

差分微分方程式の解の  
漸近的性質について.

京大 数研 栗原光信

§ 1. 序

差分微分方程式

$$(1) \quad u'(t) + [a_0 + a(t)]u(t) + b_0 u(t - \omega) = 0$$

の解のある漸近的性質について考察しよう。(1)において,  
 $a_0, b_0$  は定数,  $\omega$  は正の定数,  $a(t)$  は連続な函数とする。  
さらに,  $t \rightarrow +\infty$  のとき  $a(t) = o(1)$  とする。この函数に関  
して次のような定義を導入する。

定義. 函数  $a(t)$  は  $t_0 \leq t < +\infty$  で連続,  $t \rightarrow +\infty$  のとき  
 $a(t) = o(1)$  であるとする。このとき, 函数  $a(t)$  が 性  
質(A)をもつとは, 次の(i) ~ (vi) を満足する函数  $E(t)$ ,  
 $F(t)$  が存在することである。

(i)  $E(t), F(t)$  はともに  $t_0 \leq t < +\infty$  で連続であり, か  
つ十分大きなある  $t_1$  に対して  $t_1 \leq t < +\infty$  で連続微分可能で

であるとする。

$$(ii) \quad |a(t)| \leq F(t)$$

$$(iii) \quad t \rightarrow +\infty \text{ のとき } F(t) = o(1) \text{ かつ } \int_{t_0}^{+\infty} F(t)^2 dt < +\infty$$

$$(iv) \quad t_1 \leq t < +\infty \text{ において}$$

$$-F'(t) \leq E(t)F(t), \quad -E(t)F'(t) \leq E(t)^2 F(t).$$

$$(v) \quad t \rightarrow +\infty \text{ のとき } E(t) = o(1) \text{ かつ}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} |E'(t) - E(t)^2| dt < +\infty.$$

$$(vi) \quad \int_{t_0}^{+\infty} |E(t)F(t)| dt < +\infty.$$

性質(A)をもつような函数  $a(t)$  の例を以下で3つ挙げよう。

例1.  $t_0 \leq t < +\infty$  で2階連続微分可能な函数  $a(t)$  が次の(i)~(iv)の条件をみたすならば、この  $a(t)$  は性質(A)をもつ。

$$(i) \quad t \rightarrow +\infty \text{ のとき } a(t) = o(1).$$

$$(ii) \quad t \geq t_0 \text{ に対して } a(t) \neq 0.$$

$$(iii) \quad t \rightarrow +\infty \text{ のとき } a'(t) = o[|a(t)|].$$

$$(iv) \quad \int_{t_0}^{+\infty} a(t)^2 dt < +\infty, \quad \int_{t_0}^{+\infty} |a'(t)| dt < +\infty,$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} |a''(t)/a(t)| dt < +\infty.$$

例2. 福原氏[3]によって次の補題が導かれている。

福原の補題.  $t_0 \leq t < +\infty$  で連続,  $t \rightarrow +\infty$  のとき  $a(t) = o(1)$  なる正の函数  $a(t)$  について, 任意の正定数  $\alpha$  に対し次の性質をもつ函数  $F(t)$  が存在する.

(i)  $F(t)$  は  $t_0 \leq t < +\infty$  で連続微分可能である.

(ii)  $t \geq t_0$  において  $a(t) \leq F(t)$  .

(iii)  $t \rightarrow +\infty$  のとき,  $F(t) = o(1)$  かつ  
 $F'(t) = O(F(t)^{1+\alpha})$  .

ここで, もし  $F(t)$  が  $\int^{+\infty} F(t)^2 dt < +\infty$  を満足していたとすると, 上の  $a(t)$  は性質(A)をもつことが示される。

例3.  $t_0 \leq t < +\infty$  で連続な函数  $a(t)$  が,  $t \rightarrow +\infty$  のとき  $a(t) = O(t^{-\alpha})$ ,  $\alpha > 1/2$  を満すならば, この  $a(t)$  は性質(A)をもつ。

上で定義された性質(A)を用いて方程式(1)解の漸近的性質を示す一定理を以下で導くことにする。

定理. 方程式(1)に関する特性方程式

$$(2) \quad h(s) \equiv s + a_0 + b_0 e^{-\omega s} = 0$$

の根  $s = \lambda$  は最大の実部をもつ特性根であって、かつ real で simple な根であるとする。  $t_0 \leq t < +\infty$  で連続な函数  $a(t)$  が  $t \rightarrow +\infty$  のとき  $a(t) = o(1)$  の場合性質(A)をもつとする。このとき、方程式(1)は  $t \rightarrow +\infty$  のとき

$$(3) \quad u(t) = c [1 + o(1)] \exp \left[ \lambda t - c_1 \int_{t_0}^t a(r) dr \right]$$

の形の解をもつ。ただし、 $c$  と  $c_1$  は定数であり、とくに、

$$(4) \quad c_1 = (1 - b_0 \omega e^{-\lambda \omega})^{-1}$$

ととれる。

この定理は Bellman R. & K. L. Cooke [1] [2] の同種の定理の拡張になっている。次の2節で上の定理の証明を与えよう。

## § 2. 証明(I)

方程式(1)を一つの kernel 函数を用いることによって、積分方程式に変形する。すなわち、(1)より、

$$(5) \quad u'(t) + a_0 u(t) + b_0 u(t - \omega) = -a(t) u(t)$$

とすると、(5)をみたす連続な解は次の形に書き表わされる。

(Bellman R. & K. L. Cooke [2] 参照)

$$(6) \quad u(t) = u(t_0)k(t-t_0) - b_0 \int_{t_0-\omega}^{t_0} u(t_1)k(t-t_1-\omega) dt_1 - \int_{t_0}^t a(t_1)u(t_1)k(t-t_1) dt_1$$

$$(t > t_0)$$

しかた. kernel 函数  $k(t)$  について.

$$(i) \quad k(t_0) = 1, \quad t < t_0 \text{ では } k(t) = 0.$$

$$(ii) \quad k(t) \text{ は } t_0 \leq t < +\infty \text{ で連続.}$$

$$(iii) \quad k(t) \text{ は } t > t_0 \text{ で } k'(t) + a_0 k(t) + b_0 k(t-\omega) = 0 \text{ をみたす.}$$

$$(iv) \quad k(t) = c_1 e^{\lambda t} + k_1(t), \quad |k_1(t)| \leq c e^{k t}, \quad k < \lambda.$$

なる性質をもつことが知られている。そこで、とくに  $u(t)$

$$\equiv 0 \quad (t_0 - \omega \leq t \leq t_0)$$

とおき、さらに  $c e^{\lambda t}$  が(5)の

$$(7) \quad u(t) = c e^{\lambda t} - \int_{t_0}^t a(t_1) u(t_1) k(t-t_1) dt_1$$

を満足する解がまた方程式(1)の解にもなっていることがわかる。

積分方程式(7)が解をもつことは逐次近似法により容易に導かれる。

方程式(7)に  $k(t)$  の性質(iv)の等式を代入し

$$(8) \quad p(t) \equiv - \int_{t_0}^t a(t_1) u(t_1) k_1(t-t_1) dt_1$$

とおくと、(7)式の両辺を微分することによって、

$$w(t) \equiv u(t) - p(t)$$

に関する微分方程式

$$(9) \quad w'(t) = [\lambda - c_1 a(t)] w(t) - c_1 a(t) p(t)$$

が得られる。そこで、

$$s(t) \equiv \int_{t_0}^t \lambda(t_1) dt_1, \quad \lambda(t) \equiv \lambda - c_1 a(t)$$

とおくと、(9)式より、 $u(t)$ に関する積分方程式

$$(10) \quad u(t) = c e^{s(t)} + p(t) - c_1 e^{s(t)} \int_{t_0}^t e^{-s(t_1)} a(t_1) p(t_1) dt_1$$

が導かれる。この積分方程式(10)について  $u(t)$  の評価を行って行くのである。

### §3. 証明(II)

まず、

$$m(t) \equiv \max_{t_0 \leq t_1 \leq t} |u(t_1) e^{-s(t_1)}|$$

とおくと、 $k(t)$ に関する性質(iv)を用いて、

$$(11) \quad |p(t)| \leq C m(t) e^{k t} e^{-\lambda_0 t} \times \int_{t_0}^t F(t_1) \exp\left[(\lambda - k)t_1 - c_1 \int_{t_0}^{t_1} a(r) dr\right] dt_1$$

となる。然るに  $F(t)$  に関する条件式(iv)を用いながら、部分積分を2回行くと、 $t_0$  を十分大きくとることによって、

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t F(t_1) \exp\left[(\lambda - k)t_1 - c_1 \int_{t_0}^{t_1} a(r) dr\right] dt_1 \\ & \leq C F(t) \exp\left[(\lambda - k)t - c_1 \int_{t_0}^t a(r) dr\right] \\ & + C \int_{t_0}^t \left[-E'(t_1) + E(t_1)^2 + E(t_1)F(t_1) + F(t_1)^2\right] F(t_1) \\ & \quad \times \exp\left[(\lambda - k)t_1 - c_1 \int_{t_0}^{t_1} a(r) dr\right] dt_1 \end{aligned}$$

$E(t)$ ,  $F(t)$  に関する残りの条件と  $F(t) \exp\left[\int_{t_0}^t a(r) dr\right]$  が増加函数であることを用いると、(11)より

$$|p(t)| \leq C m(t) F(t) e^{s(t)}$$

が得られる。さらに、

$$\left| \int_{t_0}^t e^{-s(t_1)} a(t_1) p(t_1) dt_1 \right| \leq C m(t) \int_{t_0}^t F(t_1)^2 dt_1.$$

したがって、(10)式より、

$$(12) \quad m(t) \leq C + C m(t) F(t) + C m(t) \int_{t_0}^t F(t_1)^2 dt_1$$

が得られるが、さらに  $t_0$  を十分大きくとることによって

$$m(t) \leq C$$

となる。再び(12)式に戻ると、

$$|u(t)| \leq c[1 + F(t)]e^{S(t)}$$

が導かれる。これは求める式(3)に他ならない。これで定理の証明が完成した。

#### 参考文献

- [1] Bellman R. & K. L. Cooke ; Asymptotic Behavior of Solutions of Differential-difference Equations, Mem. Amer. Math. Soc. No. 35, 1959.
- [2] Bellman R. & K. L. Cooke ; Differential-Difference Equations, Academic Press, 1963.
- [3] 福原衛洲雄 ; 常微分方程式論(Ⅲ), 岩波講座・数学 1934年.