数理解析研究所講究録
38巻 1968年 79-88

線型函数微分方程式系の基本行列について

東北大 理　　加藤順二

§1. 序

ユークリッド空間 R^n 上の線型常微分方程式系

(1) $$\dot{x} = A(t)x$$

の (t_0, x_0) を通る解 $x(t; x_0, t_0)$ は基本行列 $X(t, s)$ を用いて

(2) $$x(t; x_0, t_0) = X(t, t_0)x_0$$

によって表わされる。この基本行列の意味をいろいろに解釈することができる。まず、定義として、(i) $X(t,s)$ は系(1)の (n,n)-行列解、すなわち、その各列が(1)の解となっている (n,n)-行列であって条件

$$X(s,s) = E \text{（単位行列）}$$

をみたしている。また、(ii) (1)の解の全体は n 次元の線型空間をなしているが、$X(t,s)$ はこの空間の基底を与えており、したがって、逆に、(iii) 与えられた $X(t,s)$ を基本行列とするような方程式系は高々一通りにきまる。さらに、(iv) 固定

されたt、sに対して、$X(t,s)$は(2)によって定められたR^nからR^nへの連続な線型作用素を表わしている。

系(1)の随伴方程式系は内積のとり方に依存しているが、内積を$(x,y)={}^Tyx$(左肩のTは転置を表わす)によって与えれば、これはまた(1)の基本行列$X(t,s)$に対して${}^TX(s,t)$を基本行列とする方程式系であると述べることができる。そして、非同次系

$$\dot{y} = A(t)y + g(t)$$

の(t_0, x_0)を通る解$y(t;x_0,t_0)$は

$$(3) \qquad y(t;x_0,t_0) = x(t;x_0,t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t,s)g(s)ds$$

によって与えられることも周知の事実である。

性質(iv)に注目して(1)の零解が安定であることと、有界な定数$M(s)$があって、すべての$t \geqq s$に対して

$$\|X(t,s)\| = \sup_{\|x\|=1} \|X(t,s)x\| \leqq M(s)$$

が成りたっていることが同値、したがって、(1)の解が同等有界であることとが同値となる。さらに、(i)から(1)の解の有界性と同等有界性とが同値となり、安定性の理論における次の定理が得られる。

定理A。(1)の零解が安定であることと(1)の解が有界であることとは同値である。

さらに、(1)の解の一意性によって、基本行列が性質

(4) $$X(t,s)X(s,\tau)=X(t,\tau)$$

を持っていることを用いて、

定理B。(1)の零解が一様漸近安定であれば、それは指数的安定である。

を証明することができる。

こゝでは、線型函数微分方程式系に対して、このような性質をもった基本行列、あるいは、線型作用素が存在するかどうか、あるいは、上に述べたいくつかの事実がこの場合にも成り立っているかどうか考えてみたい。

§2. 基本行列。

$h>0$を与えられた定数としてCによって区間$[-h,0]$からR^nへの連続函数の全体を表わし、連続函数$x(s)$に対して、x_tによってその$s=t$におけるsegment、すなわち、

$$x_t(\theta)=x(t+\theta)\qquad \theta\in[-h,0]$$

によって定められたCに属する函数を表わし、$\dot{x}(t)$をその$s=t$における右側微係数とする。

線型函数微分方程式系

(5) $$\dot{x}(t)=F(t,x_t)$$

を考える。こゝで、$F(t,\varphi)$は$[0,\infty)\times C$において定義され、(t,φ)に関して連続でφに関して線型であるとする（このことを$F(t,\varphi)\in\mathcal{L}$で表わす）。たとえば、$h(t)\geqq 0$を有界な連続

函数、 $A(t)$、 $B(t)$ を連続な行列函数としたとき差分微分方程式系

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h(t))$$

はこの系 (5) の特別な場合となっている。

このとき、まず次の基本補題が得られる。

補題1。 $F(t,\varphi)\in \mathfrak{L}$ ならば、ある連続函数 $L(t)$ に対して、

$$\|F(t,\varphi)\| \leq L(t)\|\varphi\|_h$$

が $[0,\infty)\times C$ において成り立っている。こゝで、 $\|\varphi\|_h$ は C における一様 norm、すなわち、

$$\|\varphi\|_h = \sup\{\|\varphi(\vartheta)\| ; \vartheta\in[-h,0]\} 。$$

この補題によって、 (5) の解の存在とその一意性が保証されている。

直ちにわかるように、 (5) の解の全体はやはり線型空間をなしている（但し、このとき初期時間 t_0 は固定されているものとして、 $t\geq t_0$ においてのみ考えている）。しかし、このときこの空間の次元は無限次元である。したがって、 (ii) のような意味をもった $X(t,s)$ を見出すことはまずあきらめねばならない。 $X(t,s)$ を (5) の (n,n)－行列解で

$$X(s,s) = E, \quad X(s+\vartheta,s) = 0 \ (零行列) \quad \vartheta\in[-h,0)$$

をみたすものとしたとき、 Halanay [1] は非同次線型系

$$\dot{y}(t) = F(t,y_t) + g(t)$$

の (t_0,φ_0) を通る解 $y(t;\varphi_0,t_0)$ は (5) の (t_0,φ_0) を通る解を $x(t;\varphi_0,t_0)$ で表わすと

$$y(t;\varphi_0,t_0)=x(t;\varphi_0,t_0)+\int_{t_0}^{t}X(t,s)g(s)ds$$

で与えられることを示した。こゝで、$X(t,s)$ の初期函数は連続ではないが、上の補題によって、$F(t,\varphi)$ が φ に関して Lipschitz の条件をみたしていることから、$X(t,s)$ は一意的に存在している（例えば、Krasovskii [3] 参照）。この結果を (3) 式と比較して、この $X(t,s)$ が (5) に対して基本行列の役割りを果たしているように思われる。そこで、これを (5) の基本行列と呼んでその性質を二、三調べてみよう。

$X_t(s)$ によって $X(t,s)$ の segment、すなわち、

$$X_t(s)(\vartheta)=X(t+\vartheta,s)$$

なる函数を表わし、同様に $x_t(\varphi_0,t_0)$ によって $x(t;\varphi_0,t_0)$ の segment を表わす。次の補題を証明することができる。

補題2。任意な $\varphi\in C$、$t\geq h$、$\varepsilon>0$ に対して、自然数 m、数の組 ϑ_i，$-h\leq\vartheta_0<\vartheta_1<\cdots<\vartheta_m\leq 0$，および、ベクトル $c_i\in R^n$ $(i=0,1,\cdots,m)$ を適当にえらんで、

$$\|\varphi-\sum_{i=0}^{m}X_t(t+\vartheta_i)c_i\|_h<\varepsilon$$

が成り立つようにすることができる。さらに、$L>0$ に対して

$$\|\varphi(\vartheta)-\varphi(\vartheta')\|\leq L|\vartheta-\vartheta'|,\quad \vartheta,\ \vartheta'\in[-h,0]$$

がみたされているとき、

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sum_{i=0}^{m}\|C_i\|\le(2h\cdot\max\{L,M(t)\}+1)\|\varphi\|、$$

ここで、$M(t)=\sup\{L(u)\exp[\int_s^u L(\tau)d\tau];\ t\ge u\ge s\ge t-h\}$。

この補題の前半によって、$H(t,\varphi)\in\mathcal{L}$ かつ、任意な $t\ge s\ge 0$、$c\in R^n$ に対して、$H(t,X_t(s)c)=0$ ならば、すべての $t\ge h$, $\varphi\in C$ に対して $H(t,\varphi)=0$ となることが示される。したがって、

$$\dot x(t)=G(t,x_t),\quad G(t,\varphi)\in\mathcal{L}$$

も (5) と同じ基本行列 $X(t,s)$ を持っていれば、$[h,\infty)\times C$ において、$G(t,\varphi)=F(t,\varphi)$ でなくてはならない。すなわち、この意味で $X(t,s)$ は性質 (iii) をみたしていることがわかる。

さて、$\eta(t,\vartheta)$ を $[0,\infty)\times[-h,0]$ で定義された (n,n)-行列函数で ϑ に関して一様に t の連続函数、ϑ に関しては有界変動でその全変分は t の連続函数を上界にもって $\eta(t,0)=0$ のとき系

(6) $$\dot x(t)=\int_{-h}^{0}[d_\vartheta\eta(t,\vartheta)]x(t+\vartheta)$$

の随伴方程式系を Halanay [1] は

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{0}\eta^T(t-\vartheta,\vartheta)y(t-\vartheta)d\vartheta+y(t)\right]=0$$

によって与えた。ここで、$\vartheta<-h$ に対して $\eta(t,\vartheta)=\eta(t,-h)$ と定めている。一方、Hale [2] は (6) において η が t を含まないときに、その随伴方程式系を

$$\dot y(t)=-\int_{-h}^{0}[d\eta^T(\vartheta)]y(t-\vartheta)$$

で定義した。ここで、上の $\frac{d}{dt}$、$\dot y(t)$ は左側微係数を表わしている。これらは一見異なった随伴方程式系を与えているよう

に思われるが、いずれも、(6)の基本行列を $X(t,s)$ としたときその随伴方程式系の基本行列は ${}^{T}X(s,t)$ であることを述べている。したがって、すでに述べたことから、η が t を含んでいないときはこれらは一致していなくてはならない。一般に、$\eta(\vartheta)$ を有界変動で、$\vartheta \geqq 0$ において $\eta(\vartheta)=0$、$\vartheta \leqq -h$ において $\eta(\vartheta)=\eta(-h)$ とおいたとき、$\varphi(\vartheta)$ が $(-\infty, a)$ $(a>0)$ で連続で

$$\int_{-\infty}^{0} \|\varphi(\vartheta)\| d\vartheta < \infty$$

をみたすならば、

$$\int_{-\infty}^{0} [d\eta(\vartheta)]\varphi(\vartheta) = \int_{-h}^{0} [d\eta(\vartheta)]\varphi(\vartheta) = \frac{d}{dt}\Big[\int_{-\infty}^{0} \eta(\vartheta)\varphi(\vartheta - t)\,d\vartheta\Big]\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[\int_{-\infty}^{-t} \eta(t+\vartheta)\varphi(\vartheta)\,d\vartheta\Big]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[\int_{-\infty}^{0} \eta(t+\vartheta)\varphi(\vartheta)\,d\vartheta\Big]\Big|_{t=0}$$

が成り立っている。すなわち、あらっぽく云って、Stieltjes 積分においても微分と積分の順序が交換可能である。

補題2の後半を用いて、

$$M^{*}(t) = \sup\{M(s);\ t+h \geqq s \geqq t\}, \quad B(t) = \exp\Big[\int_{t}^{t+h} L(s)\,ds\Big],$$

$$\Phi(t,s) = \begin{cases} \sup\{|X(t,\tau)|;\ s+h \geqq \tau \geqq s\}, & t \geqq s+h \\ 1, & s+h > t \geqq s \end{cases}$$

とおいたとき、(5)の解 $x(t;\varphi_0,t_0)$ は評価式

$$|x(t;\varphi_0,t_0)| \leqq (1+2h M^{*}(t_0))\,B(t_0)\,\Phi(t,t_0)\,\|\varphi_0\|_h$$

をみたしていることが示される。この事実から、F が t を含んでいないときは、$X(t,s)=X(t-s,0)$、かつ、$X(t,0)$ は有限個の解からなることによって、(5)に対しても定理Aが正しい

ことが判かる。しかし、Fがtを含む場合は更に関する情報が得られない限り、この事実から定理Aの正否について判断することができない。

§3。線型作用素。

(5)の解を(2)式に対応して

$$x_t(\varphi_0, t_0) = T(t, t_0)\varphi_0$$

と書き表わす。このとき、解の性質から、$T(t,s)$はCからCへの線型作用素、さらに、Fが Lipschitz の条件をみたすことから、これが連続な作用素であることが示される。明らかに、これは性質(4)、すなわち、$t \geqq s \geqq \tau$において

$$T(t,s)\,T(s,\tau) = T(t,\tau)$$

が成り立っている。したがって、この事実を用いて定理Bがこの場合にも正しいことが示される。(Halanay)。

次の定理はよく知られている。

Banach-Steinhaus の定理(Zygmund [4])。$u_m(\varphi)$を Banach 空間Ω上の有界な線型作用素としてM_mをu_mの norm とする。このとき、Ωの第二類の集合Ω^*に属する各点φに対して$\sup_m |||u_m(\varphi)|||$が有界であれば、ある$M>0$に対して、$M \geqq M_m$、すなわち、すべての$\varphi \in \Omega$と自然数$m$に対して

$$|||u_m(\varphi)||| \leqq M|||\varphi|||$$

が成り立っている。こゝで、$|||\varphi|||$はΩにおける norm。

さて、t_0を固定して、$\{t_m\}$を$[t_0, \infty)$においてdenseな点列として、

$$u_m(\varphi) = T(t_m, t_0)\varphi$$

と定義する。$\Omega = C$はBanach空間である。今、(5)のすべての解が有界であると仮定すれば、すべての$(t_0, \varphi_0) \in [0, \infty) \times C$に対して$\beta = \beta(t_0, \varphi_0) > 0$が存在して、

$$\| x(t; \varphi_0, t_0) \| \leq \beta \qquad (t \geq t_0)$$

が成り立っている。したがって、$\sup \| u_m(\varphi_0) \|_a \leq \beta$。ゆえに、Banach-Steinhausの定理によって、ある$M(t_0) > 0$に対して

$$\| u_m(\varphi) \| \leq M \| \varphi \|_a \text{、}$$

すなわち、$\| T(t_m, t_0)\varphi \|_a \leq M \| \varphi \|_a$がすべての$\varphi$と$m$とに対して成り立っている。さらに、$x(t; \varphi_0, t_0)$は$t$に関して連続だから、$T(t, t_0)$も$t$に関して連続となり、このことと$\{t_m\}$が$[t_0, \infty)$においてdenseであることを用いて、

$$\| T(t, t_0)\varphi \|_a \leq M(t_0) \| \varphi \|_a$$

を得る。このことは(5)の解が同等有界であることを示しており、同時に、

$$\| \varphi_0 \| < \varepsilon / M(t_0) \text{ ならば、} \| x(t; \varphi_0, t_0) \| < \varepsilon \quad (t \geq t_0),$$

すなわち、(5)の零解は安定となる。逆に、(5)の零解が安定ならば、直ちに、(5)の解の同等有界性が得られる。したがって、定理Aの成り立つことが示される。

参考文献

[1] A. Halanay, Differential Equations, Academic Press, New York, 1966.

[2] J. K. Hale, Linear functional-differential equations with constant coefficients, Contr. Diff. Eqs., 2(1964), 291–317.

[3] N. N. Krasovskiĭ, Some Problems in the Theory of Stability of Motion, Stanford Univ. Press, California, 1963.

[4] A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935, p165.