数理解析研究所講究録
41巻 1968年 56-63

格子の類数について

東大 教養　田坂 隆士

§1. 定義及び説明.

k: 代数体

G: k上定義された連結半単純代数群.

$$(1)\qquad G_A = \prod_v (G_v, G_{\mathfrak{o}_v}) \supset G_k$$

Gのk上のアデール群 G_A は上記のような制限直積である。又 G_k は自然に G_A に埋め込んであるとする。ここで $G_{k_v}=G_v$ と書いた。

$$(2)\qquad A_k(G) = G_A/G_k\cdot G_A', \qquad B_k(G) = G_A/\overline{G_k\cdot G_A'}.$$

と二つの可換群を定義する。G_A' は G_A の（抽象的）交換子部分群であり，バーは G_A の中での閉包を表わす。$A_k(G)$ は抽象群であり，$B_k(G)$ は自然な位相で局所コンパクト位相可換群となる。ここで $G_k\cdot G_A'$ が G_A の中で閉じて居るときは，

$A_k(G)$ と $B_k(G)$ を同一視する。$\mathbb{T}$ をノルムが1の複素数が作る群として,

(3) $X(G_A)=\{$ G_A から $\mathbb{T}$ への連続準同型で G_k の上で trivial なもの全体 $\}$.

とする。即ち $X(G_A)$ は $B_k(G)$ のポントラヤーギンの意味での双対である。

G を線形とする。即ち $G\subset GL(V)$。ここで V は k 上定義されたベクトル空間。又自然な単射は k 上定義されて居るものとする。V の部分加群 L が $\mathfrak{O}(k)$-格子であるとは

i) L は有限生成な $\mathfrak{O}(k)$-モジュールである.

ii) $L\otimes_{\mathfrak{O}} k=V$

を充すことである。ここで $\mathfrak{O}(k)$ は k の整数環を表わす。

k の任意の有限素点 $\mathfrak{z}$ に対して, $L_\mathfrak{z}=L\otimes_{\mathfrak{O}}\mathfrak{O}_\mathfrak{z}\subset V_\mathfrak{z}$ は $V_\mathfrak{z}$ の中の $\mathfrak{O}_\mathfrak{z}$-格子である。ここで

(4) $G_{\mathfrak{O}_\mathfrak{z}}=\{x\in G_\mathfrak{z} : xL_\mathfrak{z}=L_\mathfrak{z}\}$

は $G_\mathfrak{z}$ の開部分群で, かつコンパクトである。k の無限素点 λ に対して, $G_{\mathfrak{O}_\lambda}=(G_\lambda)^\circ$ と置く。$(G_\lambda)^\circ$ は G_λ の普通の意味での連結成分を表わす.

S を k の素点の有限集合とし,

(5) $$G_S = \prod_{v\in S} G_v, \subset G_A$$

(6) $$G_{A(S,L)} = G_S \times \prod_{v\notin S} G_{\mathfrak{O}_v} \subset G_A$$

と置く、G_S は G_A の閉じた正規部分群であり，$G_{A(S,L)}$ は G_A の開部分群である。

<u>強近似定理</u>（M. Kneser）

$\tilde{G}$：単連結半単純群

$\tilde{G}_S$：コンパクトでない．

$$\Rightarrow \overline{\tilde{G}_k \cdot \tilde{G}_S} = \tilde{G}_A.$$

従がって $\tilde{G}_k \cdot \tilde{G}_{A(S)} = \hat{G}_A$.

この定理は E_8 のある型を除いて証明されて居る。

普通の半単純群 G の場合には．．

<u>系</u>

(7) $$G_k\backslash G_A/G_{A(S,L)} \approx G_A/G_k \cdot G_{A(S,L)}.$$

上の式の右辺はアーベル群である。

証明はやはり Kneser の論文を参照されたい。

(8) $$h(S,L) = \#(G_k\backslash G_A/G_{A(S,L)})$$

を格子 L の S に関する類数と云ふ。$h(S,L) < \infty$ は A. Borel

の[1]に証明されて居る。$X(G_A)$の元χに対して導手$f(\chi)$を次のように定める。

$$f(\chi) \supset f(S.L) \overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}} \chi|_{G_{A(S.L)}} : \text{trivial}$$

即ち、$f(\chi)$自体は定義されて居ない。$f(\chi)$自体を定義するにはもっと色々な表現を考えなければならないが、今の所よく判らない。

こうすると、有限アーベル群は自己双対であるから、

$$h(S.L) = \#\{\chi \in X(G_A) : f(\chi) \supset f(S.L)\} \qquad (9)$$

となる、

ある種の criterion：

$$G_A = \prod_v (G_v, G_{\mathfrak{O}_v})$$

$$G_A' = \prod_v (G_v', G_{\mathfrak{O}_v}')$$

である。

A) ほとんどすべてのvに対して、$G_{\mathfrak{O}_v}' = G_v' \cap G_{\mathfrak{O}_v}$.

B) $G_{\mathfrak{O}_v}' \ni x$の長さ$l_v(x)$を、$x$を表わす交換子の個数の最小のものとしたとき、$l_v(x) < M$となる$M$があたえる、但し$M$は$G$と$k$にしか関係しない数。

もしA), B)が成立するならば

(10) $$G_A/G_A' = \prod_v (G_v/G_v',\ G_{\mathfrak{o}} G_v'/G_v')$$

特に、すべての v に対し、G_v' が G_v の中で閉じて居るならば、G_A' は G_A の中で閉じて居る。

§2. quasi-split group の場合

k 上の代数群 G が quasi-split であるとは、k 上定義された G の Borel 部分群 B が存在することである。A を G の極大 k-trivial torus とすると、$T = Z(A)$ は G の k 上定義された極大 torus である。G_k の内部自己同型により、$B = TU$ として良い。但し U は G のある unipotent 部分群である。

G の k 上定義された普遍被覆群を $\tilde{G}$ とする。

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{f} G \longrightarrow 1$$

なる代数群の exact 列を得る。$\tilde{T}$ を T に対応する $\tilde{G}$ の極大 torus とする。又 $T_k' = f(\tilde{T}_k)$ と書くと

(11) $$G_k/G_k' \cong T_k/T_k'$$

(12) $$G_A/G_A' \cong T_A/T_A'$$

を得る。但し $T_A' = f(\tilde{T}_A)$. T_A' は T_A の中で閉じて居るこ

と，及び G_A' が G_A の中で閉じて居ることが判かるから，同型（12）は位相群の同型になることが判る．

定理

G が k 上 quasi-split ならば，$A_k(G)=G_A/G_k\cdot G_A'$ は totally disconnected かつコンパクトなアーベル群である。証明は筆者の論文を参照されたい。

以下簡単のため（実際は split でないとうまく行かないのだけれど），G は k 上 split と仮定する。即ち G は，k-trivial な極大 torus T が存在する；このとき $\tilde{T}$ から T への isogeny により $X(T)$ から $X(\tilde{T})$ への単射が誘導される。ここでは $X(T)$ は $X(\tilde{T})$ の部分加群であると考える。但し，$X(T)$ は T の character モジュールである．$X(\tilde{T})$ は G の weight で張られるモジュールになって居る。さて $X(T)$ の $X(\tilde{T})$ に関する単因子を $(e_1,\cdots,e_\ell)$ とすると，

$$(13)\qquad T_k/T_k^1 \cong \prod_{i=1}^{\ell} k^*/(k^*)^{e_i}$$

となる．故に G_k の Bruhat 分解を使うと．

$$(14)\qquad G_k\backslash G_A/G_A' \cong T_k\backslash G_A/G_A'$$

$$\cong T_k \backslash T_A / T_A^1 \cong T_A / T_k \cdot T_A^1$$

$$\cong \prod_{i=1}^{l} J_k / k^* \cdot (J_k)^{e_i} \cong \prod_{i=1}^{l} C_k / (C_k)^{e_i} .$$

とする。即ち

$$(15) \qquad A_k(G) \cong \prod_{i=1}^{l} C_k / (C_k)^{e_i} ,$$

を得た。但し J_k は k のイデール群，C_k は k のイデール類群。

V_k の中の $\mathfrak{O}(k)$-格子 L が special であるとは，L の生成系として weight ベクトルが取れることである。このとき，すべての有限素点 $\mathfrak{p}$ に関し，$T_{\mathfrak{O}_\mathfrak{p}} = T_\mathfrak{p} \cap G_{\mathfrak{O}_\mathfrak{p}}$ は極大コンパクト部分群である。即ち $T_{\mathfrak{O}_\mathfrak{p}} \cong \mathfrak{u} \times \cdots \times \mathfrak{u}$.（$\mathfrak{u}$ は $k_\mathfrak{p}^*$ の単数群である）

$\chi \in X(G_A)$ に対し，

$$f(\chi) \supset f(S, L) \iff \begin{cases} \chi|_{T_{\mathfrak{O}_\mathfrak{p}}} = 1, & \forall \mathfrak{p} \notin S \\ \chi|_{T_v} = 1 & \forall v \in S . \end{cases}$$

であることは容易に判る。今

$$h_n(S) = \#\left\{ \chi \in \hat{C}_k : \begin{array}{ll} \text{(i)} \ \chi^n = 1 & \\ \text{(ii)} \ \chi|_{\mathfrak{u}_\mathfrak{p}} = 1 & \forall \mathfrak{p} \notin S \\ \text{(iii)} \ \chi|_{k_\mathfrak{p}^*} = 1 & \forall v \in S \end{array} \right\}$$

$$= [\mathfrak{K}_n \cap M(S), k]$$

は類体論より容易に判る。但し k_n は k の d 次 $(d|n)$ 巡回拡大全体の合併であり，$M(S)$ は，S に含まれる素点は完全分解するような極大不分岐アーベル拡大（k の）である。故に special な格子 L の S に関する類数 $h(S,L)$ に関し次の公式を得る。

$$(16) \qquad h(S,L) = \prod_{i=1}^{l} h_{e_i}(S) = \prod_{i=1}^{l} [k_{e_i} \cap M(S) : k]$$

———— ∘ ————

Reference.

[1] A. Borel : some finite property of adele groups. Publ. Math. IHES.

[2] M. Kneser : Strong approximation. Lecture notes of Summer Institute at Boulder, Colorado.

[3] T. Tasaka : Sur les groupes algébriques déployés. (to appear in J. of Math. Soc. of Japan).

[4] T. Tasaka : On the quasi-split simple groups defined over a algebraic number field. (To appear)