数理解析研究所講究録
40巻 1968年 57-65

(n,n)型概複素構造の自己同型群についての一考察

京大 理　成木勇夫

§1. 序

ここではコンパクト多様体上の sub-elliptic な (n,n)型概複素構造の自己同型群が Lie 変換群となることを証明するのが目的である。道具立ては R.S.Palais の有名な定理[3]と最近 J.J.Kohn の論文[2]と L.Hörmander の論文[1]とにおいて発展させられた sub-elliptic 微分作用素の理論のみであって、証明はすこぶる簡単である。

本論にはいる前に、よく使う記号を二,三あげておく。S を複素 C^∞ vector bundle とするとき、$\Gamma(S)$ は S の(大域的な) C^∞ cross-section 全体の空間とする。S が(前後関係より分る他の) vector bundle T の sub-bundle であるとき、$S^\perp$ で S の annihilator 全体の作る T^*(T の dual bundle)の sub-bundle を表す。M が C^∞ 多様体であるとき、その tangent bundle を $T(M)$ とかく。又、$X, Y \in \Gamma(T(M))$ (或は $\Gamma(T(M)\otimes\mathbb{C})$)に対して、$[X,Y]$ を通常の bracket $(XY-YX)$ とする。

又、S, $T(M)$ 等の p 上の fiber を S_p, $T_p(M)$ で表し、$X \in \Gamma(S)$ の p での値を X_p とかく。なほ、ここでは C^∞-級の微分可能性を常に仮定する。

§ 2. 準備

M を $2n+n'$ 次元の C^∞ 多様体とし、S を $T(M)\otimes\mathbb{C}$ の sub-bundle とし、$\dim_{\mathbb{C}} S_p = n$ $(p\in M)$ とする。

定義 1. 次の二つの条件が満されるとき、対 (M,S) を M 上の (n,n') 型の概複素構造と呼ぶ。

(i) $S_p \cap \overline{S}_p = (0)$ （但し、$\overline{S}_p$ は S_p の complex conjugation. $p\in M$）

(ii) $X, Y \in \Gamma(S)$ に対し、$[X,Y] \in \Gamma(S\oplus\overline{S})$

さらに S が completely integrable のときは、とくに (M,S) は integrable であるという。

注意. $n'=0$ のときは、このような概複素構造は、integrability と共に、通常のものと全く一致する。$n'=1$ のときは、これは J. J. Kohn [2] によって考えられ、やはり almost complex structure と命名されたので、筆者もこれに従った。

定義2．　(M,S)，(M',S') を二つの (n,n') 型概複素構造とするとき．M から M' 上への diffeomorphism f が (M,S) から (M',S') 上への同型であるとは，M の全ての点 p に対し，$(df)_p$ が S_p を $S'_{f(p)}$ 上に同型に写すときいう。　とくに $(M,S)=(M',S')$ のとき f は (M,S) の自己同型と呼ばれる。

さて．sub-ellipticity を定義する前に二,三の記号を作っておく。　$\eta \in \Gamma(S^{\perp}\cap T^*(M))$ のとき．

$$L_p^{\eta}(s,t) = i\langle (d\eta)_p \mid s\wedge \bar{t}\rangle \qquad (\text{但し}.\ s,t \in S_p)$$

とおく。　L_p^{η} は S_p 上の Hermite 形式である。そこでさらに，

$$\mathcal{L}_p = [\, L_p^{\eta}\ ;\ \eta \in \Gamma(S^{\perp}\cap T^*(M))]$$

とおけば、$\mathcal{L}_p$ は Hermite 形式より成る real vector space となる。

定義3．　$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_p = n'$ で $\mathcal{L}_p$ は 0 以外に半定値な Hermite 形式を含まぬとき，(M,S) は sub-elliptic であるという。

以後は、M: compact と仮定する。　(M,S) の自己同型全体の作る群を $A(M,S)$ と記すとし、$f_t\ (t\in R)$ を $A(M,S)$ の中を動く 1-parameter subgroup とする。　f_t の generator を Y とすれば $A(M,S)$ の定義より明らかに，

$$X \in \Gamma(S) \Longrightarrow \mathcal{L}_Y(X) \in \Gamma(S) \ .$$

但し、ここで $\mathcal{L}_Y$ は Y に関する Lie-derivative を表す。そこで

$$\mathfrak{a}(M,S)=\{Y\in\Gamma(T(M))\ ;\ \mathcal{L}_Y(X)\in\Gamma(S)\quad \text{for any } X\in\Gamma(S)\}$$

とおくと、$Y\in\mathfrak{a}(M,S)$ なるとき、Y の生成する 1-parameter subgroup は $A(M,S)$ の中を動く（M が compact であることに注意）。次は有名な R. S. Palais [3] の定理の直接の系である。

命題 1. $\mathfrak{a}(M,S)$ が有限次元ならば、$A(M,S)$ は M 上に作用する Lie 変換群となる。

さて、これから J. J. Kohn と L. Hörmander との結果を引用しよう。そのために微分作用素 $\mathfrak{X}$ を次のように選ぶ。X^j $(j=1,2,\cdots,\pi)$ を $\Gamma(S)$ の元の組で X^j_p $(j=1,2,\cdots,\pi)$ が S_p を生成するようなものとし、

$$\mathfrak{X}u=(X^1u,\cdots,X^\pi u)\qquad(\text{但し } u\in C^\infty(M))$$

とおく。

定理 1. (M,S) が sub-elliptic であるとき、またそのときに限って、$\mathfrak{X}$ は sub-elliptic である。（ここで $\mathfrak{X}$ が sub-elliptic であるとは次の不等式の成立することを意味する。

$$\forall s:\text{real}\quad \exists C_s>0\quad \forall u\in C^\infty(M)\ :\ \|u\|_{(s+\frac{1}{2})}\leqslant C_s\left(\sum_{j=1}^{\pi}\|X^ju\|_{(s)}+\|u\|_{(s)}\right)$$

但し $\|\ \|_{(s)}$ は $C^\infty(M)$ 上の（適当に選ばれた）Sobolev norm を表す。）

注意. この定理は $n'=1$ の場合には J.J. Kohn [2] によって証明された。一般の場合は L. Hörmander [1] の極めて一般な定理から直ちに帰結する (Th.1.1.5, Th. 1.2.4)

§3. 定理の証明

さて序に述べた定理の証明にかかろう。そのために、次のように、Sobolev norm を $\Gamma(T(M)\otimes\mathbb{C})$ 上にも定義しておく。(M,S) を前節同様 (n,n') 型概複素構造とし、ξ^j $(j=1,2,\cdots,p)$ を $\Gamma(S^\perp)$ の元で、ξ^j_p $(j=1,2,\cdots,p)$ が $S^\perp_p$ を生成するものとする。このとき、定義1における条件(i)により明らかに $\xi^j_p, \bar{\xi}^j_p$ $(j=1,2,\cdots,p)$ は $T^*_p(M)\otimes\mathbb{C}$ を生成する。そこで

$$\|X\|^2_{(s)} = \sum_{j=1}^{p}\left(\|\xi^j(X)\|^2_{(s)} + \|\bar{\xi}^j(X)\|^2_{(s)}\right) \quad (X\in\Gamma(T(M)\otimes\mathbb{C}))$$

とおくと、$\|\cdot\|_{(s)}$ は通常の意味の $\Gamma(T(M)\otimes\mathbb{C})$ 上の Sobolev norm の一つとなる。

定理2. M を compact C^∞ 多様体とし、(M,S) を M 上の sub-elliptic な (n,n') 型概複素構造とする。このとき、その自己同型群 $A(M,S)$ は M 上の Lie-transformation group となる。

証明）　$Y \in \mathfrak{a}(M,S)$, $X \in \Gamma(S)$, $\xi \in \Gamma(S^\perp)$ とする。

$\xi(X)=0$ の両辺の *Lie derivative* をとって、

$$\mathcal{L}_Y(\xi)(X)+\xi(\mathcal{L}_Y(X))=0$$

$\mathfrak{a}(M,S)$ の定義により左辺の第二項は 0，また $\mathcal{L}_Y(\xi)= Y \lrcorner d\xi + d(Y \lrcorner \xi)$ であるから，

$$X(\xi(Y))=\langle d\xi \mid X\wedge Y\rangle$$

ここで X を X^j $(j=1,2,\cdots n)$ とおき，$\mathcal{X}$ の sub-ellipticity を考えて

$$\|\xi(Y)\|_{(\frac{1}{2})} \leqq C\|Y\|_{(0)}$$

とくに

$$\|\xi^j(Y)\|_{(\frac{1}{2})} \leqq C\|Y\|_{(0)} \qquad (j=1,2,\cdots p)$$

一方，Y は *real vector field* であるから $\bar{\xi}^j(Y)=\overline{\xi^j(Y)}$ 即ち

$$\|\bar{\xi}^j(Y)\|_{(\frac{1}{2})} \leqq C\|Y\|_{(0)}$$

よって $\|\ \ \|_{(\frac{1}{2})}$ の定義から

$$\|Y\|_{(\frac{1}{2})} \leqq \sqrt{2p}\ C\|Y\|_{(0)} \qquad (但し.\ Y \in \mathfrak{a}(M,S))$$

したがって、$\mathfrak{a}(M,S)$ は有限次元。定理 1 により証明了。

§3．定理 2 の意義，今後の問題

初めに、(M,S) を (n,m)-型概複素構造とする。M の任意の二点 p,q に対して $f(p)=q$ となる $f\in A(M,S)$ が存在するとき、(M,S) は均質であるということにすれば、定理 2 から compact 且 subellipticな均質(n,n')型概複素構造のはいる多様体はG/H（G：Lie群、H：Gのclosed subgroup）とかけることが直ちに分る。Gとして自己同型群をとり、Hとして一点のisotropy groupをとればよい。こうして、この種の概複素構造の分類は古典的なLie群の理論に帰着させられる。

今度はMが複素多様体Vの実部分多様体であるとする。

$$S_p = T_p(M)\otimes\mathbb{C}\cap T_p^{(0,1)}(V) \qquad (p\in M)$$

とおく。但し、$T_p(M)\subset T_p(V)$と考える。このとき$\dim_{\mathbb{C}} S_p$がM上一定であれば、S_pをp上のfiberとして持つ$T(M)\otimes\mathbb{C}$のsubbundleが一意的に定まり、(n,n')を適当に定めてやると(M,S)はM上のintegrableな(n,n')-型概複素構造となる。この場合、(M,S)はMのVへの埋め込まれ方を代表していると考えてよいが、果してどれ程正確なのかという疑問が起ってくる。それは次のように言ってもよい。MのVへの埋め込まれ方を変えない変換（即ちMをM上に写す微分同相でMの近傍間のholomorphic isomorphismに拡張できるもの）全体のなす群$P(M,V)$は$A(M,S)$にどれ程近いだろうか？　Mがreal analyticならば$P(M,V)=A(M,S)$である。又、MがVの超曲面であって(M,S)がsub-ellipticならばやはり$P(M,V)=A(M,S)$である。その他の場合は、何も分っていない。それは今後の問題であるが、結局正則的拡張の問題がMに対して解けるかどうかと

いうことにかかっている。話は横道にそれたが、いずれにしても、$P(M,\nabla) \subseteq A(M,S)$ は明らかだから、定理2は $P(M,\nabla)$ の有限性のための一つの十分条件を与えていると言える。又、定理2とは直接何の関係もないが、次のような問題も極めて重要である。即ち、integrable な (n,n') 型概複素構造 (M,S) を与えたとき、その構造が上述の如く M の複素多様体の中への埋め込みによって導かれるか？ということである。$n'=0$ のときは有名な Newlander–Nirenberg の定理によって肯定的に解決されているが、$n' \geq 1$ の場合は同様の議論を進めるには大きな困難がある。非常に精密な偏微分方程式の理論が必要なようだ。ただ、前にも言ったように M が G/H とかける場合は代数的、微分幾何学的方法によって肯定的に解決されよう。なお (M,S) が sub-elliptic かつ compact な場合は、M を Stein 多様体に埋め込むことができないことを注意しておく。定理1によって、正則函数の M 上への制限全体の空間は有限次元でなければならないからである。

References

1. L. Hörmander, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary value problems. Ann. of Math. 84 (1966). 129–209.

2 J. J. Kohn, Boundaries of complex manifolds. Proc. Minnesota Conference on Complex Analysis, 81–94 Springer-Verlag, Berlin, 1965.

3. R. S. Palais, A global formulation of the Lie theory of transformation groups. Mem. Amer. Math. Soc, 22. 1957.