数理解析研究所講究録
40巻 1968年 26-36

1階線型偏微分作用素の準楕円性について

愛知教育大学　　加藤 義夫

§1. 序

Ω を、$(n+1)$ 次元ユークリッド空間 R^{n+1} における領域とする。$C^\infty(\Omega)$ を、Ω で無限回微分可能な複素数値函数の全体とし、$C^\omega(\Omega)$ を、Ω で実解析的な複素数値函数の全体とする。$C^\infty(\Omega)$（又は、$C^\omega(\Omega)$）に係数をもつ線型偏微分作用素 P が Ω で準楕円型（又は、解析的準楕円型）であるとは、

$$u\in\mathcal{D}'(\Omega),\ Pu\in C^\infty(\Omega')\ (\text{又は}\ \in C^\omega(\Omega'))$$
$$\Rightarrow u\in C^\infty(\Omega')\ (\text{又は}\ \in C^\omega(\Omega'))$$

が Ω に含まれるすべての開集合 Ω' に対して成りたつことである。

ここでは、

$$(1)\qquad L=\sum_{j=1}^{n+1} a^j(y)\frac{\partial}{\partial y_j}+a(y)$$

なる型の線型偏微分作用素の（解析的）準楕円性を考察する。即ち、

定理. $n \geqq 2$ と仮定する。このとき $C^\infty(\Omega)$ (又は $C^\omega(\Omega)$) に係数をもつ(1)の型の作用素 L が Ω で準楕円型(又は解析的準楕円型)であるための必要十分な条件は、$a^j(y)$ ($j=1,\cdots,n+1$) が Ω で恒等的に零で、かつ $a(y)$ が Ω のどんな点でも零にならないことである。

$n=1$ のときの L の解析的準楕円性は鈴木氏[1]によって完全に解かれている。他方 $n \geqq 2$ に対しては上の定理はすでに部分的に吉川氏によって解かれていたことを名古屋大学の松沢氏から知らされた(吉川[2]参照)。そして上の定理の証明法は本質的には吉川氏のものと同じである。

次の節では、線型偏微分作用素の準楕円性と可解性との関連を中心として定理の証明のための準備をしよう。そして最後の節で定理が証明される。なお、この定理の証明は、まもなく *Nagoya Journal Vol. 32 (1968)* にも発表されるはずである。

§2. 準備

線型偏微分作用素 P が Ω で可解であるとは、すべての $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して $Pu=f$ なる $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ が存在することである。可解であるための必要条件の一つが、*Hörmander* 氏

によって与えられている。即ち $\mathbb{N}$ を負でない整数の全
$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1})\in\mathbb{N}^{n+1}$ と $D_j=-i\partial/\partial y_j$ $(i=\sqrt{-1}$

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots\cdots D_{n+1}^{\alpha_{n+1}}, \qquad |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_{n+1}$$

とおく。Ω 上の m 階偏微分作用素 $P(y,D)=\sum_{|\alpha|\leq m}$
が Ω で可解ならば、

$$P_m(y,D)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(y)D^\alpha,\quad \overline{P}(y,D)=\sum_{|\alpha|\leq m}\overline{a_\alpha(}$$

$$C(y,D)=\overline{P}(y,D)P(y,D)-P(y,D)$$

とおくとき、階数が $2m-1$ の $C(y,D)$ の項の和 C_{2m}
次をみたす： Ω の各点 y において

(H) $\quad P_m(y,\xi)=0,\ \xi\in R^{n+1}\Longrightarrow C_{2m-1}(y,\xi)=$

特に1階の線型偏微分作用素に対する可解性の十
Nirenberg, Trèves 両氏によって [4] において研究
([4] の条件 (P) など)。

補題 1. $C^\infty(\Omega)$ に係数をもつ準楕円型偏微分
形式的共役 ${}^tP$ は、Ω の各点の近傍で可解である。
${}^tP$ は、恒等式

$$\int Pu\cdot v\,dy=\int u\cdot{}^tP\,v\,dy,\quad u,v\in C_0^\infty(\Omega$$

で定義される。(これは、すでに「数学の歩み；12-1(1966)」で吉川氏によって指摘された。吉川[2]も参照)。

L_0をLの主要部とする。即ち、

$$(2) \qquad L_0 = \sum_{j=1}^{n+1} a^j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} .$$

この節では、すべての $y \in \Omega$ に対して、

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{n+1} | a^j(y) | \neq 0$$

が仮定される。

<u>補題2.</u>　$n \geqq 2$ と仮定する。$C^\infty(\Omega)$ (又は $C^\omega(\Omega)$) に係数をもち (3) をみたすLがΩのすべての点で条件(H)をみたすならば、L_0はΩで準楕円型(又は、解析的準楕円型)にはなりえない。そしてL_0が可解となるΩの部分領域が存在する。

<u>証明.</u>　Lを独立変数の変換により次のような形にすることができる(Nirenberg-Trèves [4]を参照)。y_0をΩの勝手な点とする。y_0の近傍での座標変換($y_1, \cdots, y_{n+1}$) $\longrightarrow$ ($x_1, \cdots, x_n, t$) ($y_0 \longrightarrow$ 原点 $x=0, t=0$) によってL_0は $x=0$, $t=0$ の近傍Nで

$$(4) \quad L_0 = g(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t} + i \sum_{j=1}^{n} \beta^j(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + c(x,t),$$

なる形に変形される。 ここで N において $g(x,t) \neq 0$ かつ $b^j(x,t)$ $(j=1,\cdots,n)$ は実数値であって (1) の形の L の係数が $C^\infty(\Omega)$ (又は $C^\omega(\Omega)$) に属するときは、座標変換及び (4) の形の L の係数は、又 $C^\infty(N)$ (又は $C^\omega(N)$) に属する。

L が N で条件 (H) をみたすことから、

$$(5)\quad \sum_{j=1}^{n} b^j(x,t)\xi_j = 0\ ,\ (x,t)\in N,\ \xi\in R^n$$
$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} b^j_t(x,t)\xi_j = 0$$

が出る。 ここで $b^j_t(x,t) = \dfrac{\partial b^j}{\partial t}(x,t)$ である。

$\mathbb{b}(x,t)$ をベクトル $(b^1(x,t),\cdots,b^n(x,t))$ とし、$|\mathbb{b}(x,t)|$ をその長さとする。もしも $|\mathbb{b}(x,t)|$ が N で恒等的に零ならば、変数 x だけの函数はすべて $L_0 u = 0$ の解である。$\mathbb{b}(x,t)$ が、N のある部分領域 N_1 で決して零にならなければ (5) から、

$$(6)\qquad \mathbb{b}_t(x,t) = \beta(x,t)\,\mathbb{b}(x,t)\quad \left(\mathbb{b}_t = (b^1_t,\cdots,b^n_t)\right)$$

をみたす実数値函数 $\beta(x,t)$ を $C^\infty(N_1)$ にみつけることができる。(6) から N_1 において

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{b}(x,t)/|\mathbb{b}(x,t)|\right) = 0$$

がわかる。よって $\mathbb{b}(x,t)/|\mathbb{b}(x,t)|$ は変数 t に関係しないことがわかり $\mathbb{v}(x) = \mathbb{b}(x,t)/|\mathbb{b}(x,t)|$ とおくとき、L_0 は再び

$$L_0=g(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}+i|\mathbb{b}(x,t)|\sum_{j=1}^{n}v^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right),\quad \mathbb{v}(x)=(v^1(x),\cdots,v^n(x))$$

とかかれる。このことから変数xだけに関係する，方程式

$$\sum_{j=1}^{n}v^j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}=0$$

の解はすべて$L_0u=0$の解であることがわかる。（解析的）準楕円性が局所的性質であることと以上のことから補題2の前半が容易に証明される。又，Nのある部分領域N'で変数xだけに関係する単位ベクトル$\mathbb{v}(x)$が存在して$\mathbb{b}(x,t)=|\mathbb{b}(x,t)|\mathbb{v}(x)$となるから$L$は$N'$で可解なことがわかる（これが Nirenberg-Trèves [4] の可解であるための十分条件の一つであった）。

補題3．$n\geq 1$と仮定する。$C^\omega(\Omega)$に係数をもち，(3)をみたす(1)の形のLがΩのある点で条件(H)をみたさなければ，L_0はΩで解析的準楕円型ではない。

証明．これは，溝畑氏[5]の定理4.1から容易にわかるが，ここでは，その証明の概略だけを述べる。

今，Lが$y_0\in\Omega$で条件(H)をみたさないとする。y_0の近傍Nでの$L_0u=0$の解wで，$w(y_0)=0$かつy_0を除いてNにおいて$Im(w)>0$なるものを作ることができる（Hörmander [3] の，Chap. VI を見よ）。適当な分枝をとれば，$\sqrt{w(y)}^3$は，Nで連続的微分

可能で $L_0 u=0$ をみたす。しかしこれは y_0 において2階連続的微分可能でない。これでこの補題が証明される。

補題4. $n \geqq 1$ を仮定する。$C^\omega(\Omega)$ に係数をもち(3)をみたす作用素 L が Ω で準楕円型(又は解析的準楕円型)であるのは L_0 がそうであるときに限る。

証明. $y_0 \in \Omega$ を勝手な点とする。Cauchy-Kowalewsky の定理により y_0 のある近傍 N で実解析的な

$$L_0 h = a$$

なる解 $h(y)$ をみつけることができる。これからすべての $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して容易に

$$(7)\quad \begin{cases} L_0(e^h u) = e^h L u \\ L(e^{-h} u) = e^{-h} L_0 u \end{cases}$$

をうる。(7)から補題4をうることは容易である。それは(解析的)準楕円性が局所的性質をもつからである。

§3. 定理の証明

最後に我々は §1 で述べた定理を証明しよう。そのためには、次の命題を証明すればよい。

<u>命題</u>. もしも $n \geq 2$ ならば, $C^\infty(\Omega)$ (又は, $C^\omega(\Omega)$) に係数をもち (3) をみたす (1) の形の作用素 L は決して準楕円型 (又は解析的準楕円型) には, なりえない。

この命題の証明において必要とされる次の補題をまず示そう。

<u>補題 5</u>. $C^\infty(\Omega)$ からそれ自身への線型写像 M が次をみたすとする:

(i) M は, 全単射かつ両連続である.

(ii) u の台と, Mu の台は, 一致する.

このとき, Ω で決して零とならない $C^\infty(\Omega)$ に属する函数 $\mu(x)$ が存在して $Mu=\beta(x)u$ となる。(ここで $C^\infty(\Omega)$ の位相は, セミノルム系 $|\cdot|_{m,K}$:

$$|f|_{m,K} = \sum_{|\alpha|\le m}\sup_{y\in K}|D^\alpha f(y)|$$

によって定義される。m は負でない任意の整数であり, K は Ω の任意のコンパクト集合である。明らかにこの位相により $C^\infty(\Omega)$ は, Fréchet 空間となる)。

<u>補題5の証明</u>. M 及び M^{-1} が $C^\infty(\Omega)$ に係数をもつ線型偏微分作用素となることは明らかである:

$$M = P(y,D) = \sum_{|\alpha|\le m_y} a_\alpha(y) D^\alpha,$$

$$M^{-1} = Q(y,D) = \sum_{|\alpha|\le n_y} b_\alpha(x) D^\alpha.$$

ここで m_y, n_y は、各々点 y における $P(y,D)$, $Q(y,D)$ の真の階数であり、それらは又、y が Ω のコンパクト集合を動くとき有界である。

まず初めに m_y, n_y が共に Ω において恒等的に零になることを示そう。 今 Ω において $n_y \neq 0$ と仮定する。このとき、$n_y = n > 0$ となる Ω の部分領域 Ω_0 ($\overline{\Omega_0} \subset \Omega$) が存在する。$m = \max_{y \in \Omega_0} m_y$ とおく。 $P_m(y,\xi)$ 及び $Q_n(y,\xi)$ を、各々特性多項式 $P(y,\xi)$, $Q(y,\xi)$ の主要部分とする ($y \in \Omega_0$, $\xi \in R^{n+1}$)。 明らかに、

$$(8) \qquad P_m(y,\xi)\,Q_n(y,\xi) = 0$$

がすべての $y \in \Omega_0$ とすべての $\xi \in R^{n+1}$ に対して成りたつ。(8) から すべての $y \in \Omega_0$ と $\xi \in R^{n+1}$ に対して $P_m(y,\xi) = 0$ をうる。したがって $m = 0$。 これは矛盾である。 Ω_0 において $P_0(y,\xi) = (M(1))(y)$ であるからである。 よって n_y も m_y も Ω において恒等的に零とならねばならぬ。 このようにして $M = a_0(y)$, $a_0(y)\,b_0(y) = 1$ であるから補題5をうる。

<u>命題の証明</u>. L を $C^\omega(\Omega)$ に係数をもつ (1) の形の作用素とする。今 (3) が みたされているとせよ。 補題2, 3, 4 は、L が Ω で解析的準楕円型にはなりえないことを示している。

次に、$C^\infty(\Omega)$ に係数をもつ (1) の形の作用素 L が (3) を

みたすとせよ。　今，L_0がΩのある部分領域Ω'で準楕円型だったとすれば，補題1により${}^tL_0$はΩ'の各点の近傍で可解となる。したがってL_0はΩ'の各点で条件(H)をみたすこととなる。このことと，補題2によりL_0はΩ'で準楕円型とはなりえない。よってL_0はΩのどんな部分領域でも準楕円型とはなりえない。この事実と補題5を使って，LがΩで準楕円型とはなりえないことを示そう。　今，LがΩで準楕円型だったとせよ。もしもΩの部分領域Ω_1において零とならないΩ上での$Lv=0$の解vがあれば

$$L_0 h = a$$

をみたす函数$h \in C^\infty(\Omega_1)$をみつけることができる。実際，$h=-\log v$ととればよい（ここでLについての仮定からvが$C^\infty(\Omega)$に属すること及び一般性を失うことなくvの値域が上半複素平面にあるとしてよいことに注意せよ）。補題4の証明におけると同じ方法でL_0がΩ_1で準楕円型となることがわかる。しかし，これは，矛盾である。$Lv=0$となる開集合の上では$v=0$とならねばならぬ。他方，補題1とLの準楕円性からLはΩの各点で条件(H)をみたす。よって補題2からLはΩのある部分領域Ω_0で可解なことがわかる。したがって

$$(9) \qquad Lu = f$$

は，すべての$f \in C_0^\infty(\Omega_0)$に対して解$u \in C^\infty(\Omega_0)$をもつ。もっと，一般に，すべての$f \in C^\infty(\Omega_0)$に対して(9)は，唯一つの解$u \in C^\infty(\Omega_0)$を，もつことがわかる。　よって$L$は$C^\infty(\Omega)$上の全単射かつ連続な

写像である。Banachの開写像定理により, Lの逆も連続である。このことからLは, 補題5でのMに対する条件をすべてみたしていることがわかる。即ちLは, $C^\infty(\Omega_0)$に属する函数による積の作用素に等しい。これは条件(3)に矛盾する。よってLはΩにおいて準楕円型とはなりえない。これで命題が証明された。

参考文献

[1] H. Suzuki: Analytic-hypoelliptic differential operators of first order in two independent variables, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 367-374.

[2] A. Yoshikawa: On the hypoellipticity of differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., 14 (1967), 81-88.

[3] L. Hörmander: Linear partial differential operators, Springer-Ver., Berlin (1963).

[4] L. Nirenberg - F. Trèves: Solvability of a first order linear partial differential equation, Comm. Pure Appl., 16 (1963), 331-351.

[5] S. Mizohata: Solutions nulls et solutions non analytiques, J. Math. Kyoto Univ., 1 (1962), 271-302.