数理解析研究所講究録
40巻 1968年 15-25

発展方程式の解と Gevrey クラス

阪大理　　田辺広城

Banach 空間 X での抽象的微分方程式

$$du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t) \qquad (1)$$

の解 $u(t)$ が t の函数として Gevrey のクラスに属するかという問題について述べる。$\{M_k\}_{k=0,1,2,\cdots}$ を次の條件を満足する正数の列とする:

(i) $\forall k \qquad M_{k+1} \leqq d_0 M_k,$

(ii) $0 \leqq j \leqq k$ のとき $\binom{k}{j} M_{k-j} M_j \leqq d_1 M_k,$

(iii) $\forall k \qquad M_k \leqq M_{k+1},$

(iv) $\forall j, \forall k \qquad M_{j+k} \leqq d_2^{j+k} M_j M_k.$

X が Hilbert 空間のとき Lions と Magenes によって種々の結果が得られた。先ずそれを簡単に述べる。V は X の稠密な部分空間で X よりも強い位相を与える内積が定義され、その内積によって Hilbert 空間になっているものとする。このとき $V \subset X \subset V'$ と考へることが出来る。$A(t)$ が $V \times V$ で定義された sesquilinear form $a(t;u,v)$ によって $a(t;u,v) = (A(t)u, v)$ と定められる場合を考へる。V あるいは V' の値をとる無限回微分可能、任意の有限区間 $a \leqq t \leqq b$ で

$$\| (d/dt)^k u(t) \| \le C_0 C^k M_k \qquad \forall k$$

を成立せしめる様な常数 C_0, C が存在し，かつある t_0 が存在して $t \le t_0$ で $u(t) \equiv 0$ となる函数 u の全体をそれぞれ $D_{+,M_k}(V)$, $D_{+,M_k}(V')$ と表はす．これらの空間に適当な位相を入れて局所凸完備な線型位相空間とすると (1) によって $u(t)$ を $f(t)$ に対應させる写像が $D_{+,M_k}(V)$ と $D_{+,M_k}(V')$ との間の同相写像であることを種々の仮定のもとで示すのが Lions と Magenes の主な結果の一つである．$D_{+,M_k}(V)$ 等の定義で $t \le t_0$ で $u(t) \equiv 0$ を $t \ge t_0$ で $u(t) \equiv 0$ におき換えれば同様に $D_{-,M_k}(V)$, $D_{-,M_k}(V')$ が得られ，それ等の共役空間を $D'_{+,M_k}(V)$, $D'_{+,M_k}(V')$ と表はすと写像 $u(t) \to f(t)$ は $D'_{+,M_k}(V)$ と $D'_{+,M_k}(V')$ との間の同相写像にもなる．Lions と Magenes は以上の結果を (1) が放物型，Schrödinger 型の場合，t について二階の場合についても証明しているが $\{M_k\}$ が quasi-analytic な場合は $D_{+,M_k}(V)$ は 0 だけになってしまうのでその様な場合は除外されている．以下においては X が Banach 空間で (1) が放物型の場合について述べる．$D_{+,M_k}(V)$ の様な空間は考へないから $\{M_k\}$ は quasi-analytic であってもよい．Lions-Magenes の様に hyperfunction 解は考へず通常の意味で (1) を満足する解のみを考へる．主な結果は (1) の基本解 $U(t,s)$ について

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^l U(t,s) \right\| \leq L_0 L^{n+m+l} M_{n+m+l} \ (t-s)^{-n-l}$$

を成立せしめる様な常数 L_0, L が存在することを示すことである．これを用いれば u_0 が X の任意の元，$f(t)$ が X の値をとる C^∞ 函数ですべての n に対し

$$\| d^n f(t)/dt^n \| \leq F_0 F^n M_n \qquad s \leq t \leq T$$

を満足するならば初期条件 $u(s)=u_0$ を満足する（1）の解 $u(t)$ について

$$\| d^n u(t)/dt^n \| \leq C_0 C^n M_n (t-s)^{-n} \quad , \quad s < t \leq T, \ \forall n$$

を成立せしめる常数 C_0, C が存在することが示される．$\{M_k\} = \{k!\}$ であるときは解析函数を扱っていることになるがこの場合は小松彦三郎氏の考案した方法によって既にいくつかの結果が得られている．それは解 $u(t)$ が正則函数として複素領域に延拡張出来ることを示すのであるが，上の様な形の評価式は示されなかった．

仮定1．各 $t \in [0,T]$ に対して $A(t)$ は X で稠密な集合で定義された閉型閉作用素でその resolvent set はある開角領域 $\Sigma = \{\lambda : \theta \leq \arg \lambda \leq 2\pi - \theta\}$, $0 < \theta < \pi/2$, を含む．

仮定2．有界作用素の値をとる関数 $A(t)^{-1}$ は $0 \leq t \leq T$ で無限回微分可能である．

仮定3．常数 K_0, K が存在して各 $\lambda \in \Sigma$, $t \in [0, T]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n (\lambda - A(t))^{-1} \right\| \leqq \frac{K_0 K^n M_n}{|\lambda|}.$$

以上の仮定は種々の場合に成立することが示される．$A(t)$ が $[0, T]$ のある複素近傍 Δ で定義され，そこで仮定1と仮定3の $n=0$ の場合が満足され，更に $A(t)^{-1}$ が Δ で正則であるときは仮定3が満足されることがわかる．それは $(\lambda - A(t))^{-1}$ を Cauchy の積分表示で表現すれば容易に確かめられる．基本解 $U(t,s)$：

$$(\partial/\partial t)\, U(t,s) + A(t) U(t,s) = 0, \qquad 0 \leqq s < t \leqq T,$$

$$U(s,s) = I, \qquad 0 \leqq s \leqq T$$

は次の様に表はされる：

$$U(t,s) = \exp(-(t-s)A(t)) + \int_s^t \exp(-(t-\tau)A(t))\, R(\tau,s)\, d\tau,$$

$$R(t,s) = \sum_{l=1}^{\infty} R_l(t,s),$$

$$R_1(t,s) = -(\partial/\partial t + \partial/\partial s) \exp(-(t-s)A(t)),$$

$$R_l(t,s) = \int_s^t R_1(t,\tau) R_{l-1}(\tau,s)\, d\tau, \qquad l = 2, 3, \dots.$$

$U(t,s)$ は次の積分方程式を満足することも容易に証明することが出来る：

$$U(t,s) = \exp(-(t-s)A(s)) + \int_s^t Q_1(t,\tau)U(\tau,s)\,d\tau, \tag{2}$$

但し

$$\begin{aligned} Q_1(t,\tau) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\exp(-(t-\tau)A(\tau)) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-\tau)}\frac{\partial}{\partial \tau}(\lambda - A(\tau))^{-1}\,d\lambda, \end{aligned} \tag{3}$$

ここで Γ は $\infty e^{-i\theta}$ と $\infty e^{i\theta}$ とを結ぶ Σ の中の滑らかな路である．主結果を証明する前に $U(t,s)$ が t,s について無限回微分可能かつ

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^l U(t,s) \right\| \leqq C_{n,m}(t-s)^{-n-l} \tag{4}$$

となる様な常数 $C_{n,m}$ が存在することを示さねばならないがこれの証明は容易である．

予備定理 1．すべての m，n に対して

$$\left.\begin{array}{l} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)^m \exp(-(t-s)A(s)) \right\| \\ \\ \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)^m Q_1(t,s) \right\| \end{array}\right\} \leqq N_0 N^{n+m} M_n M_m (t-s)^{-n}$$

が成立する様な常数 N_0, N が存在する．

これは (3) を使って容易に証明できる

$$Z(t,s) = \int_s^t Q_1(t,\tau)U(\tau,s)\,d\tau$$

とおく.

予備定理2. $s=r_0<r_1<\cdots<r_n$ とする. $t=r_{n+1}>r_n$ で

$$(\partial/\partial t)^n Z(t,s)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-i}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r_i}\right)^{i-1-j}Q_1(t,r_i)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial r_i}\right)^{j}U(r_i,s)$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\int_{r_i}^{r_{i+1}}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-i}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{i-j}Q_1(t,\tau)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{j}U(\tau,s)\,d\tau.$$

証明.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n Z(t,s)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-i}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{i}\int_{r_i}^{r_{i+1}}Q_1(t,\tau)U(\tau,s)\,d\tau\right\}$$

$i\leqq n-1$ のとき

$$\{\quad\}=\int_{r_i}^{r_{i+1}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \tau}-\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{i}Q_1(t,\tau)\cdot U(\tau,s)\,d\tau$$

$$=\int_{r_i}^{r_{i+1}}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{i-j}\left(-\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{j}Q_1(t,\tau)\cdot U(\tau,s)\,d\tau$$

として τ について部分積分を行なう. $i=n$ のときも同様に行なれば求める等式が得られる.

Stirling の公式によりある正数 ω が存在してすべての自然数 n に対し

$$\omega^{-1}n^n e^{-n}\sqrt{n}\leqq n!\leqq \omega n^n e^{-n}\sqrt{n} \tag{5}$$

が成立する.

定理1. 常数 H_0, H が存在し, すべての自然数 n に対し

$$\| (\partial/\partial t)^n U(t,s) \| \leqq H_0 H^n M_n (t-s)^{-n} \qquad (6)$$

証明．帰納法による．$n=0$ のときは明らかである．$n-1$ 迄わかったとする．予備定理２により

$$(\partial/\partial t)^n U(t,s) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV},$$

$$\mathrm{I} = (\partial/\partial t)^n \exp(-(t-s)A(s))$$

$$\mathrm{II} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_i}\right)^{i-1-j} Q_1(t, s_i) \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^j U(s_i, s),$$

$$\mathrm{III} = \sum_{i=0}^{n} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \sum_{\substack{j=0 \\ j<n}}^{i} \binom{i}{j} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{i-j} Q_1(t,\tau) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^j U(\tau, s)\, d\tau,$$

$$\mathrm{IV} = \int_{s_n}^{t} Q_1(t,\tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^n U(\tau, s)\, d\tau.$$

予備定理１により

$$\| \mathrm{I} \| \leqq N_0 M_0 N^n M_n (t-s)^{-n}, \qquad (7)$$

Hを十分大きくとって

$$H \geqq \max\{2N, 2NT\} \qquad (8)$$

としておく．予備定理１と(8)，(ii)，及び帰納法の仮定によって

$$\| \mathrm{II} \| \leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \frac{N_0 N^{n-1-j} M_{n-i} M_{i-1-j}}{(t-s_i)^{n-i}} \frac{H_0 H^j M_j}{(s_i - s)^j}$$

$$\leqq \alpha_1 N_0 H_0 N^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{i-1} M_{n-i}}{(t-s_i)^{n-i}} \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{H}{N}\right)^j \frac{1}{(s_i - s)^j}$$

$$\leqq 2\alpha N_0 H_0 N^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{i-1} M_{n-i}}{(t-r_i)^{n-i}} \left(\frac{H}{N}\right)^{i-1} \frac{1}{(r_i-s)^{i-1}}$$

$$\leqq 2\alpha_1^2 N_0 H_0 H^{n-1} M_{n-i} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)!(n-i)!}{(n-1)!} (t-r_i)^{i-n} (r_i-s)^{1-i} \left(\frac{N}{H}\right)^{n-i}.$$

ここで $r_i = s + i(t-s)/(n+1)$, $i=1,\dots,n$, ととる．そうすると上の不等式の最後にある和 $\sum_{i=1}^{n} \cdots$ は (5) を用いて

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} (t-s)^{1-n} \left(\frac{H}{N}\right)^{n-1} + \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} (t-s)^{1-n}$$

$$+ \sum_{i=2}^{n-1} \omega^3 \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{i-1}{i}\right)^{i-1} \left(\frac{n-i}{n+1-i}\right)^{n-i} \left\{\frac{(i-1)(n-i)}{n-1}\right\}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N}{H}\right)^{n-i} (t-s)^{1-n}$$

$$\leqq e(t-s)^{1-n} 2^{1-n} + e(t-s)^{1-n}$$

$$+ \omega^3 e^2 (t-s)^{1-n} 2^{-1} \sqrt{n-1} \sum_{i=2}^{n-1} 2^{i-n}$$

$$\leqq \omega^3 e^2 \sqrt{n-1} (t-s)^{1-n}$$

となるからこれを代入して

$$\|\mathrm{II}\| \leqq C_1 H_0 H^{n-1} M_n (t-s)^{1-n} \tag{9}$$

を得る．同様な計算を行なって

$$\|\mathrm{III}\| \leqq C_2 H_0 H^{n-1} M_n (t-s)^{1-n} \tag{10}$$

を得る．(7), (9), (10) により

$$\|(\partial/\partial t)^n U(t,s)\| \leqq N_0 M_0 N^n M_n (t-s)^{-n} + C_3 H_0 H^{n-1} M_n (t-s)^{1-n}$$

$$+ N_0 M_0^2 \int_{s_n}^{t} \|(\partial/\partial\tau)^n U(\tau,s)\| d\tau$$

を得るがここで両辺に $(t-s)^n$ をかけて

$$Y(t,s) = (t-s)^n \| (\partial/\partial t)^n U(t,s) \|$$

とおくと $\tau_n < \tau < t$ のとき

$$(t-s)^n < (1+n^{-1})^n (\tau-s)^n < e(\tau-s)^n$$

となることに注意すると *

$$Y(t,s) \leqq H_0 H^n M_n \exp(-N_0 M_0^2 eT) + N_0 M_0^2 e \int_s^t Y(\tau,s)\,d\tau$$

を得る．これを積分すれば

$$Y(t,s) \leqq \exp(N_0 M_0^2 e(t-s)) \exp(-N_0 M_0^2 eT) \leqq H_0 H^n M_n$$

となる．

定理2．常数 L_0, L が存在してすべての $n, m \geqq 0$ に対し

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^l U(t,s) \right\| \leqq L_0 L^{n+m+l} M_{n+m+l} (t-s)^{-n-l}.$$

証明　$n=l=0$ のときは前定理によって示された．$l=0$ の場合は $n+m$ に関する帰納法による．$n=0$ のときは

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)^m U(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)^m \exp(-(t-s)A(s))$$

$$+ \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \int_s^t \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{m-k} \exp(-(t-\tau)A(\tau)) \left(\frac{\partial}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial s}\right)^k U(\tau,s)\,d\tau$$

に注意して証明出来る．$n>0$ のときは上式右辺の各項に前定理の証明法を適用する．これで $l=0$ のときの証明は終るが一般の場合は $(\partial/\partial s)^l = \{(\partial/\partial t+\partial/\partial s)-\partial/\partial t\}^l$ に注意すれば $l=0$ の場合に帰着される．

定理3. $f(t)$はXの値をとるC^∞函数で各$n\geqq 0$に対し

$$\| d^n f(t)/dt^n \| \leqq F_0 F^n M_n, \qquad s \leqq t \leqq T$$

となる常数F_0, Fが存在するとする. 初期條件$u(s)=u_0$を満足する(1)の解$u(t)$に対して

$$\| d^n u(t)/dt^n \| \leqq H_0 H^n M_n \| u_0 \| (t-s)^{-n} + \bar{F}_0 \bar{F}^n M_n (t-s)^{1-n}$$

を成立せしめる様な常数$\bar{F}_0, \bar{F}$が存在する.

証明.
$$u(t) = U(t,s)u_0 + \int_s^t U(t,\sigma) f(\sigma)\, d\sigma$$

であるから定理1と

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_s^t U(t,\sigma) f(\sigma)\, d\sigma$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)^{i-1-j} U(t,s)\, f^{(j)}(s)$$

$$+ \int_s^t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\right)^{n-j} U(t,\sigma)\, f^{(j)}(\sigma)\, d\sigma$$

に注意すれば容易に定理の結論が得られる.

参考文献

[1] T. Kato and H. Tanabe: On the abstract evolution equation, Osaka Math. J., 14 (1962), 107–133.

[2] H. Komatsu: Abstract analyticity in time and unique continuation property of solutions of a parabolic equation, J. Sci.

Univ. Tokyo, Section I, 9, part I (1961), 1–11.

[3] J. L. Lions and E. Magenes: Espaces de fonctions et distributions du type de Gevrey et problèmes aux limites paraboliques, Ann. Mat. pura appl., 68 (1965), 341–418.

[4]. J. L. Lions and E. Magenes: Espaces de fonctions et problèmes aux limites pour diverses classes d'équations d'évolution, Ann. Mat. pura appl., 72 (1966), 343 – 394.

* $H_0 H \geqq 2 M_0 N_0 N \exp(N_0 M_0^2 e T)$,

$H \geqq 2 C_3 T \exp(N_0 M_0^2 e T)$

としておく.