{K}_n$ ($\bar{K}_n = (-1)^n K_n$) に平滑子を適用した結果として

$$F_1(y_N) = c_0 I_N + d_0 \bar{K}_N + \Delta_N + \delta_N$$

$$\begin{cases} \Delta_N = \frac{c_0}{8} [(N^2 h^4 - 5) I_N + (4 - h^2) I'_N + I''_N] \\ \delta_N = \frac{d_0}{8} [(N^2 h^4 - 5) \bar{K}_N + (4 - h^2) \bar{K}'_N + \bar{K}''_N] \end{cases}$$

$$F_2(\gamma_N) = c_0 I_N + d_0 K_N + \alpha(N)(c_0 I_N + d_0 \bar{K}_N) + \beta(N)(c_0 I_N'' + d_0 \bar{K}_N'') \\ + \gamma(N)(c_0 I_N'' + d_0 \bar{K}_N'')$$

$$\alpha(N) = \frac{1}{4}(-2 + 4h^2 - 3(N^3 - 4N + 6)h^4 - 4N(N-1)(N-2)h^6 \\ - 6N(N-2)(N-3)h^8)$$

$$\beta(N) = \frac{1}{4}(2 - 3h^2 - 4(N-1)(N-2)h^4 + 6N(N-2)(N-3)h^6)$$

$$\gamma(N) = \frac{3}{2}(N-2)(N-3)h^4$$

を得る。平滑方法として $\gamma_N = F(\gamma_N)$, $\gamma_{N+1} = F(\gamma_{N+1})$ を新たな出発値としてつぎに平滑するまで計算するから、差分方程式の解は

$$\begin{cases} c_1 I_N + d_1 \bar{K}_N = \gamma_N \\ c_1 I_{N+1} + d_1 \bar{K}_{N+1} = \gamma_{N+1} \end{cases}$$

より求まる c_1, d_1 により $\gamma_n = c_1 I_n + d_1 \bar{K}_n$ と表わせる。

さらに V 回平滑子を適用し、 $(V+1)$ 回平滑子を適用するまで差分方程式の解

$\gamma_n = c_V I_n + d_V \bar{K}_n$ の係数は、

$$\begin{cases} c_V I_{VN} + d_V \bar{K}_{VN} = \gamma_{VN} \\ c_V I_{VN+1} + d_V \bar{K}_{VN+1} = \gamma_{VN+1} \end{cases}$$

より定まる。 $\gamma_{VN}, \gamma_{VN+1}$ の具体的な型は前述の式で N のかわりに $VN, VN+1$ が入った式となる。

まづ $VN h < 1$ なる場合 c_V, d_V の状態について考えてみるとする。この場合ベッセル関数の漸近展開式を用いて、 c_V, c_{V+1} ;

d_v, d_{v-1} についての漸化式を得る。

平滑子 (I) の場合 :

$$\begin{cases} C_v = C_{v-1} \left(1 - \frac{VN+2}{4} h^2 + \dots\right) + (-1)^{VN} d_{v-1} \frac{5\pi}{16} e^{-\frac{2}{h^2}} \left(1 + \frac{4VN+7}{5} h^2 + \dots\right) \\ d_v = -(2VN) h^2 d_{v-1} (1 + \dots) + (-1)^{VN+1} C_{v-1} \frac{h^4}{2\pi} e^{\frac{2}{h^2}} (VN+1) + \dots \end{cases}$$

平滑子 (II) の場合 :

$$\begin{cases} C_v = C_{v-1} \left(1 - \frac{VN}{4} h^2 + \dots\right) + (-1)^{VN} d_{v-1} \frac{\pi}{4} e^{-\frac{2}{h^2}} (VN + \frac{1}{2})(VN+2) h^2 + \dots \\ d_v = d_{v-1} \left(3(VN - \frac{3}{2}) h^2 + \dots\right) + (-1)^{VN} C_{v-1} \frac{3}{4\pi} h^4 e^{\frac{2}{h^2}} (1 + \dots) \end{cases}$$

よって

$VNh < 1$ のとき

平滑子 (I) の場合

$$\begin{cases} C_v = C_0 \left(1 - \frac{(1+2+\dots+v)N+2\cdot v}{4} h^2 + \dots\right) \\ d_v = (-1)^{VN} d_0 \left(\frac{32}{11} (VN+1) + \dots\right) \end{cases}$$

となり、平滑をほどくたびに不安定性を増大させている。

また

平滑子 (II) の場合

$$\begin{cases} C_v = C_0 \left(1 - \frac{v}{8} (v+5) h^2 + \dots\right) \\ d_v = d_0 \left((-1)^{v(N+1)} \frac{16}{3} + \dots\right) \end{cases}$$

となり、 d_1 が d_0 の約 5 倍となり、以下一完となることか解る。

(表4)

$h=0.1$ $N=5$	平滑子(I)		平滑子(II)	
v	C_v	d_v	C_v	d_v
0	9.3132 (-43)	-2.6940 (39)	9.3132 (-43)	-2.6940 (39)
1	9.2762 (-43)	-3.9403 (40)	9.3094 (-43)	1.3681 (40)
2	9.2715 (-43)	4.0951 (40)	9.2994 (-43)	-3.7425 (39)
3	9.3218 (-43)	-1.8699 (40)	9.2888 (-43)	-1.3512 (39)

つきに x が大きいときについて考える。ここでは無縁成分 \bar{K}_n について直接考えないで、定差方程式にもどって考えるのが便利である。すなわち無縁成分に対応する定差方程式とし

$$y' = -kx y$$

$$y_{n+2} = y_n - (n+1)H y_{n+1} \quad (H = 2kh^2)$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = -(1+\varepsilon) = -\alpha, \quad \varepsilon = o(h)$$

より出発する。

ここで

$$\begin{cases} y_{2m} = 1 + a_{2m,1} \alpha H + a_{2m,2} \alpha H^2 + \dots + a_{2m,2m-1} \alpha H^{2m-1} \\ y_{2m+1} = -(\alpha + b_{2m+1,1} \alpha H + b_{2m+1,2} \alpha H^2 + \dots + b_{2m+1,2m} \alpha H^{2m}) \end{cases}$$

とおけば、係数間に次の関係式が成立する。

$$\begin{cases} a_{2m,k} = a_{2m-2,k} + (2m-1) b_{2m-1,k-1} \\ b_{2m+1,k} = b_{2m-1,k} + 2m a_{2m,k-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{2m,0} = 1, & b_{2m+1,0} = 1 \\ a_{2m,1} = m^2, & b_{2m+1,1} = m(m+1) \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} a_{2m,k} = \alpha_{1,k} m^{2k} + \alpha_{2,k} m^{2k-1} + \dots \\ b_{2m+1,k} = \beta_{1,k} m^{2k} + \beta_{2,k} m^{2k-1} + \dots \end{cases}$$

とおくことにより、次の近似式を得る。

$$\begin{aligned} \gamma_{2m} \approx & 1 + \alpha \sum_{l=0}^{m-1} \left\{ \frac{m^{4l+2}}{(2l+1)!} - \frac{m^{4l}}{3(2l)!} l(l+1) \right\} H^{2l+1} \\ & + \sum_{l=1}^{m-1} \left\{ \frac{m^{4l}}{(2l)!} - \frac{m^{4l-2}}{3(2l-1)!} (l^2 + \frac{1}{2}) \right\} H^{2l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{2m+1} \approx & - \left[\alpha + \sum_{l=0}^{m-1} \left\{ \frac{m^{4l+2}}{(2l+1)!} + \frac{m^{4l+1}}{(2l)!} - \frac{m^{4l}}{3(2l)!} l(l-2) \right\} H^{2l+1} \right. \\ & \left. + \alpha \sum_{l=1}^m \left\{ \frac{m^{4l}}{(2l)!} + \frac{m^{4l-1}}{(2l-1)!} - \frac{m^{4l-2}}{3(2l-1)!} (l^2 - l + \frac{1}{2}) \right\} H^{2l} \right] \end{aligned}$$

いま平滑子(II)を施すと

$$\gamma_{2m} \approx \gamma_{2m+1} \approx \left| \frac{k^2}{4} x^2 h^2 e^{\frac{k}{2} x^2} \right|$$

となることから、平滑子によつて、 h^2 のorderにはなつてい
るが、その係数 $x^2 e^{\frac{k}{2} x^2}$ のために、 x が大きいとき、すなわち
 m が大きいとき、平滑子が有効でなくなる。

さらに中点則よりも、不安定が著しく表われる例として

$$f_{n+2} = f_n + h \{ A f_{n+1} + B f_n \}$$

を考へる。(中点則は $A=2, B=0$)

収束のための必要十分条件は $A+B=2$, 不安定現象の起

るのは $A-B$ のときで、この差が大きいほど不安定は起り易くなる。この場合 y_n に関する差分方程式は

$$\begin{cases} y_{n+2} = y_n - \{A(n+1)y_{n+1} + B_n y_n\} H & (H = kh^2) \\ y_0 = 1, \quad y_1 = -d \end{cases}$$

となり、 a と同様にして

$$\begin{cases} y_{2m} = 1 + a_{2m,1} H + a_{2m,2} H^2 + \dots + (2m-1)! A^{2m-1} H^{2m-1} \\ y_{2m+1} = -(d + b_{2m+1,1} H + b_{2m+1,2} H^2 + \dots + (2m)! A^{2m} H^{2m}) \\ \begin{cases} a_{2m,0} = 1, \quad a_{2m,1} = (Ad - B)m^2 + Bm, \dots \\ b_{2m+1,0} = d, \quad b_{2m+1,1} = (A-Bd)m^2 + Am, \dots \end{cases} \end{cases}$$

となる。

(表5)

平滑子なし		平滑子 (I)				平滑子 (II)			
		(10.10)		(25.10)		(10.10)		(25.10)	
x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n
2.40	2.7817(-3)	4.68	3.9227(-10)	4.88	5.1683(-11)	3.40	9.0750(-6)	3.52	3.8122(-6)
2.44	3.1008(-3)	4.72	4.5705(-10)	4.92	8.8124(-11)	3.44	9.3713(-6)	3.56	4.4034(-6)
2.48	1.5711(-3)	*4.76	2.4446(-10)	*4.96	3.7954(-11)	3.48	3.9170(-6)	3.60	1.3040(-6)

($h = 0.04$)

§6 Partial instability

$y' = -10y + 9 - 10x$ を一段法のテ-ラ-展開の二次の項までとった方法で計算すると、 $y_{n+1} = (1 - 10h + 50h^2)y_n + h(9 -$

$10x_n + 50h^2(x_n - 1)$ となる。 $(1 - 10h + 50h^2) = B$ とおくと $h > 0.2$ のとき $B > 1$, $h < 0.2$ のとき $0 < B < 1$, そして $y(0) = 2$ とすれば真の解は $y = 10^{-10x} - x + 1$ で $x_n = nh$ とおくと

$$y_{n+1} = 1 - (n+1)h + (1 - 10h + 50h^2)^n e^{-10h}$$

となり $h > 0.2$ ならば不安定となり, $h < 0.2$ ならば安定,

$|e^n/y_n| \rightarrow 0$, このような場合を partial instability というか

上の場合もし $y(0) = 1$ とすると $x_n = nh$ に対し $y_{n+1} = 1 - (n+1)h$

となり真の解 $y = -x + 1$ となり h がなんであろうと不安定は

おこらない。このように partial instability は方法, 方程式, 初期値に従属する。

この現象は非線型方程式の場合, 極めて注意を要することになる。たとえば $y' = y^6$ において $y(0) = -5$ なる解は常に $y < 0$ ぞ, $x \rightarrow \infty$ のとき $y \rightarrow 0$ である。ところが Euler 法でもなんでも $h = 0.0001$ にとると $y(h) > 0$ となりそれから先は $y > 0$, $x \rightarrow \infty$ で $y \rightarrow \infty$ になってしまう。

方程式により初期値によって刻み h は小さくしなければならぬ例となる。しかし, 刻み h が大きければ不安定となり, 十分小さければ不安定が起らないということは, 普通のことのように思われるので, 特に名前などつける必要があるかどうかと思われる。むしろ初期値によって刻み h は十分小さく採らなければならぬという注意のように解すべきではなから

うか。そして上の例のように刻み丸がいかにか大きくとも完全に安定であったり、いかにか小さく採ってもいつか不安定になってしまうものの方が注目すべきではなからうか。

しかし十分小さい刻み丸に対し安定となるという考え方は安定の定義がはっきりしないのでそのように考えられているが、実際には一定の丸に対し安定でないという方が普通のものである。たとえば $y' = -y$ を Euler 法で近似するとき、 $y_n = (1-h)^n y_0$ となるが、誤差 $(1-h)^n - e^{-nh} = e_n$ は $e_n/e^{-nh} \rightarrow -1$ ($n \rightarrow \infty$)。これからみればむしろ十分小さな刻み丸にして安定となるのがめづらしいのであって、本節の線型方程式とその数値解法は偶然そうになっている。(註)

安定の定義は $|\frac{e_n}{y_n}| \ll 1$, $|\frac{e_n}{y(x_n)}| \ll 1$ も成立するくらいでないといけないのではなからうか。

(註) $e_n/y_n \rightarrow 1$ も安定だと仮りにすると次のようなことが起る。 $y_{n+2} - y_n = h(\alpha f_{n+1} + \beta f_n)$ は $\alpha + \beta = 4$, $\alpha < \beta$ (たとえば $\alpha = 1$, $\beta = 3$) のとき $y' = -y$ に対し、 $y(0) = 1$ のとき $nh = x_n$ を一定として $n \rightarrow \infty$ とすると $y_n \rightarrow e^{-2x}$ 。そして $e_n = e^{-2nh} - e^{-nh}$ (真の解は $y = e^{-x}$) であり、 $\frac{e^{-2nh} - e^{-nh}}{e^{-nh}} \rightarrow -1$ 。ところが上記の方法は Dahlquist の収束しない方法である。

尚、Todd: Survey of Numerical Analysis では安定の定義なしに numerical instability という語をつかっている。そして multistep法につき Dahlquist の $P(z)=0$ の根に関する条件を満足するものを安定と定義しているが、one step法は $P(z)=0$ の根に $z=1$ だけであるから $y_{n+1} = y_n + hf_n + h^2p_n$, p_n に何を付けても安定だということになり妙なことになる。

参考文献

- L.Fox: Numerical Solution of ordinary and partial Differential Equations (1962)
- P.Henrici: Discrete variable method in ordinary differential equations (1962)
- G.Dahlquist: Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations Math. Scand. 4 (1956), p.p. 33-53
- R.W.Hamming: Stable predictor-corrector methods for ordinary differential equations. J. Assoc. C.M. 6(1959) p.p. 37-47
- H.J.Stetter: Stabilizing predictor for weakly unstable correctors. Mathematics of Computation 19 (1965), p.p. 84-89

