

Contingent equation と制御問題 2

神大 理 菊 池 紀 夫

§ 1. Contingent equation

Contingent equation

$$dx/dt \in F(t, x)$$

について考えよう。 x は n 次元ユークリッド空間 R^n における点を, t は実変数とあらわす。 $F(t, x)$ は $[t_0, t_0+a] \times R^n$ で定義され, 値を R^n の compact set にとる函数である。

この微分不等式を一般化した Contingent equation は次の様な問題に関係して考えられる。

1). Vector field $f(t, x)$ が正確には求められず, 近似的に (ある誤差の範囲内で) わかっているとき。

2). (t, x) に関する滑らかな下の落ちた Vector field $f(t, x)$ に対応する微分方程式の解の存在はわからないが, $f(t, x)$ を適当に set value の函数 $F(t, x)$ に拡張すれば, $F(t, x)$ に対応する contingent equation の解の存在は示すことができる。

できる。たとえば、 $f(t, x)$ は有界で、 t に関して可測であるとき、次の contingent equation とみれば絶対連続な $x(t)$ は存在する。

$$dx(t)/dt \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{conv} f(t, V(x(t), 1/n)).$$

3). 制御函数のはいった微分方程式。

ここでは最後にあげた問題を考える。すなわち、制御函数のはいった微分方程式と contingent equation とみれば、制御問題を調べることを contingent equation の解の性質と調べることに帰着させて考える。

次の関係があらわされているとしよう。

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), u(t)),$$

$$u(t) \in Q(t, x(t)).$$

ここで、 $f(t, x, u)$ は $[t_0, t_0+a] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ で定義され、値を \mathbb{R}^n にとる函数、 $Q(t, x)$ は $[t_0, t_0+a] \times \mathbb{R}^n$ で定義され、値を \mathbb{R}^r の中の compact set にとる函数、 $u(t) \in \mathbb{R}^r$ は $[t_0, t_0+a]$ で可測な函数とする。

上の関係をみると $x(t)$ は次の関係をみたす。

$$dx(t)/dt \in f(t, x(t), Q(t, x(t))).$$

逆に、この contingent equation とみれば $x(t)$ に対して

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), u),$$

$$u \in Q(t, x(t))$$

なる u が求まるが、この u を適当に選んで $u = u(t)$ が可測函数とすることを出来れば (set value 函数に対する陰函数の定理を用いる。) この $x(t)$ は最初の制御問題の方程式をみたしていることになる。

$F(t, x)$ が (t, x) に関して連続な場合の contingent equation については, A. Marchaud, S. K. Zaremba が contingent derivative を用いて、解の存在および解の種々の性質を調べている。

また, T. Wajewski はこの理論を上に述べた方法によって、制御問題と結びつけ、制御問題の統一的な研究をおこなっている。 ([6])。

ここでは $F(t, x)$ が Carathéodory type の条件をみたすとき、contingent derivative は用いる。(従って Marchaud-Zaremba の結果は用いる。) Contingent equation の解の存在を示し、さらに、解の性質を調べ、これらをもとにして、contingent equation に対する制御問題を考えることができる。 ([3], [4], [5])。

なお、compact and convex set value 函数論については、[1], [2] を参照されたし。基本的な性質を始めとし、写像度の定義があり、不動点定理が示されてある。

さらにルベフ積分も定義され、その性質が調べられてある。

§2. 定義および記号

X は $x, y (x, y \in X)$ 間の距離を $dist(x, y)$ とする。距離空間とする。 $x (x \in X)$ と集合 $A (A \subset X)$ の距離 $dist(x, A)$ は次の様に定義する。

$$dist(x, A) = \inf \{ dist(x, y); y \in A \}.$$

$Comp(X)$ ($Conv(X)$) で X 中の compact sets (compact and convex sets) 全体の集合をあらわす。

$Comp(X) \ni A, B$ 間の距離を次のような Hausdorff の距離 $Dist(A, B)$ で定義すれば、 $Comp(X)$ は距離空間になる。

$$Dist(A, B) = \inf \{ \delta > 0; V(A, \delta) \supset B, V(B, \delta) \supset A \}.$$

ここに $V(A, \delta)$ は次のように定義される。

$$V(A, \delta) = \{ x \in X; dist(x, A) \leq \delta \}.$$

集合 $A (A \subset X)$ の境界は $\text{bary } A$ であらわれ、 A を含む、最小の compact and convex set を $\text{conv } A$ であらわす。

n 次元ユークリッド空間 R^n の集合 A について、 $|A|$ は次の様に定義される。

$$|A| = Dist(A, 0).$$

ここに、 0 は R^n の原点である。

I は R^1 上の compact interval $[t_0, t_0+a]$ とする。

a. e. I は 'Iの上のほとんどいかなる所' を意味する。

I で可測な函数全体の集合を $measble(I)$ であらわす。

定義1. T は topological space とする。 T で定義された函数 $F(t) \in Comp(X)$ が $t_0 \in T$ で連続であるというのは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 t_0 の近傍 U が求まって、

$$V(F(t_0), \varepsilon) \supset F(t), \quad V(F(t), \varepsilon) \supset F(t_0)$$

が U のすべての t について成り立つことである。

T のすべての点で $F(t)$ が連続のとき、 $F(t)$ は T で連続であるという。

定義2. E は可測空間とする。 E で定義された函数 $F(t) \in Comp(X)$ が E で可測であるというのは、すべての $C \in Comp(X)$ に対して、集合

$$\{t \in E; F(t) \in C\}$$

が E で可測のことである。

仮定 $H(F)$. $F(t, x)$ は $I \times R^n$ で定義され、値を $Comp(R^n)$ にとる函数で、 t に関しては可測、 x に関して連続であるとす。 また、積分可能な函数 $k(t)$ が存在し

$$|F(t, x)| \leq k(t), \quad a.e. t \in I$$

が成り立つ。

仮定 $H_1(F)$. $F(t, x) \in Conv(R^n)$.

定義3. (Wajewski) I で定義された絶対連続写函数 $x(t)$ が次の関係をもたせるとき, $x(t)$ は $F(t, x)$ の trajectory であるという。

$$dx(t)/dt \in F(t, x(t)), \quad \text{a.e. } I.$$

$F(t, x)$ の trajectories 全体の集合を $\{F\}$ とあらわす。

定義4. (Wajewski) I で定義された絶対連続写函数 $x(t)$ に対して, 次の関係をもたせ函数列 $\{x_i(t)\}$ が存在するとき, $x(t)$ は $F(t, x)$ の quasi-trajectory であるという。

$$x_i(t); \quad I \text{ で絶対連続 } (i=1, 2, \dots),$$

$$|x'_i(t)| \leq k(t) \quad (\text{a.e. } I),$$

$$x_i(t) \rightarrow x(t) \quad t \in I, \quad i \rightarrow \infty$$

$$\text{dist}(x'_i(t), F(t, x_i(t))) \rightarrow 0 \quad \text{a.e. } I.$$

$F(t, x)$ の quasi-trajectories 全体の集合を $\{F\}^*$ とあらわす。

A は R^n の集合とする。 $T(A, F)$ により, 初期条件 $x(t_0) \in A$ とみせ $F(t, x)$ の trajectories 全体の集合をあらわし, $Z(A, F)$ により, それらの graph ($\subset I \times R^n$) の和集合をあらわす。 $t \in I$ に対して, $S(A, F, t)$ ($\subset R^n$) は $Z(A, F)$ の $t=t$ における切り口をあらわす。

§3. Contingent equation の解の幾つかの性質

定理1. 仮定 $H(F)$ のもとに.

$$\{F\}^* = \{\text{conv } F\}$$

が成り立つ。

以下の定理において F は仮定 $H(F)$ および $H_1(F)$ とみられるものとする。

定理2 ([3]). 全ての $x_0 \in R^n$ に対して初期条件 $x(t_0) = x_0$ とみられる $F(t, x)$ の trajectory $x(t)$ は I 全体において存在する。

定理3 ([3]). $\text{Comp}(R^n) \ni A$ に対して $T(A, F)$ は一様収束の位相で compact である。

定理4 (Kneser) ([4]). $\text{Comp}(R^n) \ni A$ が連結しているとき全ての $t \in I$ に対して $S(A, F, t)$ は連結体である。

定理5 (Hukuhara) ([4]). $\text{bdry } Z(A, F)$ 上の全ての点は $\text{bdry } Z(A, F)$ 上ばかり通る trajectory で $\text{bdry } A$ と結びこることができる。

定理6 (bang-bang type) ([5]). $\text{bdry } Z(A, F)$ 上ばかり通る trajectory $x(t)$ については、その導関数 $dx(t)/dt$ はその間のほとんどいかなる t での次の関係のみたす。
 $dx(t)/dt \in \text{bdry } F(t, x(t)).$

34. Contingent equation の制御問題

$u \in R^r$ は コントロール 経数.

$F(t, x, u)$ は $I \times R^n \times R^r$ で定義され, 値を $Comp(R^n)$ にとる 函数, $Q(t, x)$ は $I \times R^n$ で定義され 値を $Comp(R^r)$ にとる 函数とする.

次の関係とみたす I で 絶対連続な $x(t)$ と 制御系 $\{F, Q\}$ の trajectory という.

$$dx(t)/dt \in F(t, x(t), u(t)) \quad \text{a.e. } I,$$

$$u(t) \in \text{mesble}(I),$$

$$u(t) \in Q(t, x(t)).$$

$\{F, Q\}$ に次の様な 仮定をおく.

- 1). $F(t, x, u)$ は t に関しては可測, (x, u) に関しては連続.
- 2). $Q(t, x)$ は t に関しては可測, x に関しては連続.
- 3). $R(t, x) \equiv F(t, x, Q(t, x)) \in \text{Conv}(R^n)$ において I で積分可能な函数 $k(t) \geq 0$ に対して次の関係が成り立つ.

$$|F(t, x)| \leq k(t), \quad \text{a.e. } I.$$

$A \in \text{Comp}(R^n)$. $K(t) \in \text{Comp}(R^n)$ は I で定義され 連続, $C(t, x)$ は $I \times T(A, F)$ で定義され, (t, x) に関して連続な 実数値函数とする.

制御函数は可測函数とする。

制御函数 $u(t)$ に対応して

$$dx(t)/dt \in F(t, x(t), u(t)) \quad \text{a.e. } I,$$

$$u(t) \in Q(t, x(t)),$$

$$x(t_0) \in A$$

とみたす $x(t)$ が ある $\bar{t} \in I$ において $x(\bar{t}) \in K(\bar{t})$

とみたすとき, $u(t)$ は A と $K(t)$ に移すという。

考える問題は A と $K(t)$ に移す $u(t)$ の内で

$C(t, x)$ を最小にする問題。および それに対応した

trajectory $x(t)$ の性質を調べることである。

こゝに $C(t, x)$ にあらわれる x は $u(t)$ に対応する trajectory であり, t は $x(t) \in K(t)$ とみたす最小の t である。

定理 7. ([4]). A と $K(t)$ に移す制御函数 $u(t)$ が少なくとも一つはあるものとする。このとき $C(t, x)$ を最小にする最適制御函数 $u^*(t)$ は存在する。

定理 8 ([4], [5]). $C(x, x) \equiv t$, 可分わち時間最適問題, ならばこの最適 trajectory の中には $\text{bary} Z(A, R)$ の上ばかり通るものがあり, さらにその間のほとんどすべての t に関して次の関係が成り立つ。

$$dx(t)/dt \in \text{bary } R(t, x(t)).$$

参考文献

- [1] Hukuhara, M., *Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe*, RIMS-11, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1966.
- [2] ————, *Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe*, RIMS-15, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1966.
- [3] Kikuchi, N., *Control problems of contingent equation*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A.3 1967.
- [4] ————, *On some fundamental theorems of contingent equations in connection with the control problems*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A. 3 1967.
- [5] ————, *On contingent equations satisfying the Carathéodory type conditions*, (to appear).
- [6] Wajewski, T., *On an optimal control problem*, Differential Equations and Their Applications, Proceeding of the Conference held in Prague, September 1962.