数理解析研究所講究録
40巻 1968年 37-45

ナヴィエ=ストークス方程式の解に対する一意接続定理

(東大・理) 増田 久 弥

§1. はしがき、

次の方程式を考えよう。

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \mathrm{grad})u = \Delta u - \nabla p$$

$$\mathrm{div}\, u = 0, \quad x \in G, \quad 0 < t < T$$

境界条件は、

(2) $$u = 0 \quad \text{on } \partial G.$$

ここで、Gは、なめらかな有界超曲面の外部領域、uは、x, tの3次元ベクトル値函数、pは、x, tのスカラー値函数である。我々の問題は、次の通りである。"(1), (2)でその行動が規定されている静止していない非圧縮粘性流体の流れが、Gの適当な小部分をとったとき、その上で、有限時間たって静止することが、ありえるだろうか？" いいかえると、Navier-Stokes方程式は、有限伝播速度の現象をもつか？

上の問に対する我々の結果をのべる前に記号を導入する。

$C^{\infty}_{0,s}(G) = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3);\ \mathrm{div}\,\varphi = 0,\ \varphi \in C^{\infty}_0(G)\}$;

$L^2_s\ (\equiv L^2_s(G))$ = the closure of $C^{\infty}_{0,s}(G)$ in $L^2(G)$;

$\underline{P}$; $L^2(G)$ から $L^2_s(G)$ の上への直交射影.

A ; $\mathfrak{D}(-P\Delta) = \{u;\ u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}),\ \mathrm{div}\, u = 0,\ u = 0 \text{ on } \partial G\}$

$$(-P\Delta)u \equiv -P(\Delta u)$$

なる L^2_s の中の対称作用素 $-P\Delta$ の Friedrichs 拡大を A とする。

X ; $\mathfrak{D}(A^{\frac{4}{5}})$ にグラフノルム $\|u\|_X \equiv \|A^{\frac{4}{5}}u\| + \|u\|$ を入れたB-space. ($\|\cdot\|$ は、スカラー積 $(\cdot,\cdot)$ をもつ $L^2(G)$ の中のノルム)

$H^1_{0,s}$ = the completion of $\{u \in C^1_0;\ \mathrm{div}\, u = 0\}$ in the norm of $\|\nabla u\| + \|u\|$.

さて我々の結果は、次の通りである。

<u>定理 1</u>

uを、(1), (2)の解で且 $H^1_{0,s}$—値の t $(0<t<T)$ の連続函数とする。そのとき、$u(x,t)$ は $G\times(0,T)$ で(零集合の修正の後に)x, t につき実解析的である。

<u>定理 2</u>

uを定理 1の中の条件をみたす解とする。もし、Gの開部分集合 G_1 $(\neq \emptyset)$ と t_1 $(0<t_1<T)$ で、

$u(x, t_1) = 0,\ x \in G_1$, なるものがあれば、$u$は
$G \times (0,T)$全体で恒等的にzeroである。

<u>定義</u> (1), (2)の解uとは、

(i) $u(x,t) \in L^2_{loc}(G \times (0,T))$

(ii) $\int (u, \operatorname{grad} \omega)\, dt = 0$ がすべてのスカラー値の $C_0^\infty(G \times (0,T))$ 函数ωに対して成立。

(iii) $\int \{ (u, \Phi_t) + (u, \Delta \Phi) + (u, u \cdot \operatorname{grad} \Phi) \} dt = 0$

が、$\operatorname{div} \Phi = 0$なるすべてのベクトル値の $C_0^\infty(G \times (0,T))$ 函数Φに対して成立する。

§2. 補題.

<u>補題 1</u>

(a) $\mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}) = H^1_{0,s}$, $\| A^{\frac{1}{2}} u \| = \| \nabla u \|$ for $\forall u \in \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}})$

(b) $E \Subset G$ なる任意のEに対して、次の如き定数 $C = C(E)$が存在する。

$$\operatorname{ess.sup}_{x\in E} |v(x)| \leq C\|v\|_X, \quad v\in X.$$

補題 2

次の如き $u(t)$ の解析的拡大 $u(z)$ が存在する；
$u(z)$ は複素平面中の $(0,T)$ のある近傍 U の中の z の X－値正則函数であって

$$\frac{\partial(u,\varphi)}{\partial z} = -(u, A\varphi) - ((u\cdot\mathrm{grad})u,\varphi),$$

$$\varphi\in C^\infty_{0,s}, \quad z\in U$$

をみたす。

§3 定理の証明.

定理 1 ⇒ 定理 2

$v(x,t) = \mathrm{rot}\, u(x,t)$ とおき，(1) の両辺に対して rot を作用させると，

$$(3)\quad \frac{\partial v}{\partial t} + \mathrm{rot}\,(u\cdot\mathrm{grad})u = \Delta v$$

ここで，$v(x,t)$ は，仮定から定理 1 によって，$G\times(0,T)$ の中で，x,t につき実解析的である。

仮定； $u(x,t_1) = 0 \quad x\in G_1$

と定理 1 により $u(x,t)$ は (x,t につき) 解析的であるか

3,

$$u(x, t_1) = 0 \qquad x \in G$$

又 v の定義より

$$v(x, t_1) = 0 \qquad x \in G$$

をえる。

故に, (3) によって

$$v_t(x, t_1) = \left[\Delta v - \mathrm{rot}\,(u\cdot \mathrm{grad})\,u\right]_{t=t_1} = 0$$

故に,

(4) $\mathrm{rot}\,(u_t(x, t_1)) = 0 \qquad x \in G$

他方

$$\mathrm{div}\ u(x,t) = 0 \qquad x \in G$$

より

(5) $\mathrm{div}\ u_t(x, t) = 0$

さらに, $u(\cdot, t) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{,s}$ である。補題2より $u(\cdot,t)$ は X-値解析函数したがって $\overset{\circ}{H}{}^1_{,s}$-値 C^∞-函数であるから

(6) $u_t(x, t) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{,s}$

(4), (5), (6) によって

$$u_t(x, t_1) = 0 \qquad x \in G$$

を, したがって

$$v_t(x, t_1) = 0 \qquad x \in G$$

をえる。(3) を微分すると、

(7) $\quad v_{tt} = \Delta v_t - \mathrm{rot}\,(u_t \cdot \mathrm{grad})\,u - \mathrm{rot}\,(u \cdot \mathrm{grad})\,u_t$

をえるが、右辺は、$t = t_1$ にてゼロとなることがわかるから

(8) $\quad v_{tt}(x, t_1) = 0 \quad$ i.e. $\quad \mathrm{rot}\,(u_{tt}(x, t_1)) = 0$

(5)を微分して、

(9) $\quad \mathrm{div}\; u_{tt}(x, t) = 0$

$u(\cdot, t)$ は、$H^1_{0,s}$-値 C^∞-函数なり

(10) $\quad u_{tt}(x, t) \in H^1_{0,s}$

(8), (9), (10) より

$$u_{tt}(x, t_1) = 0$$

以下同様にして、

$$\partial^k u(x, t_1) / \partial t^k = 0 \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

をえる。$u(x, t)$ は、t について解析的であるから、

$$u(x, t) = 0 \quad G \times (0, \infty)$$

をえる。 証明了

定理 1 の証明

$\Omega = \{(\xi, \eta)\,;\ \xi + i\eta \in U\}$ $\quad v(x, z) = \mathrm{rot}_x u(x, z)$

$u(x, \xi, \eta) = u(x, \xi + i\eta)$, $\quad v(x, \xi, \eta) = v(x, \xi + i\eta)$

$(\xi,\eta)\in\Omega$ とおく。(補題 2)によって, $u(\cdot,z)$, $v(\cdot,z)$ は, L^2_s-値正則函数であるから, 任意の $\varphi\in C_0^\infty(G)$ に対して, $(u(\cdot,\xi,\eta),\varphi)$, $(v(\cdot,\xi,\eta),\varphi)$ は, ξ と η の調和函数である;

(11) $((u, [\partial^2/\partial\xi^2+\partial^2/\partial\eta^2]\varphi\psi))=0$

(12) $((v, [\partial^2/\partial\xi^2+\partial^2/\partial\eta^2]\varphi\psi))=0$,

$$\varphi\in C_0^\infty(G),\quad \psi\in C_0^\infty(\Omega)$$

ここで, $((\cdot,\cdot))$ は, $L^2(G\times\Omega)$ のスカラー積を示す。$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}-\Delta$ であるから, $(u,-\Delta\varphi)=(v,\mathrm{rot}\,\varphi)$, $\varphi\in C_0^\infty(G)$, をえる. これは, $u\in L^2_s$ より $(u,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\varphi)=0$ に注意すればいい。よって,

(13) $((u,-\Delta\varphi\psi))=((v,\mathrm{rot}\,\varphi\psi))$,

$$\varphi\in C_0^\infty(G),\quad \psi\in C_0^\infty(\Omega).$$

他方 $\mathrm{rot}\,\varphi\in L^2_s$, $\varphi\in C_0^\infty(G)$, に注意すれば, (補題 2) より,

$$\partial(u,\mathrm{rot}\,\varphi)/\partial\xi=(u,\Delta\,\mathrm{rot}\,\varphi)-((u\cdot\mathrm{grad})u,\mathrm{rot}\,\varphi),$$

$(\xi,\eta)\in\Omega$, $\varphi\in C_0^\infty(G)$ が成立するから,

(14) $((v,[\partial/\partial\xi+\Delta]\varphi\psi))-((u\cdot\mathrm{grad}\,u,\mathrm{rot}\,\varphi\psi))=0$

$$\varphi \in C_0^\infty(G), \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

をえる。(A)を(12)に、(B)を(11)に加えると、

$$((u, [\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2 + \Delta]\varphi\psi)) + ((v, \mathrm{rot}\,\varphi\psi)) = 0$$

$((v, [\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2 + \Delta + \partial/\partial\xi]\varphi\psi)) - ((u\cdot\mathrm{grad}\,u, \mathrm{rot}\,\varphi\psi)) = 0$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ をえるが、$\sum_{\mathrm{finite}} \varphi_j \psi_j$ ($\varphi_j \in C_0^\infty(G)$, $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$) は、$C_0^\infty(G\times\Omega)$ の中、$\mathcal{D}(G\times\Omega)$ の位相で dense であるから、結局、

$$(15) \quad ((u, [\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2 + \Delta]\Phi)) + ((v, \mathrm{rot}\,\Phi)) = 0$$

$$(16) \quad ((v, [\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2 + \Delta + \partial/\partial\xi]\Phi)) - ((\,[u\cdot\mathrm{grad}]u, \mathrm{rot}\,\Phi)) = 0$$

がすべての $\Phi \in C_0^\infty(G\times\Omega)$ に対して成立する。

(15), (16) から、任意の k (正整数) に対して、

$$v \in W^{k,10/3}_{loc}(G\times\Omega), \quad u \in W^{k+1,10/3}_{loc}(G\times\Omega)$$

が示されえる。ソボレフの補題よって、$u^* \in C^\infty(G\times\Omega)$ $v^* \in C^\infty(G\times\Omega)$ が存在して、適当な零集合の訂正の後に、$u^*(x,\xi,\eta) = u(x,\xi,\eta)$, $v^*(x,\xi,\eta) = v(x,\xi,\eta)$ となる。6次元ベクトル (u^*, v^*) は、2次の非線型楕円型の系の解である。

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial\eta^2} + \Delta u^* + \mathrm{rot}\, v^* = 0$$

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial\eta^2} + \Delta v^* - (u^*\cdot\mathrm{grad})v^* - (v^*\cdot\mathrm{grad})u^* = 0$$

$(x, \xi, \eta) \in G \times \Omega$.

これは、

$\mathrm{rot}\,((u\cdot\mathrm{grad})u) = (u\cdot\mathrm{grad})\,\mathrm{rot}\,u - (\mathrm{rot}\,u\cdot\mathrm{grad})\,u$

[$\mathrm{div}\, u = 0$ に注意してみちびける] の関係式と (15)

(16) から示されえる。

故に、(u^*, v^*) は (x, ξ, η) の函数とみなして、解析的

である。ところが、$(u(\cdot, z), \varphi)$，$(v(\cdot, z), \varphi)$ は、

(補題4) より z の解析函数であるから、勿論、

$(u(\cdot, \xi, \eta), \varphi)$ は (ξ, η) の連続函数、又 $(u^*(\cdot, \xi, \eta), \varphi)$ も

ξ, η の連続函数であり、$(u, \varphi) = (u^*, \varphi)$ a.e. (ξ, η)

であるから、$(u, \varphi) = (u^*, \varphi)$ がすべての (ξ, η) に対

して成立する。故に $u(x,t) = u(x, t, 0) = v^*(x, t, 0)$

が a.e. の $x \in G$ に対して成立する。$v^*(x, t, 0)$ は、

x と t の解析函数であるから、任意の t $(0<t<T)$ に対し

適当な修正の後に、$u(x,t)$ は、x について解析的となり

さらに、x, t についても解析的となることが示されたわ

けである。

証明了